

# Output-feedback Control for Finite-Time Trajectory-Tracking in Robot Manipulators<sup>\*</sup>

Emmanuel Cruz-Zavala<sup>\*</sup>, Emmanuel Nuño<sup>\*</sup>,  
Carlos I. Aldana<sup>\*</sup>, Jaime A. Moreno<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Departamento de Ciencias Computacionales, CUCEI, Universidad de Guadalajara (UdG), Guadalajara, Jalisco, Mexico.*

<sup>\*\*</sup> *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad de México, Mexico.*

---

Resumen: In this paper we propose an output-feedback scheme for the trajectory-tracking in finite-time of robot manipulators. The proposed continuous dynamic controller ensures global uniform finite-time stabilization of the tracking error if the reference to follow varies slowly over time. The stability conclusions are established designing novel strict Lyapunov functions.

*Keywords:* Finite-time trajectory-tracking, Output-feedback Control, Robot Manipulators, Lyapunov Methods.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El control de movimiento o de seguimiento de trayectorias es uno de los objetivos fundamentales en las aplicaciones de robots. El controlador debe diseñarse de manera que el robot manipulador siga cierta trayectoria deseada, cuando el robot no interactúa con el entorno (Kelly et al., 2005). Básicamente, el problema de seguimiento se ha resuelto utilizando dos perspectivas de control diferentes: los esquemas adaptables (Slotine y Li, 2001; Spong y Ortega, 1990) y los no adaptables (Kawamura et al., 1988; Paden y Panja, 1988; Wen, 1990; Kelly y Salgado, 1994). En ambos casos, se incluye un término proporcional-derivativo (PD) en el controlador, junto con una compensación dinámica (adaptable) o una parte dinámica de adelanto. Otros esquemas de control que requieren de la disponibilidad del conjunto completo de parámetros y de estados son considerados en (Santibañez y Kelly, 2001; Aguiñaga Ruiz et al., 2009).

Recientemente el problema de seguimiento de trayectorias en Tiempo Finito (TF) ha recibido un interés considerable. Para el control de robots las propiedades de convergencia en TF dan lugar a respuestas transitorias rápidas y de alta precisión, mientras que los errores de seguimiento se hacen cero en un tiempo finito (Venkataraman y Gulati, 1993). El conocido control por modos deslizantes terminales (MDT) se ha aplicado ampliamente para seguimiento en TF para robots manipuladores de eslabones rígidos cuando hay incertidumbres (Tang, 1998; Feng et al., 2002). Estos controladores inducen vibraciones no deseadas en la implementación práctica, ya que la ley de control se formula con funciones discontinuas tipo signo. Con el fin de reducir el posible *castañeo* (*chattering*) del esquema de MDT, se han adoptado otras perspectivas.

Por ejemplo, Yu et al. (2005) propuso un control continuo por MDT para tareas de seguimiento en robots manipuladores. Como alternativa, Zamora-Gómez et al. (2020) formuló un control continuo con pares acotados para seguimiento en TF. Sin embargo, todas las propuestas anteriores requieren de las mediciones de posición y velocidad.

Muchos de los dispositivos disponibles comercialmente no están equipados con sensores de velocidad y, aquellos que disponen de tales sensores, a menudo son propensos al ruido. Esto exige un proceso adicional de filtrado de la velocidad (Loría, 2016). Los trabajos de (Feng y Postlethwaite, 1993; Santibañez y Kelly, 1997; Cruz-Zavala et al., 2017) y de (Romero et al., 2015; Loría, 2016) resuelven de manera asintótica los problemas de seguimiento y regulación de trayectorias sin utilizar mediciones de velocidad. Estos resultados emplean observadores de velocidad o filtros de velocidad. La mayoría de los observadores de velocidad requieren un conocimiento completo de la dinámica del sistema. En (Hong et al., 2002) se propone un observador de velocidad que asegura estabilidad semi-global en TF. En (Zamora-Gómez et al., 2017) se propone un control continuo global de TF por retroalimentación de salida que no emplea un observador para resolver las tareas de regulación. Sin embargo, las ideas de (Zamora-Gómez et al., 2017) no han sido extendidas al problema de seguimiento en TF sin mediciones de velocidad.

La *principal contribución* de este trabajo es el diseño de un esquema de seguimiento de trayectorias por retroalimentación de salida para robots manipuladores, garantizando la estabilidad global uniforme y en TF. Esto se demuestra mediante una función de Lyapunov (FL) estricta.

---

<sup>\*</sup> Este trabajo ha sido financiado por CONACyT proyecto CB-282807 y UNAM-PAPIIT IN110719.

## 2. PREÁMBULO

*Notación.*  $\mathbb{N}$  es el conjunto de números naturales y  $\bar{n} := \{1, 2, \dots, n\}$ .  $\mathbb{R}$  es el conjunto de números reales,  $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ,  $\mathbb{R}_{> 0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . Denotamos por  $\mathbf{A} \succ 0$  a la matriz  $\mathbf{A}$  que es definida positiva, así como  $\underline{\lambda}\{\mathbf{A}\}$  y  $\bar{\lambda}\{\mathbf{A}\}$  definen el valor propio más pequeño y más grande de la matriz simétrica  $\mathbf{A} \succ 0$ , cuya norma inducida es  $\|\mathbf{A}\| := \sqrt{\bar{\lambda}\{\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\}}$ . La norma Euclidiana del vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se define por  $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$ . Denotamos con  $\mathbf{0}$  el origen de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $n \times n$ .  $\mathcal{B}_\delta \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$  es la bola abierta de radio  $\delta > 0$  centrada en el origen  $\mathbf{0}$ . Una función  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}^m$  es de clase  $\mathcal{C}^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , si sus derivadas  $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, \dots, \mathbf{f}^{(k)}$  existen y son continuas. Si  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  es  $\mathcal{C}^1$ , entonces  $\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) = [\partial_{x_1} V(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} V(\mathbf{x})]^\top$ , con  $\partial_{x_i} := \partial/\partial x_i$  para cada  $i \in \bar{n}$ , y  $V \succ 0$  significa que esta función es definida positiva (d.p.). Finalmente, para cualquier  $z \in \mathbb{R}$  y cualquier  $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , el símbolo  $[z]^m \triangleq |z|^m \text{sign}(z)$  representa la potencia signada  $m$  de  $z$ . Para un vector  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ ,  $[\cdot]^m$  se aplica elemento a elemento, es decir,  $[\mathbf{z}]^m := [[z_1]^m, \dots, [z_m]^m]^\top$ . Así mismo, las funciones de saturación y tangente hiperbólica vectoriales están dadas por  $\text{sat}(\mathbf{z}) := [\text{sat}(z_1), \dots, \text{sat}(z_n)]^\top$  y  $\tanh(\mathbf{z}) \triangleq [\tanh(z_1), \dots, \tanh(z_n)]^\top$ .

### 2.1 Estabilidad Uniforme en Tiempo Finito

Considere el sistema dinámico descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  define el vector de estados y  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un campo vectorial continuo, local y uniformemente acotado en el tiempo. Suponga que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio, es decir,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  para todo  $t \geq 0$ .

