

Tracking Control for Differential Mobile Robots With Skidding and Slipping effects

D. García-Olivares, M. Velasco-Villa, R. Castro-Linares

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av.
I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México (e-mail:
diego.garcia, velasco, rcastro @cinvestav.mx).

Abstract: The development of a tracking control for a differential wheeled mobile robot under the effect of skidding and slipping is presented in this paper. The kinematics models of a differential robot with and without disturbances are used to solve the tracking problem. The control scheme proposed is based on backstepping, feedback passivity and sliding modes techniques. Simulations results are showed to prove the effectiveness of the proposed method.

Key words: Skidding, slipping, backstepping, feedback passivity, sliding modes.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la robótica móvil terrestre es un tema ampliamente estudiado y de gran interés debido a sus múltiples aplicaciones prácticas, de carácter militar o exploración espacial, por mencionar algunas. A lo largo de los años, se han desarrollado diversas técnicas de control para llevar a acabo de manera eficiente dichas tareas, tales como control por *backstepping* de Jiang y Nijmeijer [1997], métodos de inteligencia artificial de Boukens et al. [2017], métodos de control adaptable robusto de Xin et al. [2016] y control por modos deslizantes de Huang et al. [2016], entre otros.

Sin embargo, la mayoría de los métodos desarrollados en la literatura no consideran la influencia del deslizamiento lateral y patinado en las ruedas, los cuales son fenómenos inherentes a las condiciones de trabajo de gran parte de las aplicaciones prácticas de los robots móviles con ruedas (RMR).

Un trabajo que trata con las perturbaciones por deslizamiento y patinado es el de Wang y Low [2008], en el que se desarrolla el modelo cinemático de diferentes RMR bajo la influencia de dichos fenómenos. Con este mismo enfoque se tiene el trabajo de Cui et al. [2014], en donde se obtiene el mismo modelo cinemático del RMR diferencial de una manera alternativa.

Para el seguimiento de trayectoria de robots móviles diferenciales sujetos a las perturbaciones externas descritas, se tienen algunas propuestas como es el caso de un control por *backstepping* de Wang y Low [2008], en donde las perturbaciones se consideran conocidas. También, para el mismo propósito, se desarrolló un control adaptable en conjunto con un estimador de perturbaciones basado en un observador por modos deslizantes de Cui et al. [2014].

En este trabajo se presenta una nueva propuesta de control basado en las técnicas de *backstepping*, pasividad por retroalimentación y modos deslizantes. En particular, la técnica por modos deslizantes se emplea para agregar robustez y de esta manera, no considerar que las perturbaciones de deslizamiento y patinado son conocidas.

El presente trabajo se organiza como se describe a continuación. En la Sección 2 se explican brevemente la caracterización matemática de las perturbaciones y el modelo cinemático de un RMR diferencial que las considera. En la Sección 3 se presenta el desarrollo del esquema de control propuesto. Posteriormente, en la Sección 4 se muestran los resultados obtenidos mediante simulación numérica, de la implementación de la propuesta de control desarrollada. Finalmente, la Sección 5 contiene las conclusiones finales de este trabajo.

2. MODELO CINEMÁTICO

El análisis y desarrollo de ésta sección está basado en el trabajo de Cui et al. [2014]. En la Figura 1 se muestra un RMR diferencial con dos marcos de referencia: el marco inercial $X - Y$ y el marco móvil $X_m - Y_m$, cuyo origen está fijo al punto P (ubicado en el centro del eje de las ruedas del robot). Estos marcos se relacionan mediante la matriz $R(\theta)$, dada por,

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector que describe la posición y orientación del RMR en el marco inercial, $X - Y$, es el vector $\xi = [x, y, \theta]$, donde θ se mide con respecto al eje inercial X .

Se consideran las perturbaciones provocadas por el deslizamiento lateral y por el patinado en las ruedas. El deslizamiento lateral altera la dirección del movimiento deseado y, como se observa en la Figura 1, se puede representar con un vector v_y que está en función de lo que se denomina ángulo de patinado lateral δ . Este ángulo se encuentra en el rango $[0, \frac{\pi}{2})$ radianes.

