

# Euler-Lagrange approach for modeling water pipelines with leaks

Abner David Sánchez-Jiménez\* Lizeth Torres\*\*  
Francisco Ronay López-Estrada\*

\* *Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez.*

\*\* *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.*

---

**Abstract:** This paper presents the modeling of water pipelines with leaks using the so-called Euler-Lagrange approach. The modeling is carried out taking into account the typical assumptions of the rigid water column theory, which considers that the fluid flowing in a pipeline is incompressible and that the wall of a pipeline is rigid. Some numerical results are presented to show the numerical behavior of a leaky pipeline model resulting from the use of the Euler-Lagrange approach. The numerical simulations were carried out taking into account the characteristics of a test apparatus located at Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez.

*Keywords:* Pipeline Modeling, leak detection, Euler-Lagrange approach.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La demanda de agua para fines domésticos e industriales ha obligado a especialistas de diversas disciplinas a redoblar esfuerzos para optimizar su uso. Un aspecto crucial para lograr este objetivo es la reducción de pérdidas en sistemas de tuberías (STs), que son causadas principalmente por fugas que se originan por diversos factores como la corrosión, sobre-presión, desastres naturales o por fallas en los elementos que componen estos sistemas. Existen varios métodos para abordar el diagnóstico de fugas en tuberías de distribución de agua. Por ejemplo, los métodos basados en modelos hidráulicos (Verde and Torres, 2017) o los métodos basados en modelos híbridos, los cuales utilizan conjuntamente datos de campo y modelos hidráulicos (Pérez et al., 2011; Soldevila et al., 2016).

El software más utilizado para el modelado de redes de distribución de agua es EPANET (Rossman, 2000). Se basa en el método del gradiente para resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales que describen el flujo en estado estacionario en una sistema de distribución de agua (Todini and Pilati, 1988). Dado que este software no permite modelar el flujo en estado transitorio, cuyo análisis es de suma importancia para analizar el comportamiento del flujo ante eventos anormales, es necesario desarrollar herramientas con bajo costo computacional que simulen la dinámica del flujo cuando ocurren fallas, particularmente cuando ocurren las fugas (Hernández et al., 2017, 2018).

Un enfoque de modelado que ha tenido mucho éxito, sobre todo en el modelado de sistemas robóticos, es el formalismo de Euler-Lagrange. Este enfoque se basa en conceptos asociados a la energía, lo que hace posible obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento de cualquier sistema físico mediante variables generalizadas

de energía (Wellstead, 2000). Este enfoque ha sido ampliamente aplicado a diferentes sistemas debido a que en estos están presentes energías a lo cual el sistema se describe mediante variables generalizadas de energía tales como en sistemas mecánicos (Cheng and Chen, 2016), sistemas eléctricos (Baleanu et al., 2019), estructuras civiles (Enríquez-Zárate et al., 2019), sistemas MEMS (Abarca-Jiménez et al., 2016), entre otros. Pero también para crear algoritmos de control, diagnóstico y optimización (Avila-Becerril et al., 2016; Scola et al., 2018; Ibrahim and Elmandouh, 2020; Su et al., 2019; Tchon, 2021). Para el caso de tuberías sin fallas, este formalismo ya ha sido aplicado considerando ciertas suposiciones sobre el flujo (Jeltsema and Scherpen, 2009). Para el caso de tuberías con fallas, se han propuesto modelos con un enfoque también basado en conceptos de energía (Torres and Besançon, 2019; Rojas et al., 2019): el enfoque Hamiltoniano.

En este trabajo se propone modelar tuberías con fugas utilizando el formalismo de Euler-Lagrange y la teoría de la columna rígida de agua, es decir, se asume que el fluido que fluye en la tubería es incompresible y que las paredes de la tubería no son elásticas, sino rígidas (Nault and Karney, 2016). Con el fin de ilustrar el proceso de modelado, se presentan resultados numéricos que se llevaron a cabo tomando en cuenta las características de una planta piloto ubicada en Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, la cual cuenta con una tubería principal y dos ramales.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La Sección 2 presenta las características principales del enfoque a utilizar. Las Secciones 3 y 4 describen las variables involucradas en el modelado. Las Secciones 5 y 6 muestran, respectivamente, el procedimiento de modelado y los resultados numéricos. Finalmente, la Sección 7 presenta las conclusiones.

