

Leader-Follower Formation of Mobile Robots on a Mobile Axis System

I. Maruri-López, M. Velasco-Villa, A. Rodríguez-Angeles

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica, Av. IPN
2508, San Pedro Zacataenco, 07360, Ciudad de México, México. (e-
mail: { itan.maruri,velasco,aangeles }@cinvestav.mx)*

Abstract: This work presents the methodology to obtain a kinematic model of a leader-follower formation of mobile robots of the type 2.0, without the need to use a global reference system, to obtain the position and orientation of the leading robot with respect to the moving axes of the follower robot. A control strategy is presented as a solution to the problem of following the trajectory in a leader-follower formation, and an analysis of the convergence of the states of the system at the origin, by means of Lyapunov techniques. Finally, through numerical simulations, the evaluation of the training strategy and its performance under the developed control scheme is presented.

Keywords: Ejes móviles, robots móviles, formación líder-seguidor, seguimiento de trayectoria, distancias relativas, marcos no inerciales.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación sobre Sistemas Inteligentes de Transporte (ITS, por sus siglas en inglés), surge de las necesidades modernas de solucionar problemáticas referentes a movilidad en las grandes urbes, mejorar el desempeño de los transportes civiles o mercantiles (Milanés et al. [2014]). En la industria cada vez es más común la utilización de robots móviles como parte del proceso de producción, transportación y distribución, ejemplo de ello son los almacenes automatizados (Guizzo [2008]), vehículos autónomos de transportación de materia prima (e.g. Rio Tinto) y el sistema de coordinación de camiones de transporte de mercancía, *platooning* (Jia et al. [2016]). Teniendo como objetivos principales el ahorro de tiempo, conducción eficiente, reducción de costos y emisiones contaminantes, mejorar la seguridad y de reducir los accidentes vehiculares y civiles.

Utilizando el esquema de formación líder-seguidor se han desarrollado múltiples trabajos de investigación, por ejemplo, proponiendo políticas de tiempos de separación como en (Cruz-Morales et al. [2018]), manteniendo una formación o distancia entre vehículos (Loria et al. [2016]), utilizando sensores a bordo como sistemas de visión artificial (Wang et al. [2017]), pero en todos ellos considerando un sistema global de referencia.

Este trabajo aborda el problema de la obtención de un modelo cinemático de una formación líder-seguidor que no dependa de un sistema de referencia global, sino proporciona una metodología para obtener un modelo referenciado a los ejes móviles del robot seguidor, para obtener la posición y orientación del robot líder. Evitando con ello la necesidad de sistemas de localización global y optando por un equipamiento de sensores a bordo de cada robot, que permita conocer la posición y orientación del robot líder respecto al marco no inercial del robot seguidor.

A continuación, se describe la organización del presente documento. En la Sección 2 se presenta el modelo cinemático del robot móvil utilizado y una formación líder-seguidor en un sistema de referencia global. Continuando, en la Sección 3 se hace referencia a la propuesta de solución para obtener el modelo cinemático de una formación líder-seguidor sin utilizar un sistema global de referencia. Consiguiente, en la Sección 4 se desarrolla el modelo cinemático en coordenadas cartesianas a partir de los ejes móviles del robot seguidor, además se presentan las condiciones de equivalencia con el modelo global expuesto en la Sección 2. La Sección 5 introduce la estrategia de control y la retroalimentación propuesta para resolver el problema de seguimiento de trayectoria en una formación líder-seguidor, y el análisis de estabilidad del sistema utilizando técnicas de Lyapunov. En la Sección 6, se muestran los resultados obtenidos en simulaciones numéricas de la estrategia de formación propuesta. Finalmente, en la Sección 7 se presentan de manera breve algunas conclusiones acerca de este trabajo.

2. MODELO CINEMÁTICO LÍDER-SEGUIDOR EN UN SISTEMA DE REFERENCIA GLOBAL

2.1 Robot móvil diferencial

Para desarrollar una estrategia de formación líder-seguidor en un sistema de referencia global se utiliza el modelo cinemático de un robot móvil del tipo (2,0). Este tipo de robots móviles se caracteriza por tener una restricción no-holonómica (Murray and Sastry [1993]; Tilbury et al. [1995]), además la tracción del robot móvil se da por medio de dos ruedas sobre el eje perpendicular al eje longitudinal del vehículo. Por lo que el modelo cinemático de un robot diferencial (de Wit et al. [1996]), donde $v_j(t)$ y $\omega_j(t)$ son las entradas de control del robot móvil y $\theta_j(t)$ el ángulo de orientación del robot móvil respecto al sistema global de referencia, se presenta a continuación,

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= v_j(t) \cos(\theta_j(t)) \\ \dot{y}_j(t) &= v_j(t) \sin(\theta_j(t)) \\ \dot{\theta}_j(t) &= \omega_j(t) \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 Formación líder-seguidor

En la Figura 1, se presenta una formación líder-seguidor utilizando un sistema de referencia global, desde donde se miden la posición y orientación del robot líder R_L y del robot seguidor R_F , usando el modelo (1) con $j = L, F$ para el robot líder y el robot seguidor respectivamente, como se desarrolla en (Infante et al. [2019]).