El patinado longitudinal de las ruedas se presenta modificando la magnitud de su velocidad lineal. Se representa como un factor de proporcionalidad dado como,

$$v_L = r\omega_L(1 - i), v_R = r\omega_R(1 - i)$$

donde v_L , v_R y ω_L , ω_R representan las velocidades lineales y angulares de las ruedas izquierda y derecha respectivamente y donde i se encuentra en el rango $[0, 1)$ y r es el radio de las ruedas.

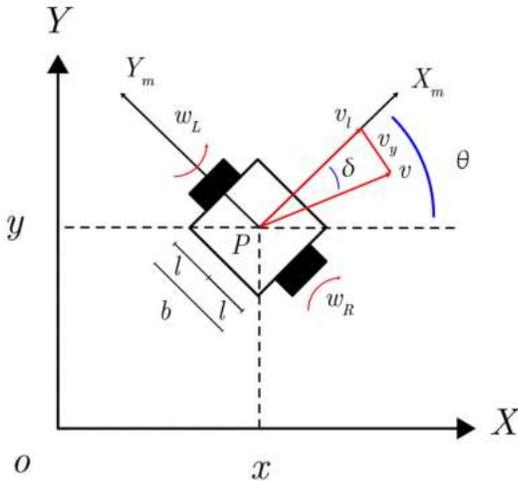


Figura 1. Marcos de referencia en un RMR diferencial.

La relación de las velocidades angulares de cada una de las ruedas del RMR con la velocidad lineal v_l y angular ω del mismo, al incorporar la perturbación por patinado, está descrita por,

$$\begin{bmatrix} v_l \\ \omega \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1-i_L}{2} & \frac{1-i_R}{2} \\ -\frac{(1-i_L)}{b} & \frac{(1-i_R)}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde b es la distancia entre las ruedas. Considerando que las ruedas son iguales y que el robot diferencial es simétrico con respecto a su eje longitudinal es posible considerar que $i_L = i_R = i$.

Nótese a partir de la Figura 1 que sobre los ejes inerciales $X - Y$ se obtiene el modelo cinemático,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos(\theta - \delta), \\ \dot{y} &= v \sin(\theta - \delta), \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos(\delta) \cos(\theta) + v \sin(\delta) \sin(\theta), \\ \dot{y} &= v \cos(\delta) \sin(\theta) - v \sin(\delta) \cos(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \quad (2)$$

De acuerdo a la Figura 1, se observa que se cumplen las relaciones $v \cos(\delta) = v_l$ y $v \sin(\delta) = v_y$. Utilizando estas relaciones, definiendo γ como la perturbación debido al deslizamiento $\gamma = \tan(\delta)$ y por la ecuación (1), suponiendo que la superficie de trabajo es homogénea y las ruedas del RMR son iguales, la ecuación 2 toma la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i) \{ \cos(\theta) + \gamma \sin(\theta) \} & 0 \\ (1-i) \{ \sin(\theta) - \gamma \cos(\theta) \} & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ -\frac{r}{b} & \frac{r}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Definiendo ahora a \bar{v}_l y $\bar{\omega}$ como la velocidad lineal y angular del RMR sin el efecto de patinado, es decir,

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_l \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ -\frac{r}{b} & \frac{r}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} \quad (4)$$

con T siendo una matriz no singular, la ecuación (3) se puede reescribir cómo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i) \{ \cos(\theta) + \gamma \sin(\theta) \} & 0 \\ (1-i) \{ \sin(\theta) - \gamma \cos(\theta) \} & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_l \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

La ecuación (5) representa el modelo cinemático de un RMR diferencial considerando las perturbaciones debido al deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Se introduce la siguiente suposición sobre las perturbaciones i y γ .

Suposición 1. Se asume que la magnitud de las perturbaciones de patinado y deslizamiento lateral están acotadas para todo tiempo en que actúan, esto es, para todo t tal que $t \in [t_1, t_2]$ y $t_1 < t_2$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que, $|i| \leq \eta_i$, $|\gamma| \leq \eta_\gamma$ para η_i, η_γ constantes reales positivas y diferentes de cero.