*Definición 1.* (Moulay y Perruquetti, 2008). El punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es Uniformemente Estable en TF (UETF) si: (i) es Uniforme y Asintóticamente Estable (UAE); (ii) existe una función acotada localmente  $T : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (función de tiempo de asentamiento) tal que para toda  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$  la solución  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  para toda  $t \geq t_0 + T(t, \mathbf{x}_0)$ ; y (iii) existe una función continua p.d.  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que  $T(t, \mathbf{x}_0) \leq \alpha(\|\mathbf{x}_0\|)$ . Adicionalmente, si  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es globalmente UETF.  $\triangleleft$

La estabilidad asintótica global y uniforme puede probarse mediante el método directo de Lyapunov.

*Proposición 1.* Considere el sistema (1). Suponga que existe una función continua  $\mathcal{C}^1$   $\mathcal{W} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{B}_\delta \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que para todo  $t \geq 0$  y toda  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\delta$ : (i)  $\mathcal{W}(t, \mathbf{x})$  es d.p. y decreciente, es decir, existen dos funciones continuas definidas positivas  $w_1(\mathbf{x})$  y  $w_2(\mathbf{x})$  tal que  $0 < w_1(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}(t, \mathbf{x}) \leq w_2(\mathbf{x})$ ; y (ii) existe una función continua d.p.  $w_3(\mathbf{x})$  tal que  $\partial_t \mathcal{W}(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{W}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -w_3(\mathbf{x})$ . Entonces, el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  del sistema (1) es UAE. Además, si  $w_1(\mathbf{x})$  es radialmente no acotada, el origen es globalmente UAE (GUAE).  $\triangleleft$

Una consecuencia de la Definición 1 es que el origen de (1) es globalmente UETF si es GUAE y UETF (Moulay

y Perruquetti, 2008). Además, según (Moulay y Perruquetti, 2008), la estabilidad uniforme en TF se puede caracterizar utilizando una FL estricta. Análogamente, existen caracterizaciones de estabilidad de TF para sistemas invariantes en el tiempo, ver (Hong et al., 2002).

*Lema 1.* Sea  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un punto de equilibrio de (1). Si existe  $\mu \in \mathbb{R}_{> 0}$ ,  $p \in (0, 1)$  y una función de Lyapunov  $\mathcal{W}(t, \mathbf{x})$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , decreciente y d.p. tal que  $\dot{\mathcal{W}}(t, \mathbf{x}) \leq -\mu \mathcal{W}^p(t, \mathbf{x})$ , entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es UETF.

### 2.2 Modelo del robot manipulador y objetivo de control

Considere un robot manipulador serial de eslabones rígidos de  $n$  articulaciones de revolución descrito por

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

dónde  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de posición, de velocidad y de aceleración;  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representa los efectos de Coriolis y centrífugos (esta matriz está definida con los símbolos de Christoffel de primera clase);  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitacionales;  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el par de control y  $\mathbf{F}\dot{\mathbf{q}}$  es la fricción viscosa en las articulaciones del robot. Propiedades fundamentales de (2) son (Kelly et al., 2005):

**P1:** La matriz de inercia  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  está acotada por arriba y por abajo, es decir,  $0 \prec m_1 \mathbf{I} \preceq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \preceq m_2 \mathbf{I} \prec \infty$ , para toda  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y algunas constantes  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{> 0}$ .

**P2:** Las matrices de Coriolis y de inercia están relacionadas por  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Entonces,  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es una matriz anti-simétrica.

**P3:** Los torques debidos a Coriolis satisfacen  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq L_c \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ , para alguna constante  $L_c \in \mathbb{R}_{> 0}$  y para toda  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

**P4:** El vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es globalmente Lipschitz y acotado para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , es decir, existen constantes conocidas  $L_g, \bar{g} \in \mathbb{R}_{> 0}$  tales que  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq L_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , para toda  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , y  $\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq \bar{g}$ , para toda  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . De forma equivalente, para toda  $\mathbf{q}$  cada elemento de  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  satisface  $\sup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \{|g_i(\mathbf{q})|\} \leq \bar{g}_i$ , para algunas constantes  $\bar{g}_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $i \in \bar{n}$ .  $\triangleleft$

La trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$  y la matriz  $\mathbf{F}$  satisfacen lo siguiente:

*Suposición 1.*  $\mathbf{q}_d(t) \in \mathcal{C}^2$  y existen constantes  $v_d, a_d > 0$ , tales que  $\|\dot{\mathbf{q}}_d(t)\| \leq v_d$  y  $\|\ddot{\mathbf{q}}_d(t)\| \leq a_d$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  $\square$

*Suposición 2.* La matriz  $\mathbf{F}$  es simétrica d.p., es decir,  $\lambda\{\mathbf{F}\} \|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}^\top \mathbf{F} \mathbf{x} \leq \bar{\lambda}\{\mathbf{F}\} \|\mathbf{x}\|$ , para toda  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

El problema de control de *Seguimiento en Tiempo Finito por Retroalimentación de Salida (S-TF-RS)* es el siguiente: Suponga que se cumple la Suposición 1, diseñar para el sistema (2) una ley de control  $\boldsymbol{\tau}$ , tal que para cualquier condición inicial  $y$ , sin usar mediciones de velocidad, la posición del robot  $\mathbf{q}(t)$  siga la trayectoria deseada dada  $\mathbf{q}_d(t)$  con error cero después de un TF, es decir, el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d(t)$  y el error de velocidad  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d(t)$  satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow T} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow T} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{0}, \quad \forall (\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

### 3. RESULTADO PRINCIPAL

Considere el siguiente controlador

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_{PD} + \boldsymbol{\tau}_{FF}, \\ \boldsymbol{\tau}_{FF} &= \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}}_d,\end{aligned}\quad (3)$$

con una compensación por adelantado  $\boldsymbol{\tau}_{FF}$  y un término tipo PD no-lineal

$$\boldsymbol{\tau}_{PD} = -\mathbf{P}[\text{sat}(\tilde{\mathbf{q}})]^{\frac{2-r_1}{r_1}} - \mathbf{D}[\boldsymbol{\vartheta}]^{\frac{2-r_1}{r_1}}, \quad (4)$$

donde  $\boldsymbol{\vartheta}$  es la salida del siguiente filtro de primer orden

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}[\boldsymbol{\vartheta}]^{\frac{1}{r_1}}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{q}}. \quad (5)$$

Las matrices definidas positivas  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  son las ganancias a diseñar. La ecuación dinámica de lazo cerrado se obtiene reemplazando la acción de control (3) en el modelo dinámico del robot manipulador (2). Usando el vector de estados  $\mathbf{x}_q^\top := [\tilde{\mathbf{q}}^\top, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top, \boldsymbol{\vartheta}^\top] \in \mathbb{R}^{3n}$  el sistema queda

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \boldsymbol{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left( \boldsymbol{\tau}_{PD} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{h}}(\cdot) - \mathbf{F}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) \\ -\mathbf{A}[\boldsymbol{\vartheta}]^{1/r_1} + \mathbf{B}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(\cdot) \triangleq [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)]\dot{\mathbf{q}}_d,$$

donde  $\|\tilde{\mathbf{h}}(\cdot)\| \leq k_{h1}\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$  para toda  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ , con  $k_{h1} \geq L_c v_d$ .