---

<sup>1</sup> Autor de correspondencia: ftorreso@iingen.unam.mx

## 2. PRELIMINARES

El enfoque de Euler-Lagrange acentúa la física de los sistemas al resaltar el intercambio de energía y disipación entre los elementos que componen la red de distribución de agua. Las ventajas de utilizar el enfoque de Euler-Lagrange se pueden resumir de la siguiente manera:

- Es un enfoque modular que permite modelar sistemas a gran escala por bloques.
- Es un enfoque basado en la energía como una cantidad universal.
- Es un enfoque que permite visualizar los sistemas físicos como un conjunto de elementos que intercambian energía.
- Es un enfoque que permite un análisis sistemático a través de las propiedades de las funciones de interconexión y energía entre sistemas.

El enfoque basado en energías describe a la potencia total entregada a un sistema como el resultado del producto de las variables generalizadas de esfuerzo ( $e$ ) y flujo ( $f$ ), mientras que la energía total entregada al sistema es la integral, con respecto al tiempo, de la potencia:  $E = \int_0^t e f dt$ .

La integral del esfuerzo con respecto al tiempo es el movimiento  $\varphi = \int_0^t e dt$  también conocida como acumulación de esfuerzo o momento, y la integral del flujo con respecto al tiempo es la continuidad  $q = \int_0^t f dt$  también conocida como acumulación de flujo o desplazamiento. Estas variables, en conjunto con los almacenadores y disipadores de energía, conforman leyes constitutivas de relación de energía. Los almacenadores de energía se dividen en almacenadores de flujo, mejor conocidos como almacenadores cinéticos, almacenadores de esfuerzo, mejor conocido como almacenadores de potencia, y disipadores. Los almacenadores cinéticos se caracterizan por leyes constitutivas que relacionan flujo y momento [ $f(\varphi)$  o  $\varphi(f)$ ], los almacenadores de potencia se caracterizan por leyes constitutivas que relacionan esfuerzo y desplazamiento [ $e(q)$  o  $q(e)$ ], y los disipadores se caracterizan por leyes constitutivas que relacionan esfuerzo y flujo [ $e(f)$  o  $f(e)$ ].

El primer paso para modelar con el enfoque de Euler-Lagrange es definir las energías y fuerzas que actúan en el sistema para generar movimiento, las cuales son dependientes de las leyes constitutivas. La energía cinética  $\mathcal{T}(\varphi) = \int f(\varphi) d\varphi$ , donde el integrando  $f(\varphi)$  es la ley constitutiva en función del momento, la energía potencial  $\mathcal{V}(q) = \int e(q) dq$ , donde el integrando  $e(q)$  es la ley constitutiva en función del desplazamiento, el contenido  $\mathcal{D}(f) = \int e(f) df$ , donde el integrando  $e(f)$  es la ley constitutiva en función del flujo, la co-energía cinética  $\mathcal{T}^*(f) = \int \varphi(f) df$ , donde el integrando  $\varphi(f)$  es la ley constitutiva en función del flujo, la co-energía potencial  $\mathcal{V}^*(e) = \int q(e) de$ , donde el integrando  $q(e)$  es la ley constitutiva en función del esfuerzo y el contenido  $\mathcal{G}(e) = \int f(e) de$ , donde el integrando  $f(e)$  es la ley constitutiva en función del esfuerzo.

El segundo paso del enfoque de Euler-Lagrange es formar el Lagrangiano, el cual es la diferencia de la co-energía

cinética total y la energía potencial total en términos de variables generalizadas:

$$\mathcal{L}(q_n, \dot{q}_n) = \mathcal{T}^*(\dot{q}_n) - \mathcal{V}(q_n), \quad (1)$$

donde  $q_n$  es la coordenada generalizada y  $\dot{q}_n$  es la velocidad generalizada con  $n$  grados de libertad. El tercer paso es obtener la ecuación de Euler-Lagrange con base al Lagrangiano de la siguiente manera (Ortega et al., 2013):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q_n, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q_n, \dot{q}_n)}{\partial q_n} = \mathcal{Q}_n, \quad (2)$$

Las fuerzas externas  $\mathcal{Q}_n$  pueden representar una acción de control, las fuerzas de disipación y las fuerzas que surgen de la interacción de un sistema con su entorno (Ortega et al., 2013):

$$\mathcal{Q}_n = \mathcal{U} + \mathcal{W} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_n}(\dot{q}_n), \quad (3)$$

donde  $\mathcal{U}$  denota una entrada exógena como una señal de control,  $\mathcal{W}$  es una señal externa que modela los efectos de las perturbaciones,  $-\partial \mathcal{D}(\dot{q}_n)/\partial \dot{q}_n$  son las fuerzas disipativas.