Debido a que las perturbaciones consideradas no aparecen en todo momento del desplazamiento del vehículo, la suposición anterior permite establecer para \bar{v}_l y $\bar{\omega}$ la suposición complementaria.

Suposición 2. Se supone que en los instantes de aparición de las perturbaciones las velocidades lineal \bar{v}_l y angular $\bar{\omega}$ están acotadas, más precisamente, $|\bar{v}_l| \leq \eta_l$, $|\bar{\omega}| \leq \eta_\omega$ donde η_l y η_ω son números reales positivos conocidos diferentes de cero.

Observación 1. La suposición anterior implica un conocimiento a priori del tamaño de \bar{v}_l y $\bar{\omega}$, lo que es razonable en sistemas como el considerado en este trabajo dado que el robot se mueve en un espacio de trabajo bajo condiciones de velocidad acotadas cuando aparecen las perturbaciones. Condiciones no acotadas de velocidad o de las perturbaciones salen del enfoque de este trabajo.

Es importante enfatizar que los efectos de patinado en las ruedas son debidos principalmente a las fuerzas de fricción existentes en la interacción con el piso mientras que los efectos de deslizamiento lateral del vehículo se deben a un incremento de las fuerzas centrífugas. En este trabajo se utilizan el ángulo y la constante de proporcionalidad que originan dichas fuerzas. Es evidente que ni las fuerzas de fricción o las fuerzas centrífugas son modeladas en este trabajo, por lo que se asume el origen desconocido de las perturbaciones.

3. PROBLEMA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

3.1 Planteamiento del problema

El problema de seguimiento de trayectoria consiste en llevar la posición y orientación del vehículo, $\xi(t)$ a cierto valor deseado $\xi_r(t) = [x_r(t), y_r(t), \theta_r(t)]^T$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para conseguir este propósito, los valores de la trayectoria deseada satisfacen el siguiente modelo virtual,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix}. \quad (6)$$

La ecuación (6) representa el modelo cinemático de un RMR diferencial ideal, donde v_r y ω_r son la velocidad lineal de referencia y la velocidad angular de referencia, respectivamente. Se considera que v_r y ω_r , y sus derivadas con respecto al tiempo \dot{v}_r y $\dot{\omega}_r$ son conocidas y acotadas.

Se considera ahora la transformación de los errores de seguimiento en la forma,

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

cuya derivada temporal junto con las dinámicas originales (5) y (6) permite obtener la dinámica de errores de seguimiento,

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \bar{\omega}y_e + v_r \cos(\theta_e) - \bar{v}_l + f_1 \\ \dot{y}_e &= -\bar{\omega}x_e + v_r \sin(\theta_e) + f_2 \\ \dot{\theta}_e &= \omega_r - \bar{\omega} + f_3 \end{aligned} \quad (8)$$

donde,

$$\begin{aligned} f_1 &= i(\bar{v}_l - \bar{\omega}y_e) \\ f_2 &= i\bar{\omega}x_e + \gamma\bar{v}_l(1 - i) \\ f_3 &= i\bar{\omega} \end{aligned} \quad (9)$$

son términos de perturbación que involucran el deslizamiento lateral y patinado.

Observación 2. El modelo cinemático perturbado (8) tiene la finalidad tan solo de evidenciar los posibles puntos de afectación de los deslizamientos y patinados del vehículo. A lo largo del trabajo se considera que las perturbaciones f_i , $i = 1, 2, 3$ son desconocidas debido a la imposibilidad de medir en tiempo real las perturbaciones originales i, γ .

Considerando las Suposiciones 1, 2 se introduce la siguiente condición sobre estos términos.

Suposición 3. Se supone que los términos de perturbación están acotados, es decir, satisfacen,

$$|f_1| \leq \eta_1, \quad |f_2| \leq \eta_2, \quad |f_3| \leq \eta_3, \quad (10)$$

dónde η_1, η_2 y η_3 son constantes reales positivas diferentes de cero.