*Teorema 1.* Para el sistema (2) considere que las Suposiciones 1 y 2 se cumplen y que  $\lambda\{\mathbf{F}\} > k_{h1}$ . Elija  $r_1$  tal que  $2 > r_1 > 1$ . Entonces la ley de control (3)-(5) logra que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_q = \mathbf{0}$  sea globalmente UETF para cualesquiera matrices de ganancia definidas positivas y diagonales  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ .  $\square$

Este resultado establece que la convergencia uniforme y global de las soluciones del sistema de lazo cerrado  $\mathbf{q}(t)$  hacia el vector de trayectorias deseado  $\mathbf{q}_d(t)$  está garantizada en tiempo finito. Esto se satisface para referencias deseadas que sean suficientemente lentas, de tal forma que se cumpla  $\lambda\{\mathbf{F}\} > k_{h1} \geq L_c v_d$ .

### 4. EJEMPLO ACADÉMICO

Se proporciona una simulación para un manipulador de dos grados de libertad con articulaciones de revolución con matrices de inercia, fricción y Coriolis dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \delta_1 + 2\delta_2 c_2 & * \\ \delta_3 + \delta_2 c_2 & \delta_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.3 & * \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -\delta_2 s_2 \dot{q}_2 & -\delta_2 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \delta_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Las componentes del vector de gravedad son  $g_1(\mathbf{q}) = \frac{1}{l_2} g \delta_3 c_{12} + \frac{g}{l_1} (\delta_1 - \delta_3) c_1$  y  $g_2(\mathbf{q}) = \frac{1}{l_2} g \delta_3 c_{12}$ , donde  $\delta_1 := l_2^2 m_2 + l_1^2 (m_1 + m_2)$ ,  $\delta_2 := l_1 l_2 m_2$  y  $\delta_3 := l_2^2 m_2$ . Los símbolos  $c_2$ ,  $s_2$  y  $c_{12}$  denotan  $\cos(q_2)$ ,  $\sin(q_2)$  y  $\cos(q_1 + q_2)$ , respectivamente. Mientras,  $l_i$  y  $m_i$  son las respectivas longitudes y masas de cada eslabón  $i \in \{1, 2\}$ . Además, considere que los parámetros nominales son  $m_1 = 3.2\text{kg}$ ,  $m_2 = 1.6\text{kg}$ ,  $l_1 = 0.24\text{m}$  y  $l_2 = 0.16\text{m}$ . La trayectoria deseada de posición y las condiciones iniciales son  $\mathbf{q}_d = [-2 + 0.2 \sin(0.5t), 3 + 0.5 \cos(0.8t)]^\top$  y  $\mathbf{q}(0) = \dot{\mathbf{q}}(0) = [0, 0]^\top$ . Para la simulación se utiliza un tiempo de muestreo  $t_s = 0.001$  [s] y el método de integración

de Euler con paso fijo. Del modelo nominal se tiene que  $L_c = 0.246\text{kgm}^2$  (ver Kelly et al. (2005) para el cálculo de  $L_c$ ) y  $v_d = 0.42\text{ms}^{-1}$ . Por simplicidad, se considera que  $\lambda\{\mathbf{P}\} = \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\} = 3$ ,  $\lambda\{\mathbf{D}\} = \bar{\lambda}\{\mathbf{D}\} = 1$ ,  $\lambda\{\mathbf{A}\} = \bar{\lambda}\{\mathbf{A}\} = 2$  y  $\lambda\{\mathbf{B}\} = \bar{\lambda}\{\mathbf{B}\} = 1$ . Se simula el controlador (4) con: **C1**:  $r_1 = 1.01$ ; y **C2**:  $r_1 = 1.5$ .

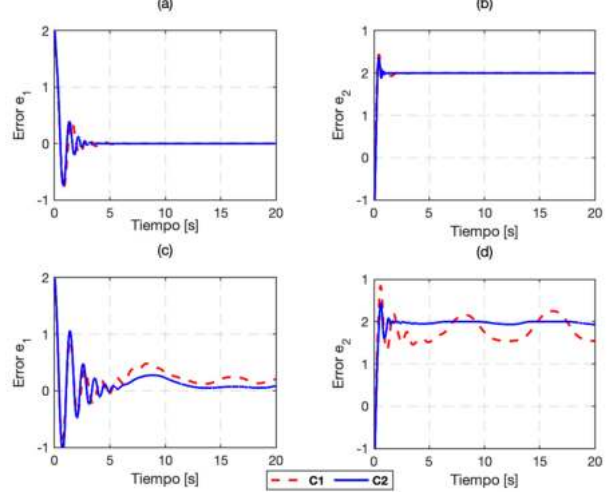


Figura 1. Resultados de Simulación. Las gráficas (a)-(b) muestran los errores en el caso nominal. Las gráficas (c)-(d) muestran los errores en el caso con incertidumbre.

La figura 1.(a)-(b) muestra los errores entre las trayectorias de posición real y deseada de los eslabones, suponiendo que los parámetros del robot son los parámetros nominales. Mientras que la Figura 1. (c)-(d) muestra los errores entre las trayectorias de posición real y deseada en los eslabones cuando los parámetros reales del robot son  $m_1 = 4\text{kg}$ ,  $m_2 = 2\text{kg}$ ,  $l_1 = 0.3\text{m}$  y  $l_2 = 0.2\text{m}$ . Es decir, hay un 20% de incertidumbre con respecto al modelo nominal. En el primer caso, ambos controladores presentan desempeños similares. En el segundo caso, el controlador **C1** proporciona un error de estado estable más grande, que no es aceptable en tareas de seguimiento de control de alta precisión. En el caso incierto, el esquema propuesto **C2** proporciona un menor error de estado estable que **C1**.

### 5. CONCLUSIONES

Este artículo propone un primer intento en la solución del problema de seguimiento en tiempo finito en robots manipuladores sin utilizar mediciones de velocidad. En contraste con algunos resultados reportados, se emplea un filtro en lugar de un observador. Todas las pruebas de estabilidad se llevan a cabo utilizando una función de Lyapunov estricta. Ésto permitirá hacer un análisis de robustez que se reportará en otro lugar.

#### Apéndice A. PRUEBA DEL TEOREMA 1

Considere el vector  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , entonces

**T1:**  $\|\tanh(\mathbf{z})\| \leq \sqrt{n}$  y  $\|\tanh(\mathbf{z})\| \leq \|\mathbf{z}\|$ . Además,  $\|\tanh(\mathbf{z})\| \leq n^{\frac{1-\alpha}{2}} \|\tanh(\mathbf{z})\|^\alpha \leq n^{\frac{1-\alpha}{2}} \|\mathbf{z}\|^\alpha$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

**T2:**  $\partial_{\mathbf{z}} \tanh(\mathbf{z}) = \text{diag}\{\text{sech}^2(z_i)\}_{i=1}^n := \text{Sech}^2(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$   
 $\forall \|\text{Sech}^2(\mathbf{z})\| \leq 1$ .