En la siguiente sección se estudian las variables y las leyes constitutivas necesarias para el modelado de una tubería sin fuga. Mientras que la Sección 4 presenta el modelado de una tubería con fuga ejecutando los tres pasos mencionados del enfoque de Euler-Lagrange.

## 3. VARIABLES DE ENERGÍA Y LEYES CONSTITUTIVAS: TUBERÍA SIN FUGA

En los sistemas hidráulicos la presión ( $P$ ) y el caudal ( $Q$ ) son las variables de esfuerzo y flujo, respectivamente, mientras que las variables para la acumulación de esfuerzo y la acumulación de flujo son el momento ( $\varphi_P$ ) y el volumen ( $V$ ), las cuales se definen de la siguiente manera:

$$\varphi_P := \int P dt, \quad V := \int Q dt. \quad (4)$$

las variables de flujo ( $\dot{V}$ ) y movimiento ( $\dot{\varphi}_P$ ) son las coordenadas generalizadas del sistema para el formalismo de Euler-Lagrange. Las relaciones entre el esfuerzo y su acumulación, así como el flujo y su acumulación, también pueden expresarse como ecuaciones diferenciales, es decir

$$\dot{\varphi}_P := P, \quad \dot{V} := Q. \quad (5)$$

En dinámica de fluidos, por razones prácticas o para análisis dimensionales, se utiliza la altura piezométrica en lugar de la presión. La altura piezométrica ( $H$ ) se expresa como:

$$H = (P/\rho g) + z, \quad (6)$$

donde  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] es densidad,  $g$  [m/s<sup>2</sup>] es la aceleración de la gravedad y  $z$  [m] es elevación.  $H$  se mide con respecto a una presión de referencia, que por lo general es la presión atmosférica. La presión de referencia es análoga a tierra en los sistemas eléctricos. Por otro lado, si se miden dos alturas piezométricas en dos coordenadas espaciales diferentes, es decir, hay una distancia intermedia, la diferencia de alturas ( $\Delta H$ ) se llama pérdida de la carga. Por esta razón, las ecuaciones (4) y (5) también se

expresan en términos de caída de presión de la siguiente manera:

$$\varphi_H := \int \Delta H dt, \dot{\varphi}_H := \Delta H. \quad (7)$$

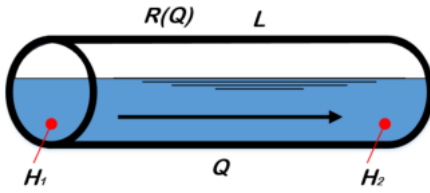


Figura 1. Diagrama de una tubería.

Considerando la teoría de la columna rígida de agua (Nault and Karney, 2016), es decir, asumiendo que el fluido es incompresible y que las paredes de la tubería son rígidas, una tubería se puede modelar como un elemento inductivo ( $L$ ), es decir un almacenador cinético, en serie con una resistencia dependiente del flujo volumétrico  $R(Q)$ , es decir un disipador, como se observa en la Figura 1. En consecuencia, hay dos leyes constitutivas asociadas a ambos elementos: una correspondiente al almacenamiento de la energía cinética, y otra correspondiente a la disipación. Estas se expresan de la siguiente manera:

$$Q = \frac{\varphi_H}{L}, H = R(Q)Q, \quad (8)$$

donde  $Q$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ] es el caudal o gasto (flujo),  $\varphi_H$  [ $\text{m}\cdot\text{s}$ ] es el momento hidráulico (momento),  $L$  [ $\text{s}^2/\text{m}^2$ ] es la inercia o inductancia hidráulica,  $H$  [ $\text{m}$ ] es la altura piezométrica (esfuerzo),  $V$  [ $\text{m}^3$ ] es el volumen y  $R(Q)$  [ $\text{s}/\text{m}^2$ ] es la resistencia hidráulica.

Dado que no hay almacenamiento de energía potencial en el sistema físico debido a que el almacenador de energía potencial se representa como tanques situados en los extremos de la tubería relacionados a la presión de entrada y salida de tal manera que se consideran de manera implícita en los nodos de presión, por lo tanto, sólo se requiere de la obtención del contenido y de la energía cinética.

A continuación, se describe cómo se calculan  $L$  y  $R(Q)$  en función de los parámetros físicos de una tubería hidráulica.

### 3.1 Disipación de la energía por fricción

La energía total que se disipa en una tubería es la suma de varias pérdidas hidráulicas: las pérdidas estacionarias y las pérdidas transitorias (Adamkowski and Lewandowski, 2006). Dado que en esta contribución se asumen las suposiciones de la teoría de la columna rígida de agua, las pérdidas transitorias no se toman en cuenta (Nault and Karney, 2016).