3.2 Solución al problema de seguimiento

La metodología utilizada en esta sección está basada en el trabajo de Gallegos-Sanlúcar et al. [2018]. Se tiene como objetivo encontrar las entradas de control \bar{v}_l y $\bar{\omega}$ que logren que $\xi_e(t) = [x_e(t), y_e(t), \theta_e(t)]^T \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Considérese la dinámica de y_e de la ecuación (8) con $f_2 = 0$, es decir,

$$\dot{y}_e = -\bar{\omega}x_e + v_r \sin(\theta_e). \quad (11)$$

Se propone la función de conmutación,

$$s_1 = y_e + k_1 \int_0^t y_e(\tau) d\tau, \quad (12)$$

donde $k_1 > 0 \in \mathbb{R}$. La función de conmutación define la superficie deslizante $s_1 = 0$, en la que $\dot{s}_1 = 0$, esto es,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_1 y_e = 0. \quad (13)$$

La solución de la ecuación diferencial (13) lleva a la conclusión de que $y_e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para asegurar que todas las trayectorias de \dot{y}_e sean atraídas a la superficie deslizante $s_1 = 0$, se hace la asignación basada en Utkin et al. [1990],

$$\dot{s}_1 = F_1(s_1) = -\gamma_1 \text{signo}(s_1), \quad (14)$$

donde $\gamma_1 > 0 \in \mathbb{R}$. De acuerdo a esta asignación, la ecuación (13) se puede reescribir como,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_1 y_e = -\gamma_1 \text{signo}(s_1). \quad (15)$$

Sustituyendo la ecuación (11) en (15) se tiene,

$$-\bar{\omega}x_e + v_r \sin(\theta_e) + k_1 y_e = -\gamma_1 \text{signo}(s_1). \quad (16)$$

Al escoger $\alpha_1 = v_r \sin(\theta_e)$ como una entrada de control virtual, a partir de la ecuación (16) se tiene que,

$$\alpha_1 = -k_1 y_e + \bar{\omega}x_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1). \quad (17)$$

Para el caso en que $f_2 \neq 0$, es posible garantizar la atracción a la superficie $s_1 = 0$. Considérese la función candidata de Lyapunov,

$$V_1 = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (18)$$

la cual es definida positiva. Derivando V_1 con respecto al tiempo y sustituyendo el control virtual (17) en la dinámica $\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_1 y_e$ con $f_2 \neq 0$, se tiene,

$$\dot{V}_1 = -\gamma_1 \text{signo}(s_1) s_1 + f_2 s_1. \quad (19)$$

Tomando en cuenta que $\text{signo}(x)x = |x|$ y suponiendo que la perturbación f_2 cumple (10), se puede mayorar la ecuación (19) de modo que,

$$\dot{V}_1 \leq -\gamma_1 |s_1| + \eta_2 |s_1| = -(\gamma_1 - \eta_2) |s_1|. \quad (20)$$

Escogiendo γ_1 tal que $\gamma_1 > \eta_2$ se tiene que $\dot{V}_1 < 0$ y, por lo tanto, s_1 converge a 0.

Por otro lado, se propone la función,

$$y = v_r \sin(\theta_e) - \alpha_1 \quad (21)$$

como salida del sistema (8). A partir de (17) y (21), la dinámica de y_e en (8) se escribe como,

$$\dot{y}_e = y - k_1 y_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1) + f_2. \quad (22)$$

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (21), se tiene,

$$\dot{y} = \dot{v}_r \sin(\theta_e) + v_r \dot{\theta}_e \cos(\theta_e) - \dot{\alpha}_1, \quad (23)$$

donde,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= -k_1 [y - k_1 y_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1) + f_2] \\ &\quad - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1} [\text{signo}(s_1)] \dot{s}_1 + \dot{\bar{\omega}} x_e \\ &\quad + \bar{\omega} [\bar{\omega} y_e + v_r \cos(\theta_e) - \bar{v}_l + f_1]. \end{aligned}$$