**P5:** Para todo  $z \in \mathbb{R}$  y cualquier  $p \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $[\text{sat}(z)]^p = \text{sat}(\lceil z \rceil^p)$  y  $\int_0^z \text{sat}(\lceil x \rceil^p) dx = s(z, p)$ , donde

$$s(z, p) := \begin{cases} \frac{1}{p+1} |z|^{p+1} & \text{if } |z| < 1, \\ |z| - \frac{p}{p+1} & \text{if } |z| \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

**P6:** Para todo  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{|k_t \text{sat}(z)|^{p+1}}{p+1} \leq \frac{|\tanh(z)|^{p+1}}{p+1} \leq \frac{|\text{sat}(z)|^{p+1}}{p+1} \leq s(z, p+1)$ , siendo  $k_t = \tanh(1)$ .  $\triangleleft$

**P7:** Para todo  $z \in \mathbb{R}$  y cualquier  $p \in [0, 1]$ ,  $\ln |\cosh(z)| \leq |z|^{p+1}/(1+p)$ .  $\triangleleft$

Los siguientes lemas son clave en nuestro análisis.

*Lema 2.* (Bernstein, 2009) Para cualquier  $z \in \mathbb{R}^n$ , las siguientes desigualdades se cumplen: (i)  $\|\mathbf{z}\|^{2\alpha} \leq \sum_{i=1}^n (|z_i|^2)^\alpha \leq n^{1-\alpha} \|\mathbf{z}\|^{2\alpha}$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ ; y (ii)  $\|\mathbf{z}\|^{1+\alpha} \leq \sum_{i=1}^n (|z_i|^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq n^{\frac{1+\alpha}{2}} \|\mathbf{z}\|^{1+\alpha}$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .  $\triangle$

*Lema 3.* Para cada  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $a, b, c, d, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ , la función  $v_1(x, y) \triangleq v_0^{\frac{r_1+1}{2}}(x, y) - dc|x||y|$ , con  $v_0(x, y) := a|y|^2 + b|x|^{\frac{2}{r_1}}$ , es no-negativa si y sólo si  $d^2 \leq \frac{a}{c^2} \frac{r_1+1}{1} \left[ b \frac{r_1+1}{r_1} \right]^{\frac{r_1}{r_1+1}}$

Además,  $v_1(x, y) \leq 2v_0^{\frac{r_1+1}{2}}(x, y)$ .  $\triangle$

*Lema 4.* Para toda  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $a, b, c, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $c > b > a$  y  $\beta_1 \leq \bar{\beta}_1(\beta_2, \beta_3, a, b, c) = \left( \frac{(b-a)\beta_2}{(c-a)\beta_3} \right)^{-\frac{b-a}{c-a}} \frac{(c-a)\beta_2}{c-b}$ , se cumple que  $\beta_1 x^b \leq \beta_2 x^a + \beta_3 x^c$ .  $\triangle$

Definimos las constantes  $l \triangleq r_1 - 1$ ,  $l_{\nabla} \triangleq 2 - r_1$ ,  $l_L = r_1 + 1$  y  $l_H \triangleq r_1 + 2$ . Recuerde que  $\mathbf{P} = \text{diag}\{P_i\}_{i=1}^n$ ,  $\mathbf{D} = \text{diag}\{D_i\}_{i=1}^n$ ,  $\mathbf{B} = \text{diag}\{B_i\}_{i=1}^n$ , y  $\mathbf{A} = \text{diag}\{A_i\}_{i=1}^n$ . Defina  $\phi_s := \text{sat}(\tilde{\mathbf{q}})$ ,  $\phi := \tanh(\tilde{\mathbf{q}})$  y  $S(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{q}}, p_1) := \sum_{i=1}^n P_i s(\tilde{q}_i, p_1)$ , donde cada  $s(\tilde{q}_i, p_1)$  queda establecida por (A.1), y  $p_1 = \frac{2-r_1}{r_1}$ .

Considere una función candidata de Lyapunov dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_G(t, \mathbf{x}_q) = & (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) [V(t, \mathbf{x}_q)]^{\frac{l_H}{2}} + \gamma_3 [V(t, \mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} \\ & + \gamma_1 d_1 \sum_{i=1}^n F_i \ln |\cosh(\tilde{q}_i)| \\ & + \gamma_1 \left( [V(t, \mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} + d_1 \phi^\top(\tilde{\mathbf{q}}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) \\ & + \gamma_2 \left( [V(t, \mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} - d_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\vartheta} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$V(t, \mathbf{x}_q) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + S(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{q}}, p_1) + \frac{r_1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^\top \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} [\boldsymbol{\vartheta}]^{\frac{l_{\nabla}}{r_1}}$$

y las constantes  $d_1$  y  $d_2$  se seleccionan tal que

$$d_1^2 \leq \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2^2} \frac{r_1 + 1}{1} \left[ \frac{r_1}{2} \lambda\{\mathbf{P}\} \frac{r_1 + 1}{r_1} \right]^{\frac{r_1}{r_1+1}}, \quad (\text{A.3})$$

$$d_2^2 \leq \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2^2} \frac{r_1 + 1}{1} \left[ \frac{r_1}{2} \lambda\{\mathbf{D} \mathbf{B}^{-1}\} \frac{r_1 + 1}{r_1} \right]^{\frac{r_1}{r_1+1}}. \quad (\text{A.4})$$

Como  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \succ 0$ ,  $\mathbf{P} \succ 0$  y  $\mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \succ 0$ , aplicando **P1**, se obtiene que  $\mathcal{V}(t, \mathbf{x}_q) \leq V(t, \mathbf{x}_q)$ , con  $V_i(\mathbf{x}_q) \triangleq$

$$\frac{m_1}{2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{r_1}{2} \lambda\{\mathbf{P}\} \|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} + \frac{r_1}{2} \lambda\{\mathbf{D} \mathbf{B}^{-1}\} \|\boldsymbol{\vartheta}\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} \text{ y } V_u(\mathbf{x}_q) \triangleq \frac{m_2}{2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{r_1 n^{\frac{1}{r_1}}}{2} \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} + \frac{r_1 n^{\frac{1}{r_1}}}{2} \bar{\lambda}\{\mathbf{D} \mathbf{B}^{-1}\} \|\boldsymbol{\vartheta}\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}}.$$

Por lo tanto,  $V(t, \mathbf{x}_q) \succ 0$  y  $\sum_{i=1}^n F_i \ln |\cosh(\tilde{q}_i)| \succ 0$ . Por otro lado, los primeros tres términos del lado derecho de (A.2) son definidos positivos, y es suficiente mostrar que el cuarto y quinto término son no-negativos para asegurar que  $\mathcal{V}_G(t, \mathbf{x}_q) \succ 0$ . Observe que

$$\phi^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \geq -m_2 \|\phi_s\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \text{ y } \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\vartheta} \geq -m_2 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\boldsymbol{\vartheta}\|.$$

Entonces,  $[V_i(\mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} - d_1 m_2 \|\phi_s\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \geq 0$  y  $[V_i(\mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} - d_2 m_2 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\boldsymbol{\vartheta}\| \geq 0$  tienen que cumplirse. De acuerdo con el Lema 3 las desigualdades anteriores se cumplen si  $d_1$  y  $d_2$  se eligen como en (A.3) y (A.4), respectivamente. Entonces, se concluye que  $\mathcal{V}_G \succ 0$  para toda  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ , para toda  $t \geq 0$  y para toda  $r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $2 \geq r_1 \geq 1$ . Observe que,  $\gamma_3 [V(t, \mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} \leq \mathcal{V}_G(t, \mathbf{x}_q)$ , y como  $V_i(\mathbf{x}_q)$  es radialmente no-acotada,  $\mathcal{V}_G(t, \mathbf{x}_q)$  es radialmente no-acotada también.