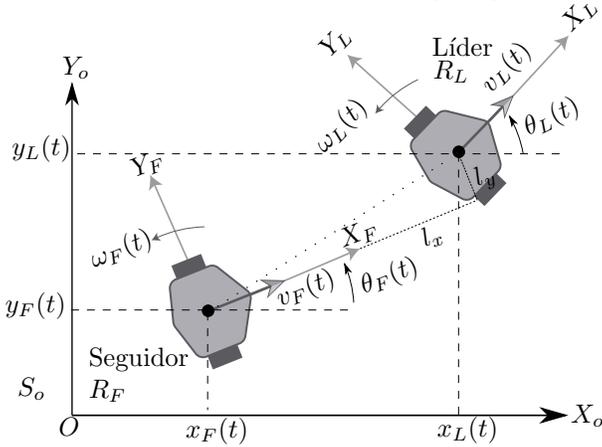


Fig. 1. Esquema líder-seguidor global.

De tal forma que surge la necesidad de un modelo cinemático de una formación líder-seguidor que no dependa de un sistema global de medición. En su lugar, se establecerá al robot seguidor y su sistema de ejes móviles como sistema base del modelo cinemático, para lo que cada robot estará equipado con múltiples sensores, como sistemas de visión artificial por medio de cámaras y unidades de procesamiento de imagen, sistemas de medición de distancia y mapeo de entorno como los sensores lidar, o cualquier sistema de localización que permita conocer la posición del robot de enfrente en la formación de manera local.

3. MODELO CINEMÁTICO LÍDER-SEGUIDOR EN UN SISTEMA DE EJES MÓVILES

3.1 Planteamiento del problema

Los modelos cinemáticos con robots móviles se desarrollan comúnmente a partir de obtener la posición y orientación del robot desde un sistema de referencia global, cuestión que se ha solucionado a partir de la introducción de tecnologías como Sistemas de Localización Global (GPS, por sus siglas en inglés) o sistemas de localización por visión artificial o telemetría, sin embargo en ambientes donde se carece de estas tecnología o escenarios donde la implementación de las mismas es inviable, los modelos cinemáticos carecen de la información necesaria para ser utilizados. Y aunque es posible solventar este problema con técnicas de odometría, cuyo resultado final en la posición y orientación se ve afectado por la calidad de los sensores utilizados y la acumulación de error en las mediciones, el objetivo final es desarrollar un modelo cinemático que no dependa de un sistema global externo, sino de un sistema de referencia móvil que acompañe a los robots móviles y evite las restricciones que un sistema global tiene.

3.2 Propuesta de solución

Para dar lugar a un modelo cinemático de una formación líder-seguidor sin la dependencia de un sistema de referencia global, considerando la configuración mostrada en la Figura 1, se propone establecer un sistema de ejes móviles, también conocidos como ejes no inerciales, que acompañe al movimiento de los robots líder R_i y seguidor R_{i+1} , el cual se denominará como el sistema de ejes móviles S_{ρ_i} , cuyo vector unitario \vec{i}_{ρ_i} conecta a los centros de los robots líder y seguidor. Se define la posición entre los robots con el vector $\vec{\rho}_i(t)$, medido en el sistema de ejes móviles S_{ρ_i} , que va desde el robot seguidor hasta el robot líder y es colineal al vector unitario \vec{i}_{ρ_i} . En la Figura 2 se observa que además del sistema de ejes móviles S_{ρ_i} conformado por el marco coordenado $O_{\rho_i} X_{\rho_i} Y_{\rho_i}$, cada uno de los robots tiene su propio sistema de ejes móviles, S_i para el robot líder, conformado por el marco coordenado $O_i X_i Y_i$, y para el robot seguidor el sistema de ejes móviles S_{i+1} , conformado del marco coordenado $O_{i+1} X_{i+1} Y_{i+1}$. Cada uno de los robots tiene definido sobre su propio sistema de ejes móviles un vector de velocidad lineal y un vector de velocidad de rotación, $[\vec{v}_i(t), \vec{\omega}_i(t)]$ para el robot líder R_i y $[\vec{v}_{i+1}(t), \vec{\omega}_{i+1}(t)]$ para el robot seguidor R_{i+1} . La orientación de cada robot respecto al vector $\vec{\rho}_i(t)$ se expresa por medio de ángulos, para el robot líder el ángulo $\beta_i(t)$ y para el robot seguidor el ángulo $\phi_{i+1}(t)$.

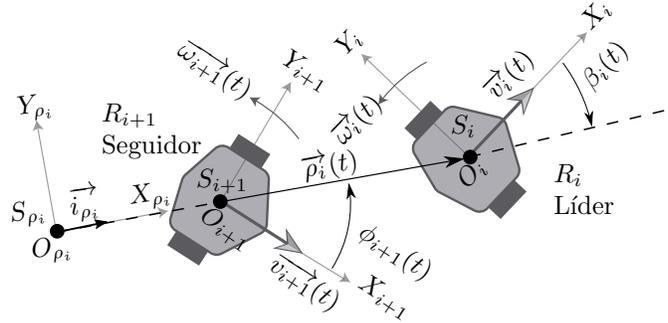


Fig. 2. Esquema líder-seguidor vectorial sobre ejes móviles.