Sustituyendo (22) en (15), la dinámica (23) se puede reescribir de la forma,

$$\dot{y} = \alpha_2 + \bar{\omega} \bar{v}_l + \Delta f \quad (24)$$

donde,

$$\begin{aligned}\alpha_2 = & \dot{v}_r \sin(\theta_e) + v_r(\omega_r - \bar{\omega}) \cos(\theta_e) \\ & + k_1 [y - k_1 y_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1)] \\ & + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1} [\text{signo}(s_1)] [y - \gamma_1 \text{signo}(s_1)] \\ & - \dot{\omega} x_e - \bar{\omega} [\bar{\omega} y_e + v_r \cos(\theta_e)],\end{aligned}$$

y Δf es un término de perturbación dado por,

$$\Delta f = f_3 v_r \cos(\theta_e) + k_1 f_2 + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1} [\text{signo}(s_1)] f_2 - f_1 \bar{\omega}.$$

Es importante observar que, debido a las Suposiciones 1, 2, 5 y de las características del modelo virtual (6), se tiene que Δf está acotada, es decir, Δf satisface

$$|\Delta f| \leq \eta_{\Delta f}$$

donde $\eta_{\Delta f}$ es una constante real positiva diferente de cero.

Se tiene entonces el nuevo sistema dado por,

$$\begin{aligned}\dot{y}_e = & y - k_1 y_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1) + f_2, \\ \dot{y} = & \alpha_2 + \bar{\omega} \bar{v}_l + \Delta f.\end{aligned}\quad (25)$$

Se busca ahora una retroalimentación que haga pasivo al sistema (25) para el caso en que $\Delta f = 0$, es decir, sin términos de perturbación. Se propone la retroalimentación,

$$\bar{v}_l = \frac{1}{\bar{\omega}} (-\alpha_2 + v) \quad (26)$$

donde $\bar{\omega} \neq 0$ y v es una nueva entrada. Entonces el sistema (25) con $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ se reescribe en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{y}_e = & y - k_1 y_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1) \\ \dot{y} = & v.\end{aligned}\quad (27)$$

Se propone ahora la función de almacenamiento,

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} y^2 \quad (28)$$

donde V_1 está dada por (18). La derivada con respecto al tiempo de V_2 es,

$$\dot{V}_2 = s_1 \dot{s}_1 + y \dot{y}.$$

Al sustituir $\dot{s}_1 = y - \text{signo}(s_1)$ y \dot{y} de (27) en \dot{V}_2 , se tiene que,

$$\dot{V}_2 = s_1 [y - \gamma_1 \text{signo}(s_1)] + yv. \quad (29)$$

Definiendo la entrada v como,

$$v = -s_1 + \omega_n, \quad (30)$$

donde ω_n es una nueva entrada, se tiene que,

$$\dot{V}_2 = -\gamma_1 \text{signo}(s_1) s_1 + y \omega_n. \quad (31)$$

Usando otra vez el hecho de que $\text{signo}(x)x = |x|$ se concluye que $\dot{V}_2 \leq y \omega_n$ y por lo tanto, la retroalimentación (26) y (30) hace pasivo al sistema (25) desde la entrada ω_n hasta la salida y , considerando que no hay términos de perturbación ($\Delta f = 0$).

Al sustituir la ecuación (30) en el sistema (27) se obtiene,

$$\begin{aligned}\dot{y}_e = & y - k_1 y_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1), \\ \dot{y} = & -s_1 + \omega_n,\end{aligned}\quad (32)$$

el cual, para un modo deslizante ideal en la superficie $s_1 = 0$ es estado cero observable, haciendo posible asignar una retroalimentación de la forma,

$$\omega_n = -k_2 y \quad (33)$$

donde $k_2 > 0 \in \mathbb{R}$, que logra estabilidad asintótica del sistema (27), como se puede observar en Byrnes et al. [1991].

Es importante observar que al lograr la estabilidad asintótica del sistema (27), $y_e \rightarrow 0$ y $y \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo que implica que, de acuerdo a (21),

$$v_r \sin(\theta_e) \approx \bar{\omega} x_e - \gamma_1 \text{signo}(s_1).$$

Si, además, la dinámica del error de orientación tiende a cero rápidamente, entonces,

$$\bar{\omega} x_e \approx \gamma_1 \text{signo}(s_1).$$

Ya que $\text{signo}(s_1)$ no está definida en $s_1 = 0$, x_e oscilará alrededor de 0 para $\bar{\omega} \neq 0$. Este comportamiento se verifica en las simulaciones numéricas que se describen en la Sección 4.

