

# Formation Control with Synchronization of Mobile Robots Based on Discrete Time Models and Predictive Control \*

O. Vazquez-Cruz, R. Castro-Linares, J. Álvarez-Gallegos

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av.  
I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México (e-mail:  
olaf.vazquez, rcastro, jalvarez @cinvestav.mx).*

---

**Abstract:** In this paper, a control scheme is presented to solve the problem of regulation and formation with synchronization of a differential drive wheeled mobile robot, using the standard kinematic model in continuous time, which is exactly discretized. The design of the scheme is based on static state feedback technique and model predictive control (MPC) as control algorithm. The performance of the control scheme is verified by means of numerical simulations.

*Keywords:* Exact discretization, Regulation, Model Predictive Control, Synchronization.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Debido al continuo desarrollo de la robótica móvil, el control cooperativo de robots ha sido un tópico de interés para el desarrollo de diversas técnicas de control que lleven a cabo de manera eficiente dicha tarea. En el control cooperativo se requiere que un conjunto de vehículos no tripulados (terrestres, aéreos, o marinos) cumplan objetivos específicos tales como la vigilancia, la búsqueda y exploración, el reconocimiento cooperativo, entre otros. Se han propuesto varias estrategias para el control de formación basadas en comportamiento [2], teoría de grafos [5], estructuras virtuales [13], líder-seguidor [11] y sincronización [12]; este último es la base para el desarrollo de la técnica de sincronización de este trabajo.

En particular, en [8] se proponen controladores con un enfoque discreto aplicados a un robot móvil tipo diferencial utilizando un modelo en tiempo discreto del robot móvil involucrando el retardo de transporte de las señales de control, con una variante del controlador de modos deslizantes. En [7] se utiliza el modelo discreto exacto del robot móvil, cuya ley de control se basa en usar controles auxiliares del tipo proporcional, para lograr el seguimiento de una trayectoria. En [1] se utiliza el modelo en tiempo discreto libre de retardos del robot móvil, junto con el método de potenciales artificiales para lograr la evasión de obstáculos y regulación de posición, empleando un controlador del tipo “cuasi modos deslizantes” .

En este trabajo se propone el uso de la estrategia lineal del control predictivo de modelo (CPM) para el control de

robots móviles diferenciales. Se explora el desempeño que tiene el CPM al ser utilizado para lograr el objetivo de control de regulación de un robot móvil diferencial, donde las salidas calculadas del CPM son los valores óptimos para los controles virtuales que resultan de la linealización del modelo discreto exacto del robot móvil. De igual manera se propone un esquema de control basado en el CPM para la formación con sincronización de un grupo de  $n$  robots móviles diferenciales utilizando la discretización exacta de sus modelos cinemáticos. El esquema de control propuesto permite lograr el seguimiento de trayectorias del grupo de robots, manteniendo una formación deseada y ponderando el esfuerzo de control en cada robot. El desempeño del esquema propuesto se muestra a través de simulaciones numéricas tanto para el caso de regulación de un solo robot como para el de formación de un grupo de robots.

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 se describe el modelo discretizado exacto del robot móvil tipo diferencial, junto con su linealización entrada-salida. En la Sección 3 se describe la metodología del CPM. En la sección 4 se presenta el esquema de sincronización. Posteriormente, en la Sección 5 se muestran los resultados obtenidos mediante simulación numérica y, finalmente, la Sección 6 contiene las conclusiones finales del trabajo.

## 2. MODELO DISCRETO

Se consideran robots móviles diferenciales, con ruedas indeformables y sin efectos de deslizamiento en ellas, que se desplazan en el plano horizontal. La posición del robot en el plano se muestra en la Figura 1. El modelo cinemático del robot móvil, considerando restricciones no holonómicas [4], y cuyo punto de control es el punto medio del eje de las ruedas, está descrito por,

---

\* Trabajo realizado con el apoyo de CONACYT mediante el proyecto CB 254329, parte fundamental para el desarrollo de este trabajo y con la beca No. 722686, otorgada para los estudios de posgrado.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u_1(t) \cos(\theta(t)), \\ \dot{y}(t) &= u_1(t) \sin(\theta(t)), \\ \dot{\theta}(t) &= u_2(t),\end{aligned}\quad (1)$$