Las pérdidas estacionarias se componen de dos tipos de pérdidas: de pérdidas mayores, que son causadas por la fricción de las partículas del fluido entre sí y contra las paredes de la tubería, y de pérdidas menores, que son causadas por la disipación de energía mecánica cuando

la configuración o la dirección del flujo cambia bruscamente debido a la presencia de accesorios como codos, conexiones y válvulas. En esta contribución se asume que la tubería que se está modelando tiene accesorios, por lo que para pérdidas menores se calcula una longitud computacional, es decir, una "longitud total" que integra tanto la longitud física de la tubería como la longitud equivalente de los accesorios para obtener pérdidas equivalentes a los accesorios mediante el método Levenberg-Marquardt (Santos-Ruiz et al., 2020). Al combinar pérdidas menores con pérdidas mayores se puede despejar la longitud equivalente que produce una pérdida de carga por fricción (pérdida mayor) igual a la pérdida por carga local (pérdida menor) correspondiente, por lo que las pérdidas menores se expresan por medio de longitudes.

Las pérdidas mayores dependen de la velocidad de flujo a través de la tubería y representan la disipación causada por el efecto de la viscosidad del agua cerca de la pared de la tubería. La resistencia hidráulica debida a las pérdidas mayores se puede caracterizar por una ley constitutiva que relaciona la presión y la velocidad de flujo: la ecuación de Darcy-Weisbach, que se escribe de la siguiente manera:

$$\Delta H_R = \frac{\Delta x f(Q)}{2gDA^2} Q^2, \quad (9)$$

donde  $\Delta x$  es la longitud de la tubería,  $A$  es el área transversal,  $D$  es el diámetro,  $f(Q)$  es el factor de fricción, que depende del número de Reynolds,  $\text{Re}(Q) = Q \cdot D / \nu \cdot A$ , que a su vez depende del caudal y de la viscosidad (denotada por  $\nu$ ). El factor de fricción se puede calcular utilizando la ecuación Colebrook. Desafortunadamente, esta ecuación no es explícita, por lo que se puede usar alguna aproximación para este propósito, por ejemplo, la ecuación de Swamee-Jain, que es adecuada cuando el número de Reynolds se encuentra en un régimen turbulento rugoso ( $\text{Re}(Q) > 4000$ ):

$$f(Q) = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}(Q)^{0.9}} \right) \right]^2}, \quad (10)$$

donde  $\varepsilon$  es la rugosidad relativa,  $\varepsilon = k/D$  donde  $k$  es la rugosidad absoluta del material de la tubería.

Considerando la estructura de la ley constitutiva (9), la resistencia hidráulica se puede definir como  $R(Q) = (Q \Delta x f(Q)) / (2gDA^2)$ , de tal manera que (9) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\Delta H_R = R(Q)Q. \quad (11)$$

### 3.2 Almacenamiento de la energía cinética

La ley constitutiva asociada a la inercia, también llamada inercia hidráulica o inductancia hidráulica ( $L$ ), se expresa de la siguiente manera (Maré, 2016):

$$\Delta H_L = \frac{\Delta x}{gA} \dot{Q}_L. \quad (12)$$

Si se define  $L = (\Delta x) / (gA)$  y se integra (12), se tiene que la ley constitutiva asociada a la inercia también puede expresarse como en (8):

$$\varphi_H = LQ_L \quad \text{ó} \quad Q_L = \frac{\varphi_H}{L}. \quad (13)$$

#### 4. VARIABLES DE ENERGÍA Y LEYES CONSTITUTIVAS: TUBERÍA CON FUGA

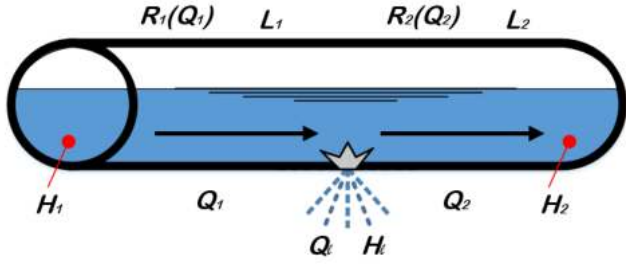


Figura 2. Diagrama de una tubería con fuga.

Una tubería con fuga, bajo las suposiciones de la teoría de la columna rígida de agua, se modela como dos subsistemas. Un subsistema, con un elemento inductivo  $L_1$  en serie con una resistencia  $R_1(Q_1)$ , representa el comportamiento del flujo antes de la fuga, y otro subsistema, con un elemento inductivo  $L_2$  en serie con una resistencia  $R_2(Q_2)$ , representa el comportamiento del flujo después de la fuga como se observa en la Figura 2.