De lo anterior y del Lema 3, se llega a que  $(\gamma_1 + \gamma_2) [V(t, \mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} + \gamma_1 d_1 \phi^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \gamma_2 d_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\vartheta} \leq 2(\gamma_1 + \gamma_2) [V_u(\mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}}$ . Debido a que  $\frac{1}{r_1} \in (1/2, 1)$ , aplicando **P7** y el Lema 2, se obtiene que  $\sum_{i=1}^n F_i \ln |\cosh(\tilde{q}_i)| \leq \frac{r_1}{r_1+1} \sum_{i=1}^n F_i |\tilde{q}_i|^{1+\frac{1}{r_1}} \leq \frac{r_1}{r_1+1} \frac{n^{2\frac{1}{r_1}} \bar{\lambda}\{\mathbf{F}\}}{(0.5r_1 n^{\frac{1}{r_1}} \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\})^{\frac{l_L}{2}}} [V_u(\mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}}$ .

Entonces,  $\mathcal{V}_G(t, \mathbf{x}_q)$  es decreciente debido a que

$$\dot{\mathcal{V}}_G(t, \mathbf{x}_q) \leq \alpha_u(r_1) [V_u(\mathbf{x}_q)]^{\frac{l_L}{2}} + \gamma_3 [V_u(\mathbf{x}_q)]^{\frac{l_H}{2}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{con } \alpha_u(r_1) \triangleq 2(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3 + \gamma_1 d_1 \frac{r_1 n^{2\frac{1}{r_1}} \bar{\lambda}\{\mathbf{F}\}}{(r_1+1) (0.5r_1 n^{\frac{1}{r_1}} \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\})^{\frac{l_L}{2}}}.$$

La derivada con respecto al tiempo de (A.2) es

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{V}}_G(t, \mathbf{x}_q)}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} = & \left( \frac{l_H}{2} [V(\cdot)]^{\frac{r_1}{2}} + \frac{l_L}{2} [V(\cdot)]^{\frac{1}{2}} \right) \dot{V}(t, \mathbf{x}_q) \\ & + \gamma_4 d_1 \frac{d}{dt} \left( \phi^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) \\ & - \gamma_5 d_2 \frac{d}{dt} \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\vartheta} \right) + \gamma_4 d_1 \phi^\top \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned}$$

donde  $\gamma_4 = \gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$ ,  $\gamma_5 = \gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$ ,

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}_q) = -([\boldsymbol{\vartheta}]^{\frac{l_{\nabla}}{r_1}})^\top \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} [\boldsymbol{\vartheta}]^{\frac{1}{r_1}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \tilde{\mathbf{h}}(\cdot) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \phi^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) = \dot{\phi}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \phi^\top \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \phi^\top [-\mathbf{P} \times$$

$$[\phi_s]_{r_1}^{\frac{l_{\nabla}}{r_1}} - \mathbf{D} [\boldsymbol{\vartheta}]_{r_1}^{\frac{l_{\nabla}}{r_1}} - \tilde{\mathbf{h}}(\cdot) - \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}], \text{ y}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\vartheta} \right) = \boldsymbol{\vartheta}^\top [-\mathbf{P} [\phi_s]_{r_1}^{\frac{l_{\nabla}}{r_1}} - \mathbf{D} [\boldsymbol{\vartheta}]_{r_1}^{\frac{l_{\nabla}}{r_1}} - \tilde{\mathbf{h}}(\cdot) - \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] +$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) (-\mathbf{A} [\boldsymbol{\vartheta}]_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} + \mathbf{B} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}),$$

donde se usó la propiedad **P2** y  $\dot{\phi} = \frac{d}{dt} \phi = \text{Sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ .

Usando las Propiedades **P1**, **P3**, las propiedades **T1**, **T2** y el Lema 2, se obtienen las siguientes cotas:

$$\lambda\{\mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}\} \|\boldsymbol{\vartheta}\|^{3-r_1} \leq ([\boldsymbol{\vartheta}]_{r_1}^{\frac{l_{\nabla}}{r_1}})^\top \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} [\boldsymbol{\vartheta}]_{r_1}^{\frac{1}{r_1}};$$

$$\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \tilde{\mathbf{h}}(\cdot)\| \leq L_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2; \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \text{Sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq m_2 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2;$$

$$\dot{\phi}^\top \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \boldsymbol{\vartheta} \leq L_c \|\phi_s\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + v_d L_c \|\phi_s\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|;$$

$$\lambda\{\mathbf{P}\}k_t\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} \leq \phi^\top \mathbf{P}[\phi_s]_{r_1}^{\frac{1}{r_1}};$$

$$\phi^\top \mathbf{D}[\vartheta]_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} \leq \varpi_{D1}\|\phi_s\|\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}}; \quad \|\phi^\top \tilde{\mathbf{h}}(\cdot)\| \leq k_{h1}\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\phi_s\|;$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{A}[\vartheta]_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} &\leq \varpi_A\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}}; \quad \lambda\{\mathbf{M}\mathbf{B}\}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^\top \times \\ &\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}; \quad \vartheta^\top \mathbf{P}[\phi_s]_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} \leq \varpi_P\|\vartheta\|\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}}; \quad \vartheta^\top \mathbf{D}[\vartheta]_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} \\ &\leq \varpi_{D2}\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}}; \quad \vartheta^\top \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}} \leq L_c\|\vartheta\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \\ &v_d L_c\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\|; \quad \vartheta^\top \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} \leq \lambda\{\mathbf{F}\}\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\|; \quad \text{y } \|\vartheta^\top \tilde{\mathbf{h}}(\cdot)\| \leq \\ &L_{h1}\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\|; \text{ donde } \varpi_{D1} := 2^{\frac{1}{r_1}}\lambda\{\mathbf{D}\}, \varpi_A := 2^{\frac{1}{2r_1}}\lambda\{\mathbf{A}\}m_2, \\ &\varpi_P := 2^{\frac{1}{r_1}}\lambda\{\mathbf{P}\} \text{ y } \varpi_{D2} := 2^{\frac{1}{2r_1}}\lambda\{\mathbf{D}\}. \end{aligned}$$

Definiendo  $L_v := \bar{v}_d L_c + k_{h1}$ ,  $L_F := \lambda\{\mathbf{F}\} + L_v$  y usando las cotas anteriores, se obtiene que los términos  $\frac{d}{dt}(\phi^\top \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) - \phi^\top \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} \leq m_2\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + L_c\|\phi_s\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + L_v\|\phi_s\|\|\dot{\mathbf{q}}\| - \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\}\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} + \varpi_{D1}\|\phi_s\|\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}}$ , y el término  $\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q})\vartheta) \leq -m_1\lambda\{\mathbf{B}\}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \varpi_A\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} + \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\}\|\vartheta\|\|\dot{\mathbf{q}}\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} + \varpi_{D2}\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} + L_c\|\vartheta\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + L_F\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\|$ .