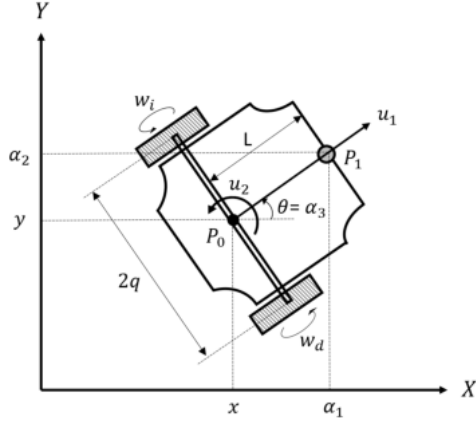


Figura 1. Robot móvil tipo diferencial en el plano.

donde  $x(t)$  y  $y(t)$  son las coordenadas del centro de rotación del robot móvil con respecto a los ejes del marco fijo  $X$  y  $Y$ . La variable  $\theta(t)$  representa el ángulo que se forma entre el eje de referencia del robot con respecto a  $X$ ,  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  corresponden a la velocidad lineal y a la velocidad rotacional del robot móvil, respectivamente.  $w_d(t)$  y  $w_i(t)$  representan las velocidades angulares de las ruedas derecha e izquierda, respectivamente.  $2q$  es la distancia entre las ruedas del robot móvil. La relación entre las velocidades  $w_d(t)$  y  $w_i(t)$  con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  está dada por,

$$\begin{bmatrix} w_d(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{r_w} \begin{bmatrix} 1 & q \\ 1 & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

donde  $r_w$  es el radio de las ruedas del robot móvil; esta transformación es no singular para todo  $r_w, q > 0$ .

Considérese al punto  $P_1$ , que es perpendicular al eje de las ruedas del robot y está situado a una distancia  $L$ , con coordenadas  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  definidas por,

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= x(t) + L \cos(\theta(t)), \\ \alpha_2(t) &= y(t) + L \sin(\theta(t)), \\ \alpha_3(t) &= \theta(t).\end{aligned}\quad (2)$$

De hecho (2) representa una transformación de coordenadas definida localmente. La dinámica del sistema (1) en las nuevas coordenadas (2) está dada por,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1(t) &= u_1(t) \cos(\alpha_3(t)) - Lu_2(t) \sin(\alpha_3(t)), \\ \dot{\alpha}_2(t) &= u_1(t) \sin(\alpha_3(t)) + Lu_2(t) \cos(\alpha_3(t)), \\ \dot{\alpha}_3(t) &= u_2(t).\end{aligned}\quad (3)$$

Considerando el modelo cinemático no lineal en tiempo continuo (3), es posible obtener una representación exacta en tiempo discreto realizando las siguientes consideraciones: Sea  $T > 0$  un tiempo de muestreo constante y sea,  $t_k = \{t \in [kT, kT + T)\}$  con  $k = 1, 2, \dots$ , el intervalo de tiempo entre dos periodos de muestreo consecutivos. Asumiendo que las señales de entrada solo se modifican

cada periodo de muestreo, es decir, en el intervalo  $t_k$ ,  $u(t) = u(kT)$ ,  $\forall t \in [kT, kT + T)$  [14], se pueden integrar en forma exacta las ecuaciones (3) en este intervalo, obteniéndose,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_2^+ \\ \alpha_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + 2\psi(u_2) \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -L \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & L \cos(\gamma) \\ 0 & \frac{T}{2\psi(u_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

donde se usa la notación compacta  $x = x(kT)$ ,  $x^\pm = x(kT \pm T)$  y  $x^{\pm i} = x(kT \pm iT)$ , con  $i$  cualquier número entero positivo,  $\psi(u_2) = \frac{\sin(\frac{T}{2}u_2)}{u_2}$  y  $\gamma = \alpha_3 + \frac{T}{2}u_2$ .

La ecuación (4) representa el modelo discreto exacto del robot móvil con punto de control  $P_1$ . Nótese que  $\lim_{u_2 \rightarrow 0} \psi(u_2)$  cuando  $u_2 \rightarrow 0$  es  $\frac{T}{2}$ .

Se definen las salidas de este sistema como,

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

cuya dinámica esta dada por,

$$\begin{bmatrix} \zeta_1^+ \\ \zeta_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + 2\psi(u_2) \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -L \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & L \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

ya que la matriz cuadrada pertenece a  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  que multiplica a las entradas  $u_1$  y  $u_2$  es no singular se tiene que la retroalimentación,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\psi(u_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\frac{1}{L} \sin(\gamma) & \frac{1}{L} \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 - \alpha_1 \\ v_2 - \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

hace que  $\zeta_1^+$  y  $\zeta_2^+$  tengan las dinámicas,

$$\zeta_1^+ = v_1, \quad \zeta_2^+ = v_2, \quad (8)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son nuevas entradas, las cuales pueden escogerse como,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = A_v \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + B_v \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

con  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$  nuevas entradas y

$$A_v = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B_v = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Los componentes de las matrices  $A_v$  y  $B_v$  se proponen para imponer una dinámica deseada en el comportamiento entrada-salida del sistema resultante.