Para asegurar que se mantenga la propiedad de pasividad para el caso en que $\Delta f \neq 0$, se define una segunda función de conmutación,

$$s_2 = y - \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (34)$$

que define la superficie deslizante $s_2 = 0$. En esta superficie se tiene que $\dot{s}_2 = 0$, esto es,

$$\dot{s}_2 = \dot{y} - v = 0 \quad (35)$$

o, en forma equivalente $\dot{y} = v$.

Una vez que las trayectorias del sistema son atraídas a la superficie $s_2 = 0$, el control (26) (control equivalente) asegura que permanezcan en ella. En esta superficie la señal v dada por (30) hace que el sistema sea pasivo desde la entrada ω_n hasta la salida y . La asignación (33) logra además estabilidad asintótica.

Para asegurar que las trayectorias del sistema sean atraídas a la superficie $s_2 = 0$, se hace la asignación,

$$\dot{s}_2 = F_2(s_2) = -\gamma_2 \text{signo}(s_2), \quad (36)$$

donde $\gamma_2 > 0 \in \mathbb{R}$. Entonces, a partir (35) se tiene que,

$$\dot{y} = v - \gamma_2 \text{signo}(s_2). \quad (37)$$

A partir de esta última expresión y la dinámica de y en (25), con $\Delta f = 0$, se obtiene la señal de control \bar{v}_l dada por,

$$\bar{v}_l = \frac{1}{\bar{\omega}} (-\alpha_2 + v - \gamma_2 \text{signo}(s_2)), \quad (38)$$

donde v está dado por (30). La retroalimentación (38) está restringida a trayectorias para las cuales $\bar{\omega} \neq 0$.

Al igual que para la superficie de deslizamiento $s_1 = 0$, se puede dar una condición de suficiencia para la ganancia γ_2 , en función de la cota de Δf , que asegura la convergencia de la dinámica del sistema (25) a la superficie de deslizamiento $s_2 = 0$.

Teorema 1. Considérese el sistema (25) bajo las Suposiciones 1, 2, 5 y el modelo virtual (6), entonces la retroalimentación (38) asegura que las trayectorias del sistema (25) convergen a la superficie de deslizamiento $s_2 = 0$ con s_2 definida por (34) si γ_2 satisface,

$$\gamma_2 > \eta_{\Delta f}, \quad (39)$$

donde $\eta_{\Delta f}$ es la cota del término de perturbación Δf .

Demostración. Considérese la función candidata de Lyapunov

$$V_{s_2} = \frac{1}{2} s_2^2, \quad (40)$$

la cual es definida positiva. La derivada con respecto al tiempo de V_{s_2} está dada por,

$$\dot{V}_{s_2} = s_2 \dot{s}_2 = s_2 [\dot{y} - v]. \quad (41)$$

Sustituyendo la dinámica de y en el sistema (25) con $\Delta f \neq 0$, se tiene que,

$$\dot{V}_{s_2} = s_2 [\alpha_2 + \bar{\omega} \bar{v}_l + \Delta f - v]. \quad (42)$$

Al sustituir la retroalimentación (38) en (42) se tiene que,

$$\dot{V}_{s_2} = -\gamma_2 \text{signo}(s_2) s_2 + \Delta f s_2. \quad (43)$$

Mayorando esta última expresión se obtiene,

$$\dot{V}_{s_2} = -(\gamma_2 - \eta_{\Delta f}) |s_2|. \quad (44)$$

Entonces, si la condición (39) se cumple $\dot{V}_{s_2} < 0$ y se tiene la convergencia de s_2 a 0.