A fin de evidenciar sobre cual sistema de ejes móviles se esta trabajando, se procederá a renombrar el vector $\vec{\rho}_i(t)$ de la siguiente forma,

$$\vec{r}_{i+1}^i(t) \Big|_{S_{\rho_i}} = \|\vec{\rho}_i(t)\| \vec{i}_{\rho_i} + 0 \vec{j}_{\rho_i} + 0 \vec{k}_{\rho_i} \quad (2)$$

La notación anterior describe que el vector de posición $\vec{r}_{i+1}^i(t)$, va desde la posición del robot seguidor R_{i+1} hasta la posición del robot líder R_i , referido en el sistema de ejes móviles S_{ρ_i} .

Otra forma de expresar el vector de posición entre los robots, es por medio de una resta vectorial, como a continuación se presenta,

$$\vec{r}_{i+1}^i(t) \Big|_{S_{\rho_i}} = \overrightarrow{O_{\rho_i} O_i}(t) \Big|_{S_{\rho_i}} - \overrightarrow{O_{\rho_i} O_{i+1}}(t) \Big|_{S_{\rho_i}} \quad (3)$$

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (3) y teniendo en cuenta el sistema de ejes móviles en el que se está derivando, obtenemos,

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{r}_{i+1}^i(t) \right|_{S_{\rho_i}} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_{\rho_i} O_i}(t) \right|_{S_{\rho_i}} - \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_{\rho_i} O_{i+1}}(t) \right|_{S_{\rho_i}} \quad (4)$$

Se sabe que en su marco de referencia,

$$\left. \vec{v}_i^i(t) \right|_{S_i} = \begin{pmatrix} v_i(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \vec{v}_{i+1}^i(t) \right|_{S_{i+1}} = \begin{pmatrix} v_{i+1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Se desea tener la representación de los vectores de velocidad $\vec{v}_i^i(t)$ y $\vec{v}_{i+1}^i(t)$ de la ecuación (5) sobre el sistema de ejes móviles S_{ρ_i} , esto se logra por medio de una transformación, que traslada los vectores de velocidad de sus respectivos ejes móviles al sistema de ejes móviles en común S_{ρ_i} como a continuación se define,

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_{\rho_i} O_i}(t) \right|_{S_{\rho_i}} = R^{-1}(\beta_i(t)) \left. \vec{v}_i^i(t) \right|_{S_i} \quad (6)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_{\rho_i} O_{i+1}}(t) \right|_{S_{\rho_i}} = R^{-1}(\phi_{i+1}(t)) \left. \vec{v}_{i+1}^i(t) \right|_{S_{i+1}} \quad (7)$$

donde la matriz de rotación $R(*)$ toma la forma,

$$R(*) = \begin{pmatrix} \cos(*) & -\sin(*) & 0 \\ \sin(*) & \cos(*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Por lo que al sustituir la ecuación (5) en (6) y (7) respectivamente, se obtiene,

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_{\rho_i} O_i}(t) \right|_{S_{\rho_i}} = \begin{pmatrix} v_i(t) \cos \beta_i(t) \\ -v_i(t) \sin \beta_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_{\rho_i} O_{i+1}}(t) \right|_{S_{\rho_i}} = \begin{pmatrix} v_{i+1}(t) \cos \phi_{i+1}(t) \\ -v_{i+1}(t) \sin \phi_{i+1}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Finalmente se calcula el resultado de la ecuación (4),

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{r}_{i+1}^i(t) \right|_{S_{\rho_i}} = \begin{pmatrix} v_i(t) \cos \beta_i(t) - v_{i+1}(t) \cos \phi_{i+1}(t) \\ -v_i(t) \sin \beta_i(t) + v_{i+1}(t) \sin \phi_{i+1}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Es importante observar que la primer ecuación del resultado obtenido en (11) corresponde a la variación con respecto al tiempo de la distancia $\rho_i(t)$.

$$\dot{\rho}_i(t) = v_i(t) \cos(\beta_i(t)) - v_{i+1}(t) \cos(\phi_{i+1}(t)) \quad (12)$$

$\dot{\rho}_i(t)$ es la velocidad con la que varía la separación entre los dos robots, medida desde el centro del robot seguidor hasta el centro del robot líder, también se puede obtener un resultado equivalente partiendo de un sistema global inercial como se presentó en (Paniagua-Contro et al. [2019]). Además, es una ecuación de posición relativa entre los robots R_{i+1} y R_i que cumple con la característica de no depender del sistema global de referencia.

4. MODELO CINEMÁTICO LÍDER-SEGUIDOR EN COORDENADAS CARTESIANAS EN UN SISTEMA DE EJES MÓVILES

Al establecer al robot seguidor R_{i+1} y su sistema de ejes móviles S_{i+1} como el sistema de referencia base para construir un modelo cinemático en coordenadas cartesianas, se propone $\phi_{i+1}(t)$ como el ángulo de orientación del robot seguidor, formado desde el vector de velocidad $\vec{v}_{i+1}^i(t)$ hasta el vector $\vec{\rho}_i^i(t)$ y al ángulo $\beta_i(t)$ como el ángulo de orientación del robot líder, formado desde el vector de velocidad $\vec{v}_i^i(t)$ hasta el vector $\vec{\rho}_i^i(t)$.