### 3. CONTROL PREDICTIVO DE MODELO

En esta sección se describe la metodología del CPM que se utiliza en el presente trabajo. Se considera un sistema lineal en tiempo discreto de la forma,

$$\begin{aligned} x_i^+ &= A_z x_i + B_z v_i, \\ y_i &= C_z x_i, \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^{n_1}$  es el estado,  $v_i \in \mathbb{R}^l$  es la entrada y  $y_i \in \mathbb{R}^m$  es la salida del sistema.  $A_z \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $B_z \in \mathbb{R}^{n_1 \times l}$  y  $C_z \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ , son matrices reales constantes. A partir de (10) se forma el sistema aumentado [6],

$$\begin{aligned} x^+ &= Ax + B\Delta v, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $x = [(\Delta x_i)^T, (y_i)^T]^T$ , con  $\Delta x_i = x_i - x_i^-$ , es el estado aumentado,  $\Delta v = \Delta v_i$ , con  $\Delta v_i = v_i - v_i^-$ , es la entrada y  $y = y_i$  es la salida con,

$$A = \begin{bmatrix} A_z & O_z^T \\ C_z A_z & I_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_z \\ C_z B_z \end{bmatrix}, \quad C = [O_z \quad I_m],$$

siendo  $O_z \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$  una matriz de ceros e  $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matriz identidad.

Asumiendo que los estados pueden ser medidos completamente, se quiere que la llamada salida de predicción  $\hat{y}$ , siga a una señal de referencia de predicción dada  $\hat{r}$ , al mismo tiempo, se penalize el esfuerzo de control requerido para hacerlo. Para lograrlo se propone la función objetivo,

$$\begin{aligned} J(k) &= [\bar{Y}(k) - \bar{T}(k)]^T \bar{Q} [\bar{Y}(k) - \bar{T}(k)] \\ &\quad + \Delta V(k)^T \bar{R} \Delta V(k), \end{aligned} \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{Y}(k) &= \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+H_p|k) \end{bmatrix}, \quad \bar{T}(k) = \begin{bmatrix} \hat{r}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{r}(k+H_p|k) \end{bmatrix}, \\ \Delta V(k) &= \begin{bmatrix} \Delta \hat{v}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{v}(k+H_c-1|k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

con matrices de ponderación  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{m \times H_p} \times \mathbb{R}^{m \times H_p}$  y  $\bar{R} \in \mathbb{R}^{l \times H_c} \times \mathbb{R}^{l \times H_c}$  definidas por,

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}, \quad (14)$$

siendo  $H_p$  y  $H_c$  los horizontes de predicción y de control, respectivamente, con  $H_p \geq H_c$ ,  $Q \geq 0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  y  $R > 0 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ .

Al considerarse una referencia como un punto fijo en el tiempo, es posible reescribir a  $\bar{T}(k)$  de la forma,

$$\bar{T}(k) = R_s r_i(k) = \underbrace{[I_m, I_m, \dots, I_m]^T}_{H_p} r_i(k),$$

donde  $r_i(k)$  es el punto objetivo.

Con base al modelo en espacio de estados (11), las predicciones de la salida  $\bar{Y}$  se pueden calcular de forma recursiva. De esta manera las salidas predichas tendrán un comportamiento en el tiempo de la forma,

$$\bar{Y}(k) = \Upsilon x(k) + \Theta \Delta V(k) \quad (15)$$

donde

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{H_p} \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{(H_p-1)}B & CA^{(H_p-2)}B & \cdots & CA^{(H_p-H_c)}B \end{bmatrix}.$$

Definiendo  $\delta(k) = \bar{T}(k) - \Upsilon x(k)$ , es posible escribir la expresión (12) como,

$$\begin{aligned} J(k) &= [\Theta \Delta V(k) - \delta(k)]^T \bar{Q} [\Theta \Delta V(k) - \delta(k)] \\ &\quad + [\Delta V(k)]^T \bar{R} [\Delta V(k)], \end{aligned} \quad (16)$$