##### 4.1 Disipación de la energía por fricción

La resistencia hidráulica en la primera y segunda sección es diferente y se puede expresar de la siguiente manera, respectivamente:

$$R_1(Q_1) = \frac{Q_1 f(Q_1) \Delta x_1}{2g D_1 A^2}, \quad R_2(Q_2) = \frac{Q_2 f(Q_2) \Delta x_2}{2g D_2 A^2},$$

donde  $Q_1$  es el caudal de entrada y  $Q_2$  es el caudal de salida.

##### 4.2 Almacenamiento de la energía cinética

La inercia para cada sección de la tubería también es diferente. Ambas inercias se definen de la siguiente manera:

$$L_1 = \frac{\Delta x_1}{gA}; \quad L_2 = \frac{\Delta x_2}{gA} \quad (14)$$

##### 4.3 Disipación por fuga

En una tubería con fuga, además de la disipación de energía asociada a la fricción, es decir asociada a  $R_1(Q_1)$  y  $R_2(Q_2)$ , se disipa energía por la pérdida de agua. La resistencia hidráulica de fuga se puede caracterizar por la ecuación de Torricelli como:

$$H_\ell = \frac{1}{2gC_\ell^2 A_\ell^2} Q_\ell^2 = \frac{1}{2gC_\ell^2 A_\ell^2} (Q_1 - Q_2)^2 \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2gC_\ell^2 A_\ell^2} (Q_1^2 - 2Q_1 Q_2 + Q_2^2),$$

donde  $C_\ell$  es el coeficiente de descarga,  $A_\ell$  es el área de la fuga,  $Q_\ell$  es el caudal de fuga equivalente a la diferencia de caudales entre la posición de la fuga. A partir de la ley constitutiva (15), se puede definir la resistencia debida a la fuga de la siguiente manera:

$$R_\ell = \frac{1}{2gC_\ell^2 A_\ell^2}, \quad (16)$$

tal que la ley constitutiva se puede re-escribir como

$$H_\ell = R_\ell(Q_\ell) Q_\ell^2. \quad (17)$$

#### 5. MODELADO DE UNA TUBERÍA

Para una tubería de agua las coordenadas y velocidades generalizadas son el volumen  $V \in \mathbb{R}^n$  y el caudal  $\dot{V} \in \mathbb{R}^n$ , de tal modo que la ecuación de Euler Lagrange, es decir la ecuación (2), para una tubería está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}}(V, \dot{V}) \right) = \mathcal{U} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{V}}(\dot{V}), \quad (18)$$

donde el Lagrangiano involucra la función de co-energía cinética con respecto al caudal  $\mathcal{T}^*(\dot{V})$ , se expresan las fuerzas de disipación  $\mathcal{D}(\dot{V})$  y la función de energía potencial con respecto al volumen  $\mathcal{V}(V)$  se omite, tal como se menciona en la sección 3.

##### 5.1 Tubería sin fuga

La co-energía cinética se puede calcular de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}^*(Q) = \int L Q dQ = \frac{L Q^2}{2}. \quad (19)$$

La función del estado de disipación, o contenido, puede calcularse a partir de (9). Así pues, la fuerza de disipación está dada por

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{V}}(\dot{V}) = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial Q}(Q) = R(Q) Q^2. \quad (20)$$

Al calcular cada término involucrado en la función Lagrangiana se sustituyen en (18) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(V, Q)}{\partial Q} = LQ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(V, Q)}{\partial Q} \right) = L\dot{Q}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}(V, Q)}{\partial V} = 0,$$

y considerando la fuerza de disipación dada por la ecuación (20), así como la fuerza exógena  $\mathcal{U} = H_1 - H_2$ , la ecuación de Euler-Lagrange para una tubería sin fallas es

$$L\dot{Q} = (H_1 - H_2) - R(Q) Q^2 \quad (21)$$

##### 5.2 Tubería con fuga

La co-energía cinética para una tubería con una fuga se puede calcular de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}^*(Q) = \frac{L_1 Q_1^2}{2} + \frac{L_2 Q_2^2}{2}. \quad (22)$$

Al calcular los términos de la ecuación de Euler-Lagrange para  $Q_1$ , incluidas las fuerzas de disipación, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}(V, Q)}{\partial Q_1} = L_1 Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(V, Q)}{\partial Q_1} \right) = L_1 \dot{Q}_1;$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}(Q)}{\partial Q_1} = R_1(Q_1) Q_1 + R_\ell Q_\ell^2. \quad (23)$$