La posición del robot líder respecto al sistema de ejes móviles del robot seguidor S_{i+1} , estará definido por ${}^{i+1}x_i(t)$, en la dirección del vector unitario \vec{j}_{i+1} y en la dirección del vector unitario \vec{j}_{i+1} se establecerá ${}^{i+1}y_i(t)$, como se observa en la Figura 3.

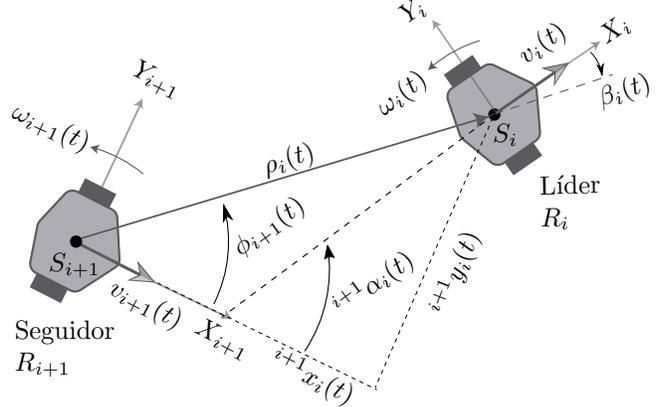


Fig. 3. Esquema líder-seguidor vectorial sobre ejes móviles.

Además se define un estado de orientación para el modelo cinemático cartesiano como la resta de los ángulos $\phi_{i+1}(t)$ y $\beta_i(t)$,

$${}^{i+1}\alpha_i(t) = \phi_{i+1}(t) - \beta_i(t) \quad (13)$$

El vector de estados de posición y orientación del modelo cinemático cartesiano se conforma de las relaciones ${}^{i+1}x_i(t)$, ${}^{i+1}y_i(t)$, y ${}^{i+1}\alpha_i(t)$, donde el superíndice a la izquierda indica el nombre robot seguidor, desde donde se mide el vector de postura relativa y el subíndice denota el nombre del robot líder. Así mismo se le asigna una representación de la siguiente forma,

$${}^{i+1}X_i(t) = \begin{pmatrix} {}^{i+1}x_i(t) \\ {}^{i+1}y_i(t) \\ {}^{i+1}\alpha_i(t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Para continuar, se tendrán en consideración las siguientes suposiciones.

Suposición 1. El robot líder R_i posee velocidad lineal y velocidad angular $[v_i(t), \omega_i(t)]$ acotadas $\forall t$, esto es, $\sup\{v_i(t)\} \leq \bar{v}_i$ y $\sup\{\omega_i(t)\} \leq \bar{\omega}_i$ con $\bar{v}_i(t), \bar{\omega}_i(t) \in \mathbb{R}$.

Suposición 2. El robot seguidor R_{i+1} esta equipado con sensores a bordo que le permiten medir la distancia entre centros de los robots $\rho_i(t)$ y los ángulos de orientación $\beta_i(t)$ y $\phi_{i+1}(t)$ en todo instante de tiempo, esto es $\rho_i(t) \geq 0$ y $[\beta_i(t), \phi_{i+1}(t)] \in [-2\pi, 2\pi] \forall t$. Por lo que las variables de estado del sistema $[{}^{i+1}x_i(t), {}^{i+1}y_i(t), {}^{i+1}\alpha_i(t)]$ están disponibles en todo instante de tiempo.

Analizando el esquema de la Figura 3, se observa que la posición del robot líder referida sobre el sistema de ejes móviles del robot seguidor S_{i+1} , se alcanza mediante la transformación,

$${}^{i+1}P_i(t) = R(\phi_{i+1}(t)) \vec{r}_{i+1}^i(t) \quad (15)$$

donde $R(\phi_{i+1}(t))$ esta dada por la ecuación (8).

Al derivar respecto al tiempo la ecuación (15) y recurriendo a la regla de la cadena se obtiene,

$${}^{i+1}\dot{P}_i(t) = \frac{d}{dt}R(\phi_{i+1}(t))\vec{r}_{i+1}^i(t) + R(\phi_{i+1}(t))\frac{d}{dt}\vec{r}_{i+1}^i(t) \quad (16)$$

Analizando la Figura 3 y considerando la dirección de los ángulos de orientación de los robots, se concluye lo siguiente,

$$\omega_i(t) = -\frac{d}{dt}\beta_i(t) \quad \omega_{i+1}(t) = -\frac{d}{dt}\phi_{i+1}(t) \quad (17)$$

Vectorialmente es posible interpretar la ecuación (16) de la siguiente forma,

$${}^{i+1}\dot{P}_i(t) = R(\phi_{i+1}) \left(\frac{d}{dt}\vec{r}_{i+1}^i - \vec{\omega}_{i+1} \times \vec{r}_{i+1}^i \right) \quad (18)$$

donde $\vec{\omega}_{i+1}(t)$ y $\vec{\omega}_i(t)$ están definidos como,

$$\vec{\omega}_i(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_i(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_{i+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{i+1}(t) \end{pmatrix} \quad (19)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2), (11) y (19) en la ecuación (18), se obtiene la dinámica de posición del robot líder respecto al sistema de ejes móviles del robot seguidor.