Es posible considerar a (16) como un problema de error de seguimiento, en el sentido de que permite "medir" la diferencia entre la trayectoria futura objetivo y la respuesta libre del sistema. Se puede reescribir la función objetivo (16) en la forma,

$$\begin{aligned} J(k) &= \Delta V(k)^T H \Delta V(k) - 2\Delta V(k)^T F \\ &\quad + \delta(k)^T \bar{Q} \delta(k), \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $H = \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R}$  y  $F = \Theta^T \bar{Q} \delta(k)$ . Para el caso sin restricciones, es posible encontrar el óptimo de  $\Delta V(k)$ , encontrando el gradiente de  $J(k)$  con respecto a  $\Delta V$  e igualándolo a cero, obteniéndose,

$$\Delta V(k)_{opt} = H^{-1} F. \quad (18)$$

De acuerdo a la estrategia del horizonte deslizante, se usan solo las primeras  $l$  filas de  $\Delta V(k)_{opt}$  generando,

$$\Delta v(k)_{opt} = \underbrace{[I_l, O_l, \dots, O_l]}_{H_c} \Delta V(k)_{opt}, \quad (19)$$

donde  $O_l$  es una matriz de ceros e  $I_l$  es una matriz identidad, ambas  $\in \mathbb{R}^{l \times l}$ . Por lo tanto, se puede reescribir a (19) como,

$$\Delta v(k)_{opt} = K_o r_i(k) - K_{CPM} x_i(k), \quad (20)$$

con  $K_o = H^{-1} \Theta^T \bar{Q} R_s$  y  $K_{CPM} = H^{-1} \Theta^T \bar{Q} \Upsilon$ . De hecho,  $K_o$  es idéntica a las últimas  $l$  columnas de  $K_{CPM}$ .

#### 4. PROBLEMA DE SINCRONIZACIÓN.

El concepto de sincronización permite definir la evolución de un grupo de robots móviles considerando el error de posición de seguimiento y el error que relaciona la posición real del robot con respecto a la posición del grupo de robots [12]. Se considera un conjunto finito de robots móviles diferenciales numerados de 1 a  $n$ . Los vecinos del  $i$ -ésimo robot corresponden a los robots etiquetados como  $i + 1$  e  $i - 1$ . La tarea de sincronización involucra tres señales de error: errores de posición, errores de sincronización y errores de acoplamiento.

El error de posición es la distancia entre el  $i$ -ésimo robot móvil y su posición deseada relacionada con una trayectoria de referencia variable en el tiempo, esto es,

$$e_i = \begin{bmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} - \alpha_{i1d} \\ \alpha_{i2} - \alpha_{i2d} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

donde el subíndice  $d$  hace referencia a los valores deseados.

El error de sincronización establece una relación en el marco coordenado fijo entre la posición del  $i$ -ésimo robot móvil y la posición de uno de sus vecinos cercanos y se define como,

$$\epsilon_i = \begin{bmatrix} \epsilon_{i1} \\ \epsilon_{i2} \end{bmatrix} = C_i e_i - C_{(i+1)} e_{(i+1)}, \quad (22)$$

donde  $C_i = \text{diag}\{c_{i1}, c_{i2}\}$  es una matriz invertible con  $c_{i1}, c_{i2} \in \mathbb{R}$  constantes. Finalmente, el error de acoplamiento describe la relación entre la posición y los errores de sincronización, definiéndose como,

$$E_i = \begin{bmatrix} E_{i1} \\ E_{i2} \end{bmatrix} = C_i e_i + \beta_i (\epsilon_i^- - \epsilon_{(i-1)}^-), \quad (23)$$

donde  $\beta_i = \text{diag}\{\beta_{i1}, \beta_{i2}\}$  con  $\beta_{i1}, \beta_{i2}$  constantes  $\in \mathbb{R}$ .

Basándose en [10], se considera de la evolución en el tiempo del error de acoplamiento (23) dada por,

$$E_i^+ = C_i E_i + \beta_i (\epsilon_i - \epsilon_{(i-1)}). \quad (24)$$

Sustituyendo (21) en (24) y reemplazando la dinámica del modelo discreto exacto de cada robot móvil, ecuación (4), se tiene que,

$$E_i^+ = C_i \alpha_i + 2C_i R(\gamma_i) \xi_i - C_i \alpha_{id}^+ + \beta_i (\epsilon_i - \epsilon_{(i-1)}), \quad (25)$$

donde  $\alpha_i = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}]^T$ ,  $\alpha_{id} = [\alpha_{i1d}, \alpha_{i2d}]^T$ ,  $\epsilon_i = [\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}]^T$  y  $\xi_i = [\xi_{i1}, \xi_{i2}]^T = [u_{i1}\psi(u_{i2})_i, u_{i2}\psi(u_{i2})_i]^T$ . La matriz  $R(\gamma)$  está dada por,