Mientras que los términos de la ecuación de Euler-Lagrange para  $Q_2$  son:

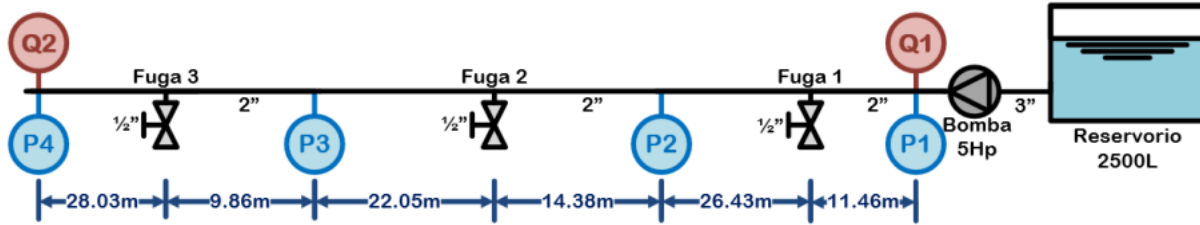


Figura 3. Diagrama de instrumentación de la red de distribución de agua del ITTG

$$\frac{\partial \mathcal{L}(V, Q)}{\partial Q_2} = L_2 Q_2; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(V, Q)}{\partial Q_2} \right) = L_2 \dot{Q}_2;$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}(Q)}{\partial Q_2} = R_2(Q_2) Q_2 - R_\ell Q_\ell^2. \quad (24)$$

Al integrar todos estos términos, la ecuación de Euler-Lagrange para cada subsistema que representa a una tubería con fuga se da a continuación:

$$L_1 \dot{Q}_1 = H_1 - R_1(Q_1) Q_1 - R_\ell Q_\ell^2, \quad (25)$$

$$L_2 \dot{Q}_2 = -H_2 - R_2(Q_2) Q_2 + R_\ell Q_\ell^2. \quad (26)$$

## 6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para mostrar la respuesta numérica de los modelos de una tubería con y sin fuga se utilizan los parámetros de la planta piloto del Laboratorio de Hidroinformática del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez. esta planta es una red en serpentín que cuenta con 2 válvulas de paso en los ramales con retorno al deposito que pueden ser abiertas o cerradas según la configuración de la red para el caso de estudio, un total de 5 válvulas que simulan fugas conectadas a mangueras de retorno al deposito, 2 sensores de flujo másico Coriolis ROTAMASS Total Insight para medición de  $Q_1$  y  $Q_2$ , 2 sensores de flujo magnético YOKOGAWA ADMAG AXR para la medición de  $Q_3$  y  $Q_4$  en las salidas de los ramales, 8 sensores transmisores industriales de presión YOKOGAWA EJA530 colocados en los nodos, reservorio de 2500 litros y una Bomba hidráulica centrífuga de 5 HP. Para el caso de estudio se toma en cuenta la línea principal despreciando los ramales mediante las válvulas mencionadas como se muestra en la Figura 3, esto debido a que se considera una tubería para el caso de estudio sin mencionar que se encuentran a 1m de altura de la línea principal. Para las longitudes de la tubería se consideran longitudes equivalentes debido a accesorios como se planteo en la sección 3.1, la longitud física del la tubería es de 84.58m y la longitud computacional es de 112.21m lo cual resulta en una longitud equivalente ( $L_e$ ) de 27.63m. La línea principal de la red ITTG cuenta con 9 codos de 180 grados o retornos de flujo por lo que la longitud por accesorio es:

$$L_{retorno} = \frac{L_e}{9} = \frac{27.63\text{m}}{9} = 3.07\text{m}, \quad (27)$$

Se agrego  $L_{retorno}$  según las secciones de la red en serpentín (Figura 4) para obtener las longitudes de la

Figura 3. Los parámetros a utilizar se presentan en la Tabla 1 considerando una frecuencia de la bomba de 20 Hz con presiones de entrada y salida  $H_1 = 2.9$  m y  $H_4 = 1.43$  m.