Para el control de orientación, se utiliza la dinámica $\dot{\theta}_e$ de la ecuación (8) de la forma,

$$\dot{\theta}_e = f_3 + \omega_r - \bar{\omega} \quad (45)$$

Se busca llevar la ecuación (45) a la forma $\dot{\theta}_e = -k_3 \theta_e$ donde $k_3 > 0 \in \mathbb{R}$. Para tal propósito se necesita una entrada de control $\bar{\omega}$ tal que,

$$\bar{\omega} = \hat{f}_3 + \omega_r + k_3 \theta_e \quad (46)$$

donde \hat{f}_3 es un estimado del valor real f_3 . Para obtener la estimación \hat{f}_3 se propone un vector de estados de la forma $z = [f \theta_e, \theta_e, f_3]^T$ que tiene la dinámica,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} h \quad (47)$$

donde h es una incertidumbre externa, $u = -\bar{\omega}$ es el control y $y_{ob} = z_2$ es la salida. Se propone un observador basado en Gao [2006],

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} (y_{ob} - \hat{y}_{ob}) \quad (48)$$

donde $L = [L_1, L_2, L_3]^T$ son ganancias constantes. Con el observador (48) se obtiene la estimación $\hat{z}_3 = \hat{f}_3$ y se puede implementar la retroalimentación (46).

Observación 3. Para la realización de los experimentos es necesario tener en cuenta que las perturbaciones de patinado y deslizamiento dependen fundamentalmente de las fuerzas de fricción existentes entre las ruedas y la superficie de trabajo y no dependen directamente de las velocidades del vehículo acentuando su naturaleza desconocida. en general existen grandes periodos de tiempo en los que las perturbaciones no están presentes.

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para realizar la evaluación del desempeño del controlador desarrollado se utilizó una trayectoria descrita a partir de, $x_r = b \cos(kpt) \cos(pt) + x_0$, $y_r = b \cos(kpt) \sin(pt) + y_0$, con los parámetros $b = 1$, $k = 3$, $p = \frac{\pi}{100}$ y $x_0 = y_0 = 1$. La velocidad lineal y angular de referencia se obtuvieron a partir de $v_r = \dot{x}_r \cos(\theta_r) + \dot{y}_r \sin(\theta_r)$ y $\omega_r = \frac{\dot{x}_r \ddot{y}_r - \dot{y}_r \ddot{x}_r}{v_r^2}$.

Se considera el modelo cinemático de la ecuación (5). Para el control se consideran $k_1 = 1 \times 10^{-5}$, $k_2 = 1 \times 10^{-4}$, $k_3 = 2$, $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 1 \times 10^{-5}$ y $L_1 = L_2 = L_3 = 1$.

Las perturbaciones se consideraron como funciones variantes en el tiempo tal que $\delta = \frac{3}{2} \omega_r(x_r, y_r)$ e $i = \frac{21}{10} v_r(x_r, y_r)$. Se introducen en la simulación en un período de $t_1 = 70s$ a $t_2 = 130s$. Éstas se muestran en la Figura 2.

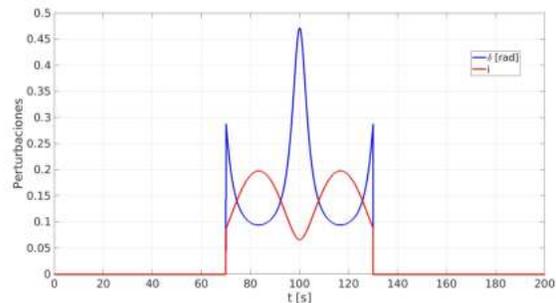


Figura 2. Perturbaciones con respecto al tiempo.

En la Figura 3 se muestran las gráficas de la evolución de las coordenadas de error $\xi_e = [x_e, y_e, \theta_e]^T$ con

6. CONCLUSIONES

respecto al tiempo, observándose la convergencia al origen cuando las perturbaciones no están presentes en el sistema. En el periodo de tiempo entre $t_1 = 70s$ y $t_2 = 130s$, cuando se introducen las perturbaciones, se puede apreciar el efecto de las mismas en el estado, sin embargo rápidamente se retoma la convergencia a cero. Debido a que normalmente las perturbaciones no están presentes para todo t , se puede lograr un resultado aceptable como se muestra en la Figura 4 donde se puede observar el movimiento del RMR en el marco inercial $X-Y$ y puede apreciarse la convergencia a la trayectoria deseada.