$${}^{i+1}\dot{P}_i = \begin{pmatrix} -v_{i+1} + v_i \cos(\phi_{i+1} - \beta_i) + \omega_{i+1}\rho_i \sin \phi_{i+1} \\ v_i \sin(\phi_{i+1} - \beta_i) - \omega_{i+1}\rho_i \cos \phi_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Retomando el estado de orientación ${}^{i+1}\alpha_i(t)$, procedemos a derivar con respecto al tiempo la ecuación (13), obteniendo,

$$\frac{d}{dt}{}^{i+1}\alpha_i(t) = \frac{d}{dt}\phi_{i+1}(t) - \frac{d}{dt}\beta_i(t) \quad (21)$$

Y al sustituir en la ecuación (21) el resultado de derivar con respecto al tiempo los ángulos β_i y ϕ_{i+1} , véase (17), se obtiene,

$${}^{i+1}\dot{\alpha}_i(t) = \omega_i(t) - \omega_{i+1}(t) \quad (22)$$

En conclusión, el modelo cinemático líder-seguidor en coordenadas cartesianas sobre los ejes móviles del robot seguidor ${}^{i+1}\dot{X}_i(t)$ se obtiene utilizando las primeras dos ecuaciones del sistema (20) y la ecuación obtenida en (22), tomando a $\rho_i(t)$, $\phi_{i+1}(t)$ y $\beta_i(t)$ como mediciones obtenidas por los sensores en el robot seguidor, como a continuación se presenta,

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{x}_i(t) &= -v_{i+1}(t) + v_i(t) \cos {}^{i+1}\alpha_i(t) \\ &\quad + \omega_{i+1}(t)\rho_i(t) \sin \phi_{i+1}(t) \\ {}^{i+1}\dot{y}_i(t) &= v_i(t) \sin {}^{i+1}\alpha_i(t) - \omega_{i+1}(t)\rho_i(t) \cos \phi_{i+1}(t) \\ {}^{i+1}\dot{\alpha}_i(t) &= \omega_i(t) - \omega_{i+1}(t) \end{aligned} \quad (23)$$

4.1 Simplificación del modelo cinemático cartesiano sobre ejes móviles

El modelo sobre ejes móviles en coordenadas cartesianas obtenido en el sistema de ecuaciones (23) es dependiente de los tres estados del sistema ${}^{i+1}x_i(t)$, ${}^{i+1}y_i(t)$, ${}^{i+1}\alpha_i(t)$ y además requiere de las mediciones de $\rho_i(t)$ y $\phi_{i+1}(t)$, quedando sin utilizar la medición del ángulo $\beta_i(t)$. Examinando (23) y analizando la Figura 3 encontramos dos relaciones geométricas que permiten reescribir el sistema (23),

$$\begin{aligned} {}^{i+1}x_i(t) &= \rho_i(t) \cos \phi_{i+1}(t) \\ {}^{i+1}y_i(t) &= \rho_i(t) \sin \phi_{i+1}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Al sustituir las referencias anteriores en el sistema de ecuaciones (23) se obtiene un modelo cinemático en coordenadas cartesianas que únicamente depende de los tres estados del sistema ${}^{i+1}x_i(t)$, ${}^{i+1}y_i(t)$ y ${}^{i+1}\alpha_i(t)$,

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{x}_i(t) &= -v_{i+1}(t) + v_i(t) \cos {}^{i+1}\alpha_i(t) + \omega_{i+1}(t) {}^{i+1}y_i(t) \\ {}^{i+1}\dot{y}_i(t) &= v_i(t) \sin {}^{i+1}\alpha_i(t) - \omega_{i+1}(t) {}^{i+1}x_i(t) \\ {}^{i+1}\dot{\alpha}_i(t) &= \omega_i(t) - \omega_{i+1}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

4.2 Relación con el modelo cinemático global

El modelo cinemático convencional (1), implica que las velocidades lineal y angular del sistema de referencia S_o son cero, por lo que sólo el robot móvil esta sometido a velocidad lineal y angular $[v_j(t), \omega_j(t)]$.

Retomando el modelo cinemático en coordenadas cartesianas sobre los ejes móviles del robot seguidor (25) y condicionando al robot seguidor R_{i+1} a permanecer estático, donde $v_{i+1}(t) = 0$ y $\omega_{i+1}(t) = 0 \forall t$, se obtiene,

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{x}_i(t) &= v_i(t) \cos {}^{i+1}\alpha_i(t) \\ {}^{i+1}\dot{y}_i(t) &= v_i(t) \sin {}^{i+1}\alpha_i(t) \\ {}^{i+1}\dot{\alpha}_i(t) &= \omega_i(t) \end{aligned} \quad (26)$$

El resultado de proponer que la velocidad lineal y angular de robot seguidor sean cero, hace coincidir al modelo sobre ejes móviles (25) con el modelo convencional cartesiano en un marco inercial (1).