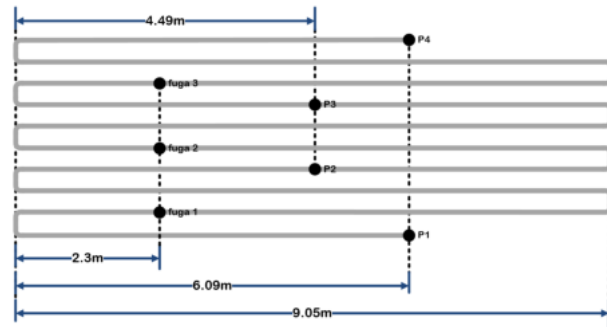


Figura 4. Diagrama de la vista superior de la red ITTG

Se ejecuto el método de solución `ode23` de MATLAB para resolver las ecuaciones diferenciales del modelo sin fuga (21) y del modelo con fuga (25, 26). La fuga se caracterizó por un coeficiente  $\lambda = \sqrt{2g} C_\ell A_\ell$ , el cual se obtuvo despejando (15) con respecto al caudal de fuga. Para modelar un crecimiento gradual el coeficiente  $\lambda$  se define mediante la función sigmoide:

$$\lambda(t) = \frac{1}{1 + e^{-7t}}, \quad (28)$$

esta función forma parte de  $R_\ell(Q)$ , en donde  $\lambda^2$  es precisamente el denominador de la disipación que se manifiesta cuando ocurre la fuga (16).

Tabla 1. Parámetros de la tubería.

Parámetro	Valor
Longitud $\Delta x$	112.21 m
Área transversal $A$	0.0019 m <sup>2</sup>
Rugosidad Relativa $\varepsilon$	0.000247
Viscosidad Cinemática $\nu$	8.03x10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s
Aceleración de la gravedad $g$	9.782999 m/s <sup>2</sup>
Distancia de Presión 1 a fuga 1 $\Delta x_1$	11.46 m
Distancia de fuga 1 a Presión 2 $\Delta x_2$	26.43 m
Distancia de Presión 2 a fuga 2 $\Delta x_3$	14.38 m
Distancia de fuga 2 a Presión 3 $\Delta x_4$	22.05 m
Distancia de Presión 3 a fuga 3 $\Delta x_5$	9.86 m
Distancia de fuga 3 a Presión 4 $\Delta x_6$	28.03 m

En la Fig. 5 se muestra el comportamiento de los caudales  $Q_1$  y  $Q_2$  obtenidos en la simulación con un tiempo de simulación de 100 s y con un tiempo de muestreo de  $t_s = 0.1$  s. La fuga se simuló en  $t_f = 50$  s ocupando las

## REFERENCIAS

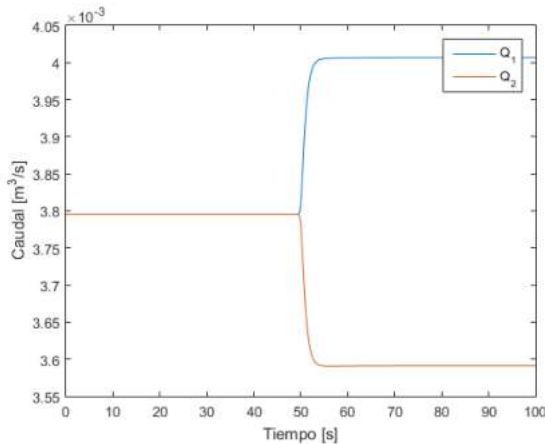


Figura 5. Caudales por fuga en válvula 2 en  $t_f = 50$  s y  $t_s = 0.1$  s

ecuaciones del modelo (25, 26) donde  $R_\ell(Q)$  es 0 antes de la fuga, al manifestarse provoca el cambio de magnitud del caudal. En la Fig. 6 se muestra el comportamiento de los caudales de una fuga tras otra correspondientes a la válvula 2 y 3 con tiempo de transición de 50 s para la primera fuga y 70 s para la segunda.

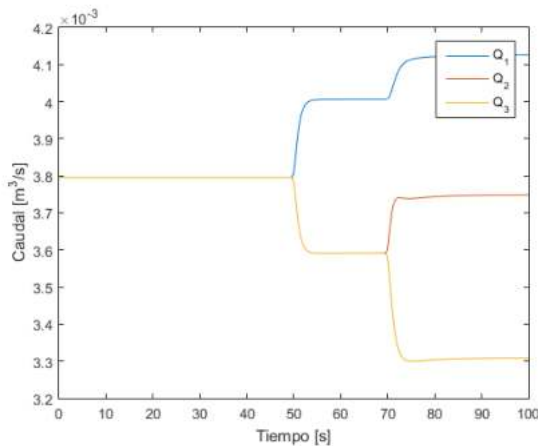


Figura 6. Caudales por fugas secuenciales en válvula 2 en  $t_{f_1} = 50$  s y válvula 3 en  $t_{f_2} = 70$  s

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un enfoque para modelar tuberías con y sin fugas basado en el formalismo de Euler-Lagrange. Como trabajo futuro se contempla la validación experimental de los modelos con la finalidad de que este planteamiento pueda ser utilizado para modelar redes de distribución de agua. Es importante mencionar que el objetivo general de este trabajo es el de desarrollar el modelo matemático, no el de detectar fugas. Pero, se pretende utilizar los modelos obtenidos para el desarrollo de algoritmos de diagnóstico.