$$R(\gamma_i) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i) & -L \sin(\gamma_i) \\ \sin(\gamma_i) & L \cos(\gamma_i) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

con  $\gamma_i = \alpha_{i3} + \frac{T}{2} u_{i2}$ . Se propone un control auxiliar que depende de los valores pasados de  $u_{i2}$ , más precisamente,

$$\xi_i = \frac{1}{2} \bar{R}(\bar{\gamma})^{-1} C_i^{-1} \{ \vartheta_i - C_i \alpha_i + C_i \alpha_{id}^+ - \beta_i (\epsilon_i - \epsilon_{(i-1)}) \}, \quad (27)$$

donde  $\vartheta_i = [\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}]^T$  es un vector de nuevas entradas y,

$$\bar{R}(\bar{\gamma}_i) = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\gamma}_i) & -L \sin(\bar{\gamma}_i) \\ \sin(\bar{\gamma}_i) & L \cos(\bar{\gamma}_i) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

con  $\bar{\gamma}_i = \alpha_{i3} + \frac{T}{2} u_{i2}$ . Al sustituir la retroalimentación (27) en la dinámica (25) se tiene,

$$E_i^+ = C_i \alpha_i + C_i R(\gamma_i) \bar{R}(\bar{\gamma}_i)^{-1} C_i^{-1} \{ \vartheta_i - C_i \alpha_i + C_i \alpha_{id}^+ - \beta_i (\epsilon_i - \epsilon_{(i-1)}) \} - C_i \alpha_{id}^+ + \beta_i (\epsilon_i - \epsilon_{(i-1)}), \quad (29)$$

donde

$$R(\gamma) \bar{R}(\bar{\gamma})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i - \bar{\gamma}_i) & \sin(\gamma_i - \bar{\gamma}_i) \\ \sin(\gamma_i - \bar{\gamma}_i) & \cos(\gamma_i - \bar{\gamma}_i) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

la cual, utilizando la identidad trigonométrica  $\cos(x) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ , se puede reescribir como

$$R(\gamma) \bar{R}(\bar{\gamma})^{-1} = I_2 - \Delta_i = I_2 - \begin{bmatrix} \delta_{2i} & \delta_{1i} \\ -\delta_{1i} & \delta_{2i} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

donde  $I_2$  es la matriz identidad  $\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\delta_{1i} = \sin(\gamma_i - \bar{\gamma}_i)$ ,  $\delta_{2i} = 2 \sin^2\left(\frac{\gamma_i - \bar{\gamma}_i}{2}\right)$ . Entonces, la dinámica (29) puede escribirse como,

$$E_i^+ = \vartheta_i - C_i \Delta_i C_i^{-1} \{ \vartheta_i - C_i \alpha_i + C_i \alpha_{id}^+ - \beta_i (\epsilon_i - \epsilon_{(i-1)}) \}. \quad (32)$$

Si se escoge  $\vartheta_i$  como,

$$\vartheta_i = A_{E_i} E_i + B_{E_i} \bar{\vartheta}_i, \quad (33)$$

con  $\bar{\vartheta}_i = [\bar{\vartheta}_{i1}, \bar{\vartheta}_{i2}]^T$  un vector de nuevas entradas de y,

$$A_{E_i} = \begin{bmatrix} a_{E_{i1}} & 0 \\ 0 & a_{E_{i2}} \end{bmatrix} \quad y \quad B_{E_i} = \begin{bmatrix} b_{E_{i1}} & 0 \\ 0 & b_{E_{i2}} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

la dinámica del error de acoplamiento toma finalmente la forma,

$$E_i^+ = A_{E_i} E_i + B_{E_i} \bar{\vartheta}_i + \Gamma_i, \quad (35)$$

donde

$$\Gamma_i = -C_i \Delta_i C_i^{-1} \{ \vartheta_i - C_i \alpha_i + C_i \alpha_{id}^+ - \beta_i (\epsilon_i - \epsilon_{(i-1)}) \}. \quad (36)$$

Ya que  $\delta_{1i} \approx 0$  y  $\delta_{2i} \approx 0$ , entonces  $\Gamma_i \approx 0$  en (35) y la dinámica del error de acoplamiento se puede aproximar como,

$$E_i^+ = A_{E_i} E_i + B_{E_i} \bar{\vartheta}_i. \quad (37)$$

Esta dinámica tienen la misma estructura del sistema (10) con salida,

$$y_i = E_i, \quad (38)$$

Al sistema (37)-(38) se aplica la metodología del CPM descrita en la sección 3 con el objetivo de lograr que el error  $E_i$  converja a 0 penalizando, al mismo tiempo, el esfuerzo de las señales  $\vartheta_{i1}$  y  $\vartheta_{i2}$  (y, por lo tanto, de las señales  $u_{i1}$  y  $u_{i2}$  con cada robot  $i$ ).