Se sabe que el modelo matemático de un robot móvil diferencial es un sistema no-holonomo por que las velocidades a lo largo de los ejes coordenados generalizados satisfacen restricciones no integrables (Murray and Sastry [1993], Brockett [1983]), misma restricción que se obtiene de proponer que el robot seguidor permanezca inmóvil. A partir de manipular las primeras dos ecuaciones de (26) se obtiene,

$${}^{i+1}\dot{x}_i(t) \sin ({}^{i+1}\alpha_i(t)) - {}^{i+1}\dot{y}_i(t) \cos ({}^{i+1}\alpha_i(t)) = 0 \quad (27)$$

Al reescribir el resultado anterior, se encuentra la relación existente entre el ángulo $\theta_j(t)$ del modelo cinemático global (1) y el ángulo ${}^{i+1}\alpha_i(t)$, cuando el robot seguidor tiene entradas de control $v_{i+1}(t)$ y $\omega_{i+1}(t)$ cero.

$$\tan ({}^{i+1}\alpha_i(t)) = \frac{{}^{i+1}\dot{y}_i(t)}{{}^{i+1}\dot{x}_i(t)} = \frac{\dot{y}_j(t)}{\dot{x}_j(t)} = \tan(\theta_j(t)) \quad (28)$$

5. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE FORMACIÓN

Resolver el problema de seguimiento de trayectoria en una formación líder-seguidor en el modelo cinemático sobre ejes móviles (25), requiere satisfacer que los estados del sistema tiendan a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

$${}^{i+1}x_i \rightarrow 0 \quad {}^{i+1}y_i \rightarrow 0 \quad {}^{i+1}\alpha_i \rightarrow 0 \quad (29)$$

Cuando se cumple la condición de que los estados han convergido a cero, el robot seguidor ha alcanzado la posición y orientación del robot líder.

A fin de alcanzar convergencia de los estados del sistema (25), se propone usar la siguiente retroalimentación sobre las entradas de control del robot seguidor,

$$\omega_{i+1} = k_{2i} {}^{i+1}\alpha_i + {}^{i+1}y_i v_i \frac{\sin ({}^{i+1}\alpha_i)}{{}^{i+1}\alpha_i} + \omega_i \quad (30)$$

$$v_{i+1} = v_i \cos ({}^{i+1}\alpha_i) + k_{1i} {}^{i+1}x_i$$

para k_{1i} y $k_{2i} > 0$ ganancias del controlador.

5.1 Convergencia de los estados relativos del sistema

Las propiedades de convergencia de los estados (29) al origen del sistema, están dadas por el siguiente lema.

Lema 1. Considere la formación líder-seguidor representada por el modelo (25) y la retroalimentación (30) con $k_{1i}, k_{2i} > 0$ y se asume que se satisfacen las Suposiciones 1 y 2. Entonces, considerando que siempre que $v_i(t)$ o $\omega_i(t)$ sean diferentes de cero $\forall t$, los estados del sistema en lazo cerrado (25)-(30) convergen asintóticamente a cero, siendo el origen un punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado. Equivalentemente, el robot seguidor converge a la postura del robot líder.

Demostración 1.

Para demostrar la convergencia al origen se propone una función candidata de Lyapunov como se presenta a continuación,

$$V_1 = \frac{1}{2} {}^{i+1}\alpha_i^2 + \frac{1}{2} {}^{i+1}y_i^2 + \frac{1}{2} {}^{i+1}x_i^2 \quad (31)$$

Derivando respecto al tiempo la función anterior, se obtiene,

$$\dot{V}_1 = {}^{i+1}\alpha_i {}^{i+1}\dot{\alpha}_i + {}^{i+1}y_i {}^{i+1}\dot{y}_i + {}^{i+1}x_i {}^{i+1}\dot{x}_i \quad (32)$$

Sustituyendo la retroalimentación propuesta en (30) junto con el sistema de ecuaciones (25) en (32) y desarrollando algebraicamente, se tiene que,

$$\dot{V}_1 = -k_{2i} {}^{i+1}\alpha_i^2 - k_{1i} {}^{i+1}x_i^2 \quad (33)$$

Dado que $\dot{V}_1 \leq 0$, el sistema es estable.

Para demostrar la convergencia al origen del sistema (25), note que \dot{V}_1 está acotada, dado que el sistema es estable y se cumplen las Suposiciones 1 y 2; por lo que \dot{V}_1 es uniformemente continua. Considerando el *Lema de Barbalat* Khalil [2002], se tiene que $\dot{V}_1 \rightarrow 0$ y consecuentemente ${}^{i+1}x_i \rightarrow 0$ y ${}^{i+1}\alpha_i \rightarrow 0$.

Considerando la tercera ecuación del sistema (25), tenemos que,

$$0 = -k_{2i} {}^{i+1}\alpha_i - {}^{i+1}y_i v_i \frac{\sin({}^{i+1}\alpha_i)}{{}^{i+1}\alpha_i} \quad (34)$$

Dado que ${}^{i+1}\alpha_i \rightarrow 0$ se tiene que,

$$\lim_{{}^{i+1}\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\sin({}^{i+1}\alpha_i)}{{}^{i+1}\alpha_i} = 1 \quad (35)$$

Entonces (34) resulta,

$${}^{i+1}y_i v_i = 0 \quad (36)$$

donde, dado que $v_i \neq 0$ y es acotado por la Suposición 1, se obtiene la convergencia de ${}^{i+1}y_i(t)$.