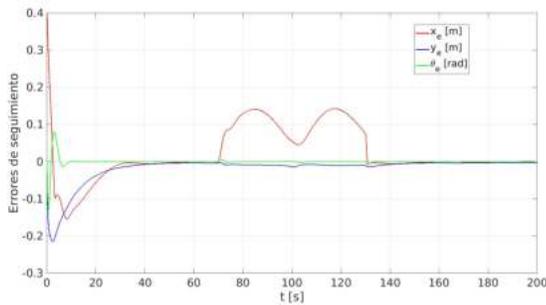


Figura 3. Errores de seguimiento con respecto al tiempo.

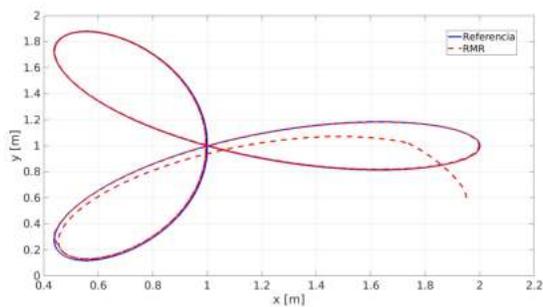


Figura 4. Posición en X-Y del RMR.

En la Figura 5 se muestran las señales de control $\bar{\omega}$ y \bar{v}_l . Se puede apreciar un efecto de saturación provocado por la limitación de la magnitud de las mismas que se pueda presentar en aplicaciones prácticas.

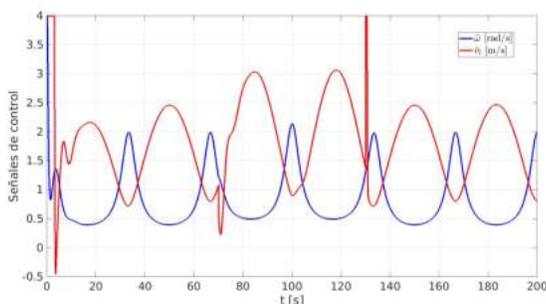


Figura 5. Señales de control con respecto al tiempo.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT - México, por su apoyo a través del proyecto A1-S-31628.

Este trabajo presenta el desarrollo de un esquema de control basado en técnicas de *backstepping*, pasivación por retroalimentación y modos deslizantes, para el seguimiento de trayectorias de un robot diferencial bajo perturbaciones ocasionadas por deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Mediante los resultados obtenidos por simulación numérica, se muestra un correcto desempeño de la retroalimentación propuesta. Por medio de la técnica de modos deslizantes se obtiene robustez descartando la necesidad de conocer de manera exacta el valor de las perturbaciones que afectan al sistema.

REFERENCIAS

- Jiang, Z.P., y Nijmeijer, H. (1997). Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping. *Automatica*, 33, 1393–1399.
- Boukens, M., Boukabou, A., y Chadli, M. (2017). Robust adaptive neural network-based trajectory tracking control approach for nonholonomic electrically driven mobile robots. *Robotics & Autonomous Systems*, 92, 30–40.
- Xin, L., Wang, Q., She, J., y Li, J. (2016). Robust adaptive tracking control of wheeled mobile robots. *Robotics & Autonomous Systems*, 78, 36–48.
- Huang, D., Zhai, J., Ai, W., y Fei, S. (2016). Disturbance observer-based robust control for trajectory tracking of wheeled mobile robots. *Neurocomputing*, 198, 74–79.
- Wang, D., y Low, C. (2008). Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: control design perspective. *IEEE Transactions on Robotics*, 24, 676–697.
- Cui, M., Huang, R., Liu, H., Liu, X., y Sun, D. (2014). Adaptive tracking control of wheeled mobile robots with unknown longitudinal and lateral slipping parameters. *Nonlinear Dynamics*, 78, 1811–1826.
- Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., y Noguchi, T. (1990). A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. En *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Gallegos-Sanlúcar, J.D., Castro-Linares, R., Velasco-Villa, M. (2018) Control de formacion lider seguidor robusto de un conjunto de robots móviles diferenciales. En *Congreso Mexicano de Robótica*.
- Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (1999) *Sliding mode control in electromechanical systems*. CRC Press.
- Byrnes, C.I., Isidori, A., Willems, J.C. (1991) Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 1228–1240
- Gao, Z. (2006) Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design. En *American Control Conference*