Es importante señalar que, para asegurar la unicidad de las señales de entrada de cada robot, cada una de ellas se obtiene a partir de las señales  $\xi_{i1}$  y  $\xi_{i2}$  como,

$$u_{i2} = \frac{2}{T} \arcsin(\xi_{i2}), \quad u_{i1} = \frac{\xi_{i1}}{\psi(u_{i2})_i}, \quad (39)$$

con

$$\psi(u_{i2})_i = \frac{\sin(\frac{T}{2}u_{i2})}{u_{i2}}. \quad (40)$$

## 5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN NUMÉRICA.

Se realizan simulaciones numéricas respetando las especificaciones del Robot móvil Turtlebot 3 Burger del fabricante Robotis; velocidad máxima traslacional:  $0.22 \text{ m/s}$  y velocidad máxima rotacional:  $2.84 \text{ rad/s}$ .

Primero, se consideró el caso de regulación de un solo robot móvil a un punto objetivo fijo (referencia fija). El periodo de muestreo utilizado fue de  $T = 0.1s$  con un tiempo de simulación total de  $150s$ . En la aplicación del CPM se utilizan las matrices  $A_z = \text{diag}\{0.32, 0.32\}$  y  $B_z = \text{diag}\{0.025, 0.025\}$ , con horizontes  $H_p = 10$  y  $H_c = 3$ , así como matrices de ponderación  $Q = \text{diag}\{2, 2\}$  y  $R = \text{diag}\{3, 3\}$ . Las condiciones iniciales del robot fueron  $\alpha_1(0)$ ,  $\alpha_2(0) = 0$  y  $\alpha_3(0) = 60 \text{ deg}$  mientras que el punto objetivo se escogió como  $r = [3m \ 3m]^T$  respecto al marco fijo  $(X, Y)$ . Las ganancias resultantes calculadas por el CPM para el experimento fueron,

$$K_o = \begin{bmatrix} 0.1156 & 0 \\ 0 & 0.1156 \end{bmatrix},$$

$$K_{CPM} = \begin{bmatrix} 0.0524 & 0 & 0.1156 & 0 \\ 0 & 0.0524 & 0 & 0.1156 \end{bmatrix}.$$

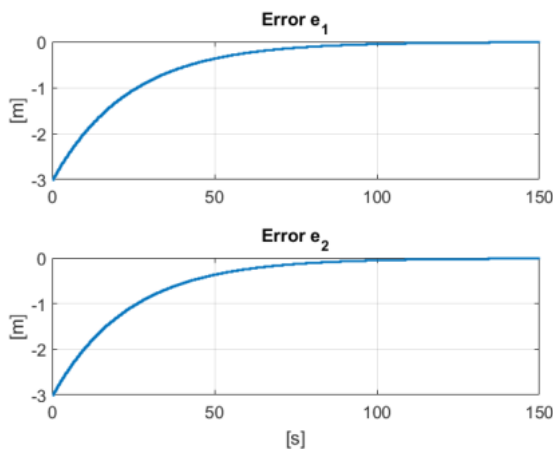


Figura 2. Errores de posición, caso de regulación.

Como se observa en la Figura 2 los errores de posición convergen a cero por lo cual se cumple el objetivo de control. También se tiene un comportamiento suave y

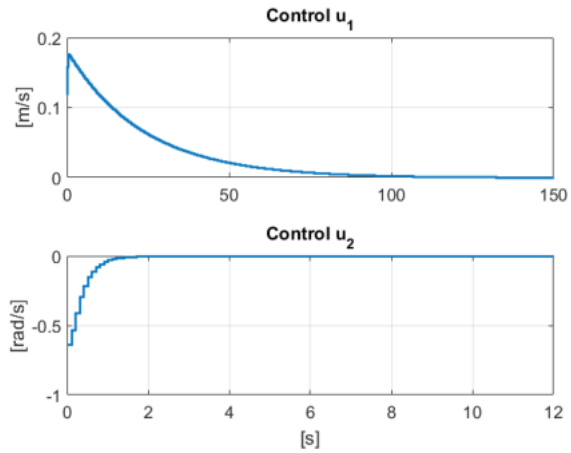


Figura 3. Señales de entradas de control del robot móvil.

convergente a cero de las señales de entrada  $u_1$  y  $u_2$  como se observa en la Figura 3.