Del Lema 2, tenemos que  $3^{\frac{r_1-3}{2}}(a_1\|\dot{\mathbf{q}}\|^l + a_2\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{l}{r_1}} + a_3\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{l}{r_1}}) \leq [V(\cdot)]^{\frac{l}{2}}$  y  $3^{-\frac{l}{2}}(b_1\|\dot{\mathbf{q}}\|^{r_1} + b_2\|\phi_s\| + b_3\|\vartheta\|) \leq [V(\cdot)]^{\frac{r_1}{2}}$ , con constantes  $a_1 \triangleq (\frac{m_1}{2})^{\frac{1}{2}}$ ,  $b_1 \triangleq (\frac{m_2}{2})^{\frac{r_1}{2}}$ ,  $a_2 \triangleq (\frac{r_1\lambda\{\mathbf{P}\}}{2})^{\frac{1}{2}}$ ,  $b_2 \triangleq (\frac{r_1\lambda\{\mathbf{P}\}}{2})^{\frac{r_1}{2}}$ ,  $a_3 \triangleq (\frac{r_1\lambda\{\mathbf{DB}^{-1}\}}{2})^{\frac{1}{2}}$ ,  $b_3 \triangleq (\frac{r_1\lambda\{\mathbf{DB}^{-1}\}}{2})^{\frac{r_1}{2}}$ . Usando estas cotas, se obtiene que  $-\frac{L_L}{2}[V(\cdot)]^{\frac{1}{2}}\dot{V}(\cdot) \leq -A_3\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} - A_4\|\dot{\mathbf{q}}\|^{L_L}$ , así como  $-\frac{L_H}{2}[V(\cdot)]^{\frac{r_1}{2}}\dot{V}(\cdot) \leq -B_3\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{3}{r_1}} - B_4\|\dot{\mathbf{q}}\|^{r_1+2} - B_5\|\phi_s\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - B_6\|\vartheta\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ , donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} A_3 &\triangleq 3^{\frac{r_1-3}{2}}\frac{L_L}{2}\lambda\{\mathbf{DB}^{-1}\mathbf{A}\}a_3, \quad B_3 \triangleq 3^{-\frac{L_H}{2}}\frac{L_H}{21}\lambda\{\mathbf{DB}^{-1}\mathbf{A}\}b_3, \\ A_4 &\triangleq 3^{\frac{r_1-3}{2}}\Delta F\frac{L_L}{2}a_1, \quad B_4 \triangleq 3^{-\frac{L_H}{2}}\Delta F\frac{L_H}{2}b_1, \quad B_5 \triangleq \\ &3^{-\frac{L_H}{2}}\Delta F\frac{L_H}{2}b_2, \quad B_6 \triangleq 3^{-\frac{L_H}{2}}\Delta F\frac{L_H}{2}b_3 \text{ y } \Delta F := \lambda\{\mathbf{F}\} - k_{h1}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta todas las cotas anteriores y agrupando términos, obtenemos

$$\frac{\dot{V}_G}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \leq -v_1 - v_2 - v_3 - C_3\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} - C_5\|\phi_s\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - C_6\|\vartheta\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$$

donde

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}\gamma_4 d_1 \lambda\{\mathbf{P}\}\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} + (\gamma_5 d_2 m_1 \lambda\{\mathbf{B}\} - \gamma_4 d_1 m_2)\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ &\quad - \gamma_4 d_1 \varpi_{D1}\|\phi_s\|\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} - \gamma_5 d_2 \varpi_A\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} + \frac{A_3}{3}\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} \\ &\quad - \gamma_5 d_2 \varpi_P\|\vartheta\|\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} \\ v_2 &= \frac{A_4}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^{\frac{L_L}{r_1}} + \frac{1}{2}\gamma_4 d_1 \lambda\{\mathbf{P}\}\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}} - \gamma_4 d_1 L_d\|\phi_s\|\|\dot{\mathbf{q}}\| \\ v_3 &= \frac{A_4}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^{\frac{L_L}{r_1}} + \beta_1\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{1}{r_1}} - \gamma_5 d_2 L_F\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\vartheta\| \end{aligned}$$

con  $C_3 = \frac{A_3}{3} - \gamma_5 d_2 \varpi_{D2}$ ,  $C_5 = B_5 - \gamma_4 d_1 L_c$ , y  $C_6 = \frac{B_6}{9} - \gamma_5 d_2 L_c$ . Por el Lema 4, la constante cumple  $\beta_1 \leq \bar{\beta}_1(\frac{1}{3}A_3, B_3, \frac{L_L}{r_1}, \frac{L_L}{r_1}, \frac{3}{r_1})$ .

La función  $\dot{V}_G(t, \bar{x}_q)$  es definida negativa si  $v_1, v_2$  y  $v_3$  se hacen definidas positivas, y  $C_3 > 0, C_5 > 0$  y  $C_6 > 0$  satisfacen las condiciones dadas por

$$\frac{B_5}{d_1 L_c d_2 \varpi_{D2}} > \gamma_4, \quad \min\left\{\frac{A_3}{3d_2 \varpi_{D2}}, \frac{B_6}{d_2 L_c}\right\} > \gamma_5. \quad (\text{A.6})$$

Ahora, se determinan las condiciones sobre  $\gamma_4$  y  $\gamma_5$  para asegurar que  $v_1, v_2$  y  $v_3$  sean definidas positivas. Se comienza con  $v_2$ . Defina  $x \triangleq \|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}}$ ,  $w \triangleq \|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{L_L}{r_1}}$ ,  $z \triangleq \|\dot{\mathbf{q}}\|^{L_L}$  y  $\mu_1 = 1/(r_1 + 1)$ . Aplicando la desigualdad de Young y la propiedad **T1** al término  $(\|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{L_L}{r_1}})^{\mu_1}(\|\dot{\mathbf{q}}\|^{\frac{L_L}{r_1}})^{1-\mu_1}$ , se obtiene que  $v_2 > 0$  si  $A_x x + B_z z > 0$ , donde  $A_x = \frac{1}{2}\gamma_4 d_1 \lambda\{\mathbf{P}\} - \mu_1 c_1^{-\frac{1}{\mu_1}} n^{\frac{1}{2r_1}} \gamma_4 d_1 L_d$  y  $B_z = \frac{1}{2}A_4 - (1 - \mu_1)c_1^{-\frac{1}{1-\mu_1}} \gamma_4 d_1 L_d$ . Entonces,  $v_2 > 0$ , si  $A_x > 0$  y  $B_z > 0$ , lo cual implica  $c_1^{\frac{1}{\mu_1}} > \frac{2\mu_1 n^{\frac{1}{2r_1}} d_1 L_d}{d_1 \lambda\{\mathbf{P}\}}$  y  $\frac{A_4}{2(1-\mu_1)\gamma_4 d_1 L_d} > c_1^{-\frac{1}{1-\mu_1}}$ , respectivamente. Por la propiedad de transitividad en desigualdades, siempre existe  $c_1$  tal que  $A_x > 0$  y  $B_z > 0$  si  $\gamma_4$  se elige tal que

$$\frac{A_4}{2(1-\mu_1)d_1 L_d} \left(\frac{2\mu_1 n^{\frac{1}{2r_1}} d_1 L_d}{d_1 \lambda\{\mathbf{P}\}}\right)^{-\frac{\mu_1}{1-\mu_1}} > \gamma_4. \quad (\text{A.7})$$