Consideré también la primera ecuación en (25), considerando ${}^{i+1}x_i = 0$, ${}^{i+1}\alpha_i = 0$ se obtiene,

$$0 = {}^{i+1}y_i^2 v_i \frac{\sin({}^{i+1}\alpha_i)}{{}^{i+1}\alpha_i} + \omega_i {}^{i+1}y_i \quad (37)$$

esto es,

$${}^{i+1}y_i^2 v_i + \omega_i {}^{i+1}y_i = 0 \quad (38)$$

entonces dado que ${}^{i+1}y_i v_i = 0$ se obtiene,

$$\omega_i {}^{i+1}y_i = 0 \quad (39)$$

con lo cual, si $v_i = 0$ se obtiene que ${}^{i+1}y_i \rightarrow 0$ cuando $\omega_i \neq 0$

La convergencia al origen de ${}^{i+1}x_i$, ${}^{i+1}y_i$ y ${}^{i+1}\alpha_i$ fuerza la convergencia de la postura del robot seguidor a la postura del robot líder.

6. EVALUACIÓN NUMÉRICA

Para la evaluación numérica se considerará el caso particular del problema de seguimiento de trayectoria. Dado que la Suposición 1 establece que el robot líder desarrolla su propia trayectoria por medio de las entradas de control $[v_i(t), \omega_i(t)]$, se propone en esta sección, utilizar las ecuaciones paramétricas de una *Lemniscata de Bernoulli*, generada por las señales de entrada,

$$v_i(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \quad \omega_i(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \quad (40)$$

donde $x(t) = a \sin(2f_\omega t)$, $y(t) = b \cos(f_\omega t)$, con $a = 1\text{m}$, $b = 1.5\text{m}$, $f_\omega = \pi/20$ rad/s.

Observación 1. La simulación numérica se desarrolla en un sistema inercial global, a fin de observar las trayectorias de los robots en el plano X-Y, y se utilizan las medidas relativas para implementar el esquema líder-seguidor de las ecuaciones (25)-(30).

Las condiciones iniciales globales del robot líder son $X_i(0) = [0, 0, 0]^T$ y para el robot seguidor las condiciones iniciales globales son $X_{i+1}(0) = [-0.1, -0.1, -\pi/4]^T$, por lo que las condiciones iniciales del modelo cinemático en coordenadas cartesianas sobre ejes móviles son ${}^{i+1}X_i(0) = [0, 0.1414, -0.7854]^T$, las ganancias del controlador son $k_{1i} = k_{2i} = 1$.

Las trayectorias desarrolladas por cada uno de los robot se presentan en la Figura 4, donde se aprecia que conforme evoluciona el experimento, el robot seguidor converge a la trayectoria que desarrolla el robot líder.

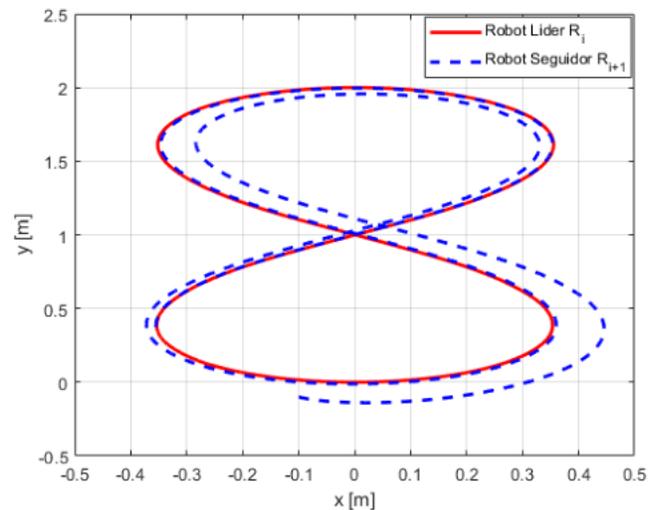


Fig. 4. Trayectoria en el plano descrita por el robot líder y seguidor.

A diferencia del modelo desarrollado sobre un sistema de referencia global, como se presenta en (Infante et al. [2019]) y que utiliza la definición de errores de seguimiento, los estados del modelo sobre ejes móviles (25) son la distancia de separación entre el robot seguidor y el robot líder, así como el ángulo de orientación entre robots, $[{}^{i+1}x_i(t), {}^{i+1}y_i(t), {}^{i+1}\alpha_i(t)]$.

El resultado obtenido de la simulación permite observar una convergencia asintótica de los estados al origen, lo que implica que la distancia entre robots converge a cero, por lo que el robot seguidor alcanza la posición y orientación del robot líder, como se puede observar en la Figura 5.