Para el problema de sincronización se utilizaron tres robots móviles Turtlebot 3 Burger, cada uno de los cuales deben seguir una trayectoria tipo flor de tres pétalos mientras que estas se encuentran en un ángulo de formación respecto al origen.

Al igual que en la simulación para el caso de regulación se utilizó un periodo de muestreo de  $T = 0.1s$  pero con un tiempo de simulación total de  $80s$ . En la implementación del CPM se utilizaron las matrices  $A_{E_i} = \text{diag}\{0.2, 0.2\}$  y  $B_{E_i} = \text{diag}\{0.3, 0.3\}$  con horizontes  $H_p = 8$ ,  $H_c = 3$  junto con matrices de ponderación  $Q = \text{diag}\{2, 2\}$  y  $R = \text{diag}\{6, 6\}$ . Las condiciones iniciales para cada robot fueron  $\alpha_{11}(0) = 3.6m$ ,  $\alpha_{12}(0) = 1.4m$ ,  $\alpha_{21}(0) = 3.2m$ ,  $\alpha_{22}(0) = 2.0m$ ,  $\alpha_{31}(0) = 2.2m$ ,  $\alpha_{32}(0) = 2.8m$ . El ángulo de orientación inicial;  $\alpha_{13}(0) = \alpha_{23}(0) = \alpha_{33}(0) = 60deg$ . Se escogieron también los parámetros  $C_1 = C_2 = C_3 = \text{diag}\{0.8, 0.8\}$ , y  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \text{diag}\{-0.3, -0.3\}$ . Las ganancias resultantes calculadas por el CPM para el experimento fueron,

$$K_o = \begin{bmatrix} 0.5414 & 0 \\ 0 & 0.5414 \end{bmatrix},$$

$$K_{CPM} = \begin{bmatrix} 0.1304 & 0 & 0.5414 & 0 \\ 0 & 0.1304 & 0 & 0.5414 \end{bmatrix}.$$

En la Figura 4 se muestra el recorrido realizado por los robots móviles en el plano donde se cumple el objetivo de control de sincronización. En la Figura 5 se observan los errores obtenidos. Para todos los casos se logra la convergencia a cero de las señales indicando que se cumple con la sincronización de los robots móviles.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una alternativa para resolver el problema de regulación para un robot móvil y de formación con sincronización de un grupo de robots móviles utilizando el CPM. En el caso de regulación de un solo robot fue posible, para un punto inicial dado, alcanzar un punto de referencia situado a cualquier distancia objetivo con la dinámica deseada y un control ponderado, lo cual no es posible al implementar controladores con

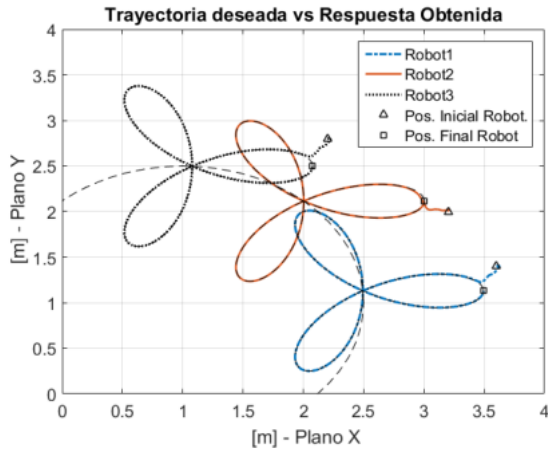


Figura 4. Esquema de Sincronización, desplazamiento en el plano de los robots móviles.