Ahora sigue  $v_3$ . Defina  $\sigma \triangleq \|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{L_L}{r_1}}$ ,  $z \triangleq \|\dot{\mathbf{q}}\|^{\frac{L_L}{r_1}}$  y  $\mu_1 = 1/(r_1 + 1)$ . Aplicando la desigualdad de Young al término  $(\|\dot{\mathbf{q}}\|^{\frac{L_L}{r_1}})^{\mu_1}(\|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{L_L}{r_1}})^{1-\mu_1}$  se obtiene que  $v_3 > 0$  si  $A_z z + B_\sigma \sigma > 0$ , donde  $A_z = \frac{1}{2}A_4 - \mu_1 c_2^{-\frac{1}{\mu_1}} \gamma_5 d_2 L_d$ , y  $B_\sigma = \beta_1 - (1 - \mu_1)c_2^{-\frac{1}{1-\mu_1}} \gamma_5 d_2 L_d$ . Entonces,  $v_3 > 0$  implica  $A_z > 0 \Rightarrow c_2^{\frac{1}{\mu_1}} > \frac{2\mu_1 \gamma_5 d_2 L_d}{A_4}$  y  $B_\sigma > 0 \Rightarrow \frac{\beta}{(1-\mu_1)\gamma_5 d_2 L_d} > c_2^{-\frac{1}{1-\mu_1}}$ . Por lo tanto, siempre existe  $c_2$  tal que  $A_z > 0$  y  $B_\sigma > 0$  si  $\gamma_5$  se elige tal que

$$\left(\frac{\beta_1}{(1-\mu_1)d_2 L_d}\right)^{1-\mu_1} \left(\frac{2\mu_1 d_2 L_d}{A_4}\right)^{-\mu_1} > \gamma_5. \quad (\text{A.8})$$

Ahora se analiza el término  $v_1$ . Definiendo el cambio de variables  $y \triangleq \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ ,  $x \triangleq \|\phi_s\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}}$ ,  $\psi \triangleq \|\vartheta\|_{r_1}^{\frac{2}{r_1}}$ , la función  $v_1$  queda escrita como  $v_1(x, \bar{x}, y, \psi) := (\gamma_5 d_2 m_1 \lambda\{\mathbf{B}\} - \gamma_4 d_1 m_2)y + \frac{1}{2}\gamma_4 d_1 \lambda\{\mathbf{P}\}x - \gamma_4 d_1 \varpi_{D1}x^{\nu_1}\psi^{1-\nu_1} - \gamma_5 d_2 \varpi_A y^{\nu_2} \times \psi^{1-\nu_2} - \gamma_5 d_2 \varpi_P x^{\nu_3}\psi^{1-\nu_3} + \frac{A_3}{3}\psi$ , con  $\nu_1 = \frac{r_1}{2}$ ,  $\nu_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\nu_3 = \frac{L_L}{2}$ . Usando la desigualdad de Young, se obtiene que  $x^{\nu_1}\psi^{1-\nu_1} \leq \nu_1 c_3^{\frac{1}{\nu_1}} x + (1 - \nu_1)c_3^{-\frac{1}{1-\nu_1}} \psi$ ;  $y^{\nu_2}\psi^{1-\nu_2} \leq \nu_2 c_4^{\frac{1}{\nu_2}} y + (1 - \nu_2)c_4^{-\frac{1}{1-\nu_2}} \psi$ ; y  $x^{\nu_3}\psi^{1-\nu_3} \leq \nu_3 c_5^{\frac{1}{\nu_3}} x + (1 - \nu_3)c_5^{-\frac{1}{1-\nu_3}} \psi$ .

Con estas desigualdades, se tiene que  $v_1(x, \bar{x}, y, \psi) > 0$  si  $B_{y1}y + B_{y2}y + A_{x1}x + A_{x2}x + C_{\psi1}\psi + C_{\psi2}\psi + C_{\psi3}\psi > 0$ , siendo  $A_{x1} = \frac{1}{4}\gamma_4 d_1 \lambda\{\mathbf{P}\} - \nu_1 c_3^{\frac{1}{\nu_1}} \gamma_4 d_1 \varpi_{D1}$ ;  $A_{x2} = \frac{1}{4}\gamma_4 d_1 \lambda\{\mathbf{P}\} - \nu_3 c_5^{\frac{1}{\nu_3}} \gamma_5 d_2 \varpi_P$ ;  $B_{y1} = \frac{1}{4}\gamma_5 d_2 m_1 \lambda\{\mathbf{B}\} - \gamma_4 d_1 m_2$ ;  $B_{y2} = \frac{1}{4}\gamma_5 d_2 m_1 \lambda\{\mathbf{B}\} - \nu_2 c_4^{\frac{1}{\nu_2}} \gamma_4 d_1 \varpi_A$ ;  $C_{\psi1} = \frac{A_3}{9} - (1 - \nu_1)c_3^{-\frac{1}{1-\nu_1}} \gamma_4 d_1 \varpi_{D1}$ ;  $C_{\psi2} = \frac{A_3}{9} - (1 - \nu_2)c_4^{-\frac{1}{1-\nu_2}} \gamma_4 d_2 \varpi_A$ ; y  $C_{\psi3} = \frac{A_3}{9} - (1 - \nu_3)c_5^{-\frac{1}{1-\nu_3}} \gamma_5 d_2 \varpi_P$ .

Entonces, es fácil ver que  $B_{y1} > 0$  se cumple si

$$5 \quad \frac{d_2 m_1 \lambda\{\mathbf{B}\}}{4d_1 m_2} > \frac{\gamma_4}{\gamma_5} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad (\text{A.9})$$

se satisface, mientras que siguiendo el procedimiento anterior, los coeficientes  $A_{x1} > 0$  y  $C_{\psi1} > 0$  si

$$\frac{A_3}{9(1-\nu_1)d_1\varpi_{D1}} \left( \frac{\lambda\{\mathbf{P}\}}{4\nu_1\varpi_{D1}} \right)^{\frac{1-\nu_1}{\nu_1}} > \gamma_4 \quad (\text{A.10})$$

se cumple. Los coeficientes  $B_{y2} > 0$  y  $C_{\psi2} > 0$  si

$$\frac{A_3}{9(1-\nu_2)d_2\varpi_A} \left( \frac{d_2m_1\lambda\{\mathbf{B}\}}{4\nu_2\varpi_A} \right)^{\frac{1-\nu_2}{\nu_2}} > \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{\frac{1-\nu_2}{\nu_2}} \gamma_4 \quad (\text{A.11})$$

se cumple y los coeficientes  $C_{\psi3} > 0$  y  $A_{x2} > 0$  si

$$\frac{1}{4\nu_3} \frac{d_1\lambda\{\mathbf{P}\}}{d_2\varpi_P} \left( \frac{3(1-\nu_3)d_2\varpi_P}{1} \frac{1}{A_3} \right)^{-\frac{1-\nu_3}{\nu_3}} > \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{\nu_3}} \gamma_4^{\frac{1-\nu_3}{\nu_3}} \quad (\text{A.12})$$

Por la tanto, eligiendo  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tal que (A.9) se cumple, y  $\gamma_3$  suficientemente grande tal que (A.6), (A.7), (A.8), (A.10), (A.11), (A.12) se satisfacen simultáneamente, se asegura que  $\dot{V}_G$  es definida negativa. Y se concluye estabilidad asintótica uniforme y global del origen del sistema (6).