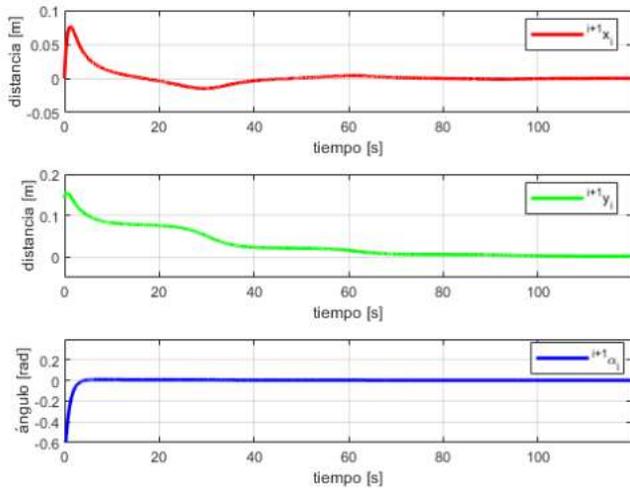


Fig. 5. Estados del modelo cartesiano sobre ejes móviles.

Finalmente las acciones de control del robot seguidor, igualan las acciones de control del robot líder, conforme los estados convergen al origen, lo que se puede ver en la Figura 6.

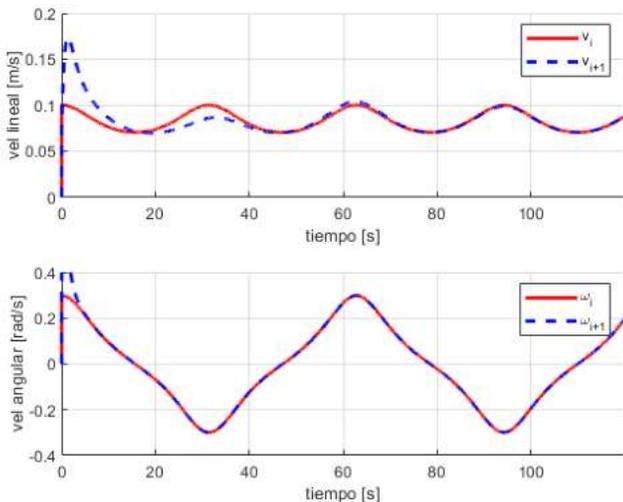


Fig. 6. Entradas de control del robot líder y seguidor.

7. CONCLUSIONES

La metodología presentada en este trabajo para construir un modelo cinemático que no depende de un sistema de referencia global, permite realizar implementaciones sin las restricciones que presenta un modelo global, es decir, basta un sistema de localización local, como pueden ser sensores a bordo de los robots móviles, para tener toda la información necesaria para construir estrategias de formación, por lo que el escenario y/o equipamiento de implementación ya no es una limitante. A diferencia de otros trabajos realizados, en donde la posición y orientación inicial de cada robot, es el origen para implementar odometría o el punto de

referencia para establecer las nuevas posiciones del robot, este modelo no requiere de considerar la posición global de inicio de cada robot para calcular la posición actualizada, lo que evita un error acumulado de la posición.

Nótese que este trabajo puede ser extendido a múltiples robots seguidores, formación líder-seguidor en cadena o formación variante en el tiempo entre robots.

8. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT - México, por su apoyo a través de los proyectos CB-2015-01/254329, CB2017-2018-A1-S-26123 y A1-S-31628.

REFERENCIAS

- R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In *Differential Geometric Control Theory*, pages 181–191. Birkhauser, 1983.
- Raul Dali Cruz-Morales, Martin Velasco-Villa, and Alejandro Rodriguez-Angeles. Chain formation control for a platoon of robots using time-gap separation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 15(2), 2018.
- Carlos Canudas de Wit, Georges Bastin, and Bruno Siciliano. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1st edition, 1996. ISBN 3540760547.
- E. Guizzo. Three engineers, hundreds of robots, one warehouse. *IEEE Spectrum*, 45(7):26–34, 2008.
- Marcos Infante, Raul Cruz-Morales, M. Velasco-Villa, and Alejandro Rodriguez-Ángeles. Formación líder-seguidor para robots diferenciales con parámetros de seguimiento variables. 2019.
- D. Jia, K. Lu, J. Wang, X. Zhang, and X. Shen. A survey on platoon-based vehicular cyber-physical systems. *IEEE Communications Surveys Tutorials*, 18(1):263–284, 2016.
- Hassan K Khalil. *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- A. Loria, J. Dardemir, and N. Alvarez Jarquin. Leader-follower formation and tracking control of mobile robots along straight paths. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(2):727–732, 2016.
- V. Milanés, S. E. Shladover, J. Spring, C. Nowakowski, H. Kawazoe, and M. Nakamura. Cooperative adaptive cruise control in real traffic situations. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(1):296–305, 2014.
- R. M. Murray and S. S. Sastry. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(5):700–716, 1993.
- P. Paniagua-Contro, E. G. Hernandez-Martinez, O. González-Medina, J. González-Sierra, J. J. Flores-Godo, E. D. Ferreira-Vazquez, and G. Fernandez-Anaya. Extension of leader-follower behaviours for wheeled mobile robots in multirobot coordination. *Mathematical Problems in Engineering*, page 16, 2019. doi: <https://doi.org/10.1155/2019/4957259>.
- D. Tilbury, R. M. Murray, and S. Shankar Sastry. Trajectory generation for the n-trailer problem using goursat normal form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):802–819, 1995.
- H. Wang, D. Guo, X. Liang, W. Chen, G. Hu, and K. K. Leang. Adaptive vision-based leader-follower formation control of mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(4):2893–2902, 2017.