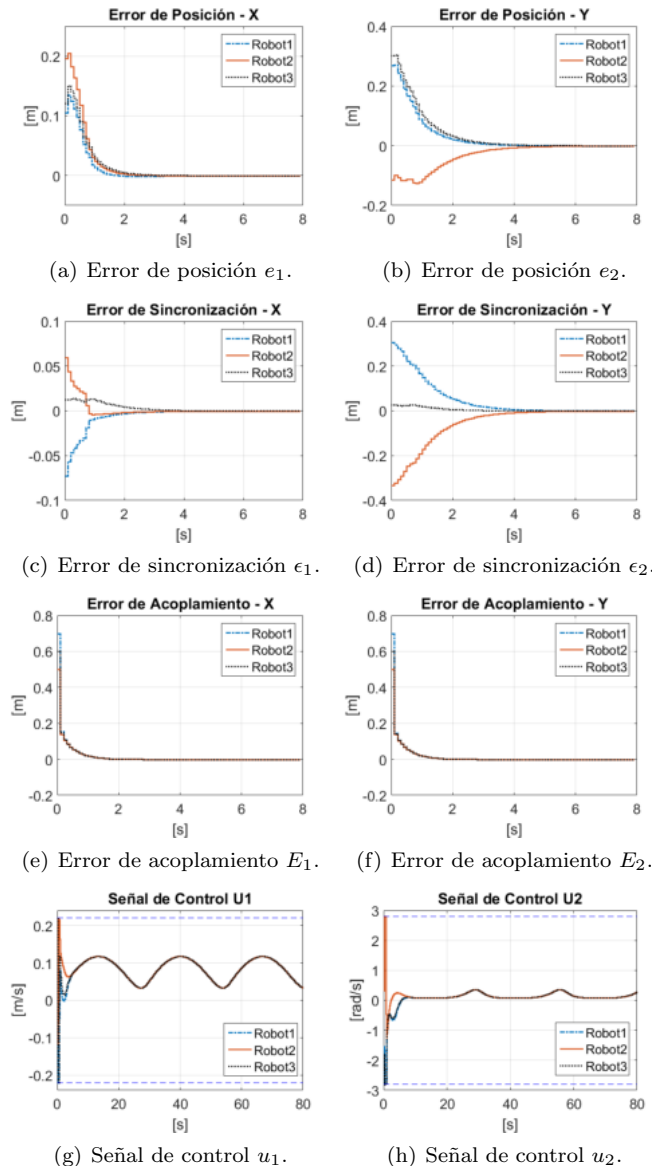


Figura 5. Señales de error y control en el Esquema de Sincronización.

ganancia de tipo proporcional. En el caso de formación con sincronización, la señal del error de acoplamiento fue controlada a través del CPM, con una velocidad mayor de convergencia y un esfuerzo en el control suave y acotado. Un trabajo futuro contempla desarrollar un esquema robusto a perturbaciones e incertidumbres en el modelo de los robots móviles.

REFERENCIAS

- [1] Arteaga-Escamilla M., Castro-Linares R., y Álvarez-Gallegos J. (2015). Teleoperación de un robot móvil con evasión de obstáculos. *Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2015.*, pp. 588-593.
- [2] Balch, T. and Arkin, R. C. (1998). Behavior-based formation control for multirobot teams. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(6): 926–939.
- [3] Camacho, E. F., & Alba, C. B. (2013). Model predictive control. *Springer Science & Business Media*.
- [4] De Wit, C. C., Siciliano, B., & Bastin, G. (Eds.). (2012). Theory of robot control. *Springer Science & Business Media*.
- [5] Desai, J. P., Ostrowski, J. P. and Kumar, V. (2001). Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(6): 905–908.
- [6] Maciejowski, J. M. (2002). Predictive control: with constraints. *Pearson education*, pp. 36–97.
- [7] Martínez-Zúñiga, O., Velasco-Villa, M., & Castro-Linares, R. (2013). Control de Seguimiento Práctico de un Robot Móvil Tipo (2, 0) en Tiempo Discreto. *Congreso Nacional de Control Automático 2013*, pp. 610-615.
- [8] Niño-Suárez, P., Villa, M. V., & Bricaire, E. A. (2006). Discretización exacta de un robot móvil con retardo de transporte. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 16(1), 43-53.
- [9] Prett, D. M., & García, C. E. (2013). Fundamental process control: Butterworths series in chemical engineering. *Butterworth-Heinemann*, pp. 30–40.
- [10] Rosales-Hernández, F., Velasco-Villa, M., Castro-Linares, R., Del Muro-Cuellar, B., & Hernández-Pérez, M. A. (2013). Discrete-time synchronization strategy for input time-delay mobile robots. *Journal of the Franklin Institute*, 350(10), 2911-2935.
- [11] Sira-Ramírez, H., & Castro-Linares, R. (2010). Trajectory tracking for non-holonomic cars: A linear approach to controlled leader-follower formation. *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 350(10), (pp. 546-551).
- [12] Sun, D., Wang, C., Shang, W., & Feng, G. (2009). A synchronization approach to trajectory tracking of multiple mobile robots while maintaining time-varying formations. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(5), 1074-1086.
- [13] Tan, K. H. and Lewis, M. A. (1996). Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control. *Proceedings IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Osaka, Japan*, pp. 132–139.
- [14] Velasco-Villa, M., Aranda-Bricaire, E. and Orosco-Guerrero, R. (2009). Discrete-time modeling and path tracking for a wheeled mobile robot. *Computación y Sistemas*, 13(2): 142–160.