Ahora, centramos el análisis en el conjunto  $\Omega := \{\mathbf{x}_q \in \mathbb{R}^{3n} : w_1 \leq 1\}$ , donde  $w_1 := \frac{m_2}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{r_1 n^{\frac{1}{2}}}{2} \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\} \|\phi_s\|_{\tau_1}^2 + \frac{r_1 n^{\frac{1}{2}}}{2} \lambda\{\mathbf{DB}^{-1}\} \|\vartheta\|_{\tau_1}^2$ . En este conjunto (A.5) se puede acotar por arriba como  $\mathcal{V}_G(t, \mathbf{x}_q) \leq [\alpha_u(r_1) + \gamma_3] w^{\frac{1}{2}} \leq [\alpha_u(r_1) + \gamma_3] V_{us}^{\frac{1}{2}}$ , donde  $V_{us} \triangleq \frac{r_1 n^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda}\{\mathbf{P}\}}{2} \|\phi_s\|_{\tau_1}^2 + \frac{r_1 n^{\frac{1}{2}} \lambda\{\mathbf{DB}^{-1}\}}{2} \|\vartheta\|_{\tau_1}^2 + \frac{m_2}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ . Por lo tanto, para toda  $\mathbf{x}_q \in \Omega$ ,

$$-[\mathcal{V}_G(t, \mathbf{x}_q)]^{\frac{2}{L}} \geq -[\alpha_u(r_1) + \gamma_3]^{\frac{2}{L}} V_{us} \quad (\text{A.13})$$

Como  $\nu_1 > 0$ , la derivada con respecto al tiempo de  $\mathcal{V}_G$  satisface  $\dot{\mathcal{V}}_G(\cdot) \leq -(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\nu_1(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \vartheta) \leq -\alpha_l(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)V_{us}(\mathbf{x}_q)$ , donde la constante  $\alpha_l = \min\left\{\frac{A_{x1}}{\frac{1}{2}m_2}, \frac{B_{y1}}{\frac{r_1}{2}n^{\frac{1}{2}}\bar{\lambda}\{\mathbf{P}\}}, \frac{C_{\psi1}}{\frac{r_1}{2}n^{\frac{1}{2}}\lambda\{\mathbf{DB}^{-1}\}}\right\}$ . Tomando en cuenta la desigualdad (A.13) se llega a que

$$\dot{\mathcal{V}}_G(t, \mathbf{x}_q) \leq -\frac{\alpha_l(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}{[\alpha_u(r_1) + \gamma_3]^{\frac{2}{L}}} \mathcal{V}_G^{\frac{2}{L}}(t, \mathbf{x}_q), \quad (\text{A.14})$$

La estabilidad local uniforme en TF se concluye a partir de argumentos estándar de Lyapunov (Moulay y Perruquetti, 2008), debido a que  $2 > r_1 > 1$  implica  $\frac{2}{1+r_1} < 1$ .

## REFERENCIAS

- Aguñaga Ruiz, E., Santibañez, V., Zavala-Río, A., y Reyes, F. (2009). Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs. *IEEE Trans Control Syst Tech*, 17(4), 126–133.
- Bernstein, D.S. (2009). *Matrix Mathematics: theory, facts, y formulas*. Princeton University Press.
- Cruz-Zavala, E., Nuño, E., y Moreno, J.A. (2017). Finite-time regulation of fully-actuated Euler-Lagrange systems without velocity measurements. In *Proc. IEEE 56th Conf. Decision y Control*, 6750–6755. Melbourne, Australia.
- Feng, W. y Postlethwaite, I. (1993). A simple robust control scheme for robot manipulators with only joint position measurements. *The Int. J. Robot. Res.*, 12(5), 490–496.
- Feng, Y., Yu, X., y Man, Z. (2002). Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38(12), 2159–2167.
- Hong, Y., Xu, Y., y Huang, J. (2002). Finite-time control for robot manipulators. *Systems & Control Letters*, 46, 243–253.
- Kawamura, S., Miyazaki, F., y Arimoto, S. (1988). Is a local linear PD feedback control law effective for trajectory tracking of robot motion? In *IEEE Conf Robotics y Automation*, 1335–1340. Philadelphia, PA.
- Kelly, R. y Salgado, R. (1994). PD control with computed feedforward of robot manipulators: A design procedure. *IEEE Trans Rob Auto*, 10(4), 566–571.
- Kelly, R., Santibañez, V., y Loria, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag.
- Loría, A. (2016). Observers are unnecessary for output-feedback control of Lagrangian systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 61(4), 905–920.
- Moulay, E. y Perruquetti, W. (2008). Finite time stability conditions for non-autonomous continuous systems. *Int. J. Control*, 81(5), 797–803.
- Paden, B. y Panja, R. (1988). Global asymptotically stable PD+ controller for robot manipulator. *Int. Jour. of Control*, 47, 1697–1712.
- Romero, J., Ortega, R., y Sarras, I. (2015). A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 60(3), 818–823.
- Santibañez, V. y Kelly, R. (2001). Global asymptotic stability of bounded output feedback tracking control for robot manipulators. In *Proc. 40th IEEE Conf. Decision y Control*, 1378–1379. Orlyo, FL.
- Santibañez, V. y Kelly, R. (1997). Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators. *Automatica*, 33(4), 126–133.
- Slotine, J. y Li, W. (2001). Adaptive manipulator control: a case study. *IEEE Trans Autom Control*, 33(11), 995–1003.
- Spong, M. y Ortega, R. (1990). On adaptive inverse dynamics control of rigid robots. *IEEE Trans Autom Control*, 35(1), 92–95.
- Tang, Y. (1998). Terminal sliding mode control for rigid robots. *Automatica*, 34, 51–56.
- Venkataraman, S. y Gulati, S. (1993). Terminal slider control of robot systems. *Journal of Intelligent y Robotic Systems*, 5, 31–55.
- Wen, J.T. (1990). A unified perspective on robot control: the energy Lyapunov function approach. *Int. J. Adaptive Control Sig. Process*, 4, 487–500.
- Yu, S.H., Yu, X.H., Shirinzadeh, B., y Man, Z. (2005). Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 41(11), 1957–1964.
- Zamora-Gómez, G.I., Zavala-Río, A., y López-Araujo, D.J. (2017). Observer-less output-feedback global continuous control for the finite-time y exponential stabilization of mechanical systems with constrained inputs. *Eur. J. Control*, 36, 30–42.
- Zamora-Gómez, G., Zavala-Río, A., López-Araujo, D., Cruz-Zavala, E., y Nuño, E. (2020). Continuous control for fully-damped mechanical systems with input constraints: Finite-time y exponential tracking. *IEEE Trans Autom Control*, 65(2), 882–889.