- Abarca-Jiménez, G.S., Reyes-Barranca, M.A., Mendoza-Acevedo, S., Munguía-Cervantes, J.E., and Alemán-Arce, M.A. (2016). Electromechanical modeling and simulation by the euler-lagrange method of a mems inertial sensor using a fgmos as a transducer. *Microsystem Technologies*, 22(4), 767–775.
- Adamkowski, A. and Lewandowski, M. (2006). Experimental examination of unsteady friction models for transient pipe flow simulation. *Journal of Fluids Engineering*, 128(6), 1351–1363.
- Avila-Becerril, S., Loria, A., and Panteley, E. (2016). A separation principle for underactuated lossless lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(10), 5318–5323.
- Baleanu, D., Sajjadi, S.S., Jajarmi, A., and Asad, J.H. (2019). New features of the fractional euler-lagrange equations for a physical system within non-singular derivative operator. In *The European Physical Journal Plus*, volume 134. Springer.
- Cheng, C. and Chen, T. (2016). Robust control of euler-lagrange mechanical systems with decentralized adaptive scheme. In *2016 International Automatic Control Conference (CACCS)*, 227–231.
- Enríquez-Zárate, J., Abundis-Fong, H.F., Velázquez, R., and Gutiérrez, S. (2019). Passive vibration control in a civil structure: Experimental results. *Measurement and Control*, 52(7-8), 938–946.
- Hernández, J.R.B., de los Santos Ruiz, I., Estrada, F.R.L., Ortiz, F.L.T., and Puig, V. (2017). Diseño y modelado dinámico de una planta piloto para detección de fugas hidráulicas. In *Congreso Nacional de Control Automático 2017*, 2–7. AMCA, Monterrey, Nuevo León, México.
- Hernández, J.R.B., Estrada, F.R.L., Besaçon, G., Palomo, G.V., Ortiz, F.L.T., and Hernández, H.R. (2018). Modeling and simulation of hydraulic network for leak diagnosis. In *Mathematical and Computational applications, Optimization in Control Applications*, 234–244. MDPI, Basel, Switzerland.
- Ibrahim, A.G. and Elmandouh, A.A. (2020). Euler-lagrange equations for variational problems involving the riesz-hilfer fractional derivative. *Journal of Taibah University for Science*, 14(1), 678–696.
- Jeltsema, D. and Scherpen, J.M. (2009). Multidomain modeling of nonlinear networks and systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(4), 28–59.
- Maré, J.C. (2016). *Aerospace Actuators 1: Needs, Reliability and Hydraulic Power Solutions*. Wiley-ISTE.
- Nault, J. and Karney, B. (2016). Improved rigid water column formulation for simulating slow transients and controlled operations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 142(9), 04016025.
- Ortega, R., Perez, J.A.L., Nicklasson, P.J., and Siramirez, H.J. (2013). *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer Science & Business Media.
- Pérez, R., Puig, V., Pascual, J., Quevedo, J., Landeros, E., and Peralta, A. (2011). Methodology for leakage

- isolation using pressure sensitivity analysis in water distribution networks. *Control Engineering Practice*, 19(10), 1157–1167.
- Rojas, M., Becerril, S.A., and Torres, L. (2019). An energy-based approach for modeling water distribution networks with faults. In *Congreso Nacional de Control Automático 2019*, 501–506. AMCA, Puebla, Puebla, México.
- Rossman, L.A. (2000). *EPANET 2 USER MANUAL*. Water Supply and Water Resources Division, National Risk Management Research Laboratory & Office of Research and Development, U.S. Environmental Protection Agency, Cincinnati, Ohio.
- Santos-Ruiz, I., López-Estrada, F.R., Puig, V., and Valencia-Palomo, G. (2020). Simultaneous optimal estimation of roughness and minor loss coefficients in a pipeline. *Mathematical and Computational Applications*, 25, 56.
- Scola, I.R., Besançon, G., and Georges, D. (2018). Optimizing Kalman optimal observer for state affine systems by input selection. *Automatica*, 93, 224–230.
- Soldevila, A., Blesa, J., Tornil-Sin, S., Duviella, E., Fernandez-Canti, R.M., and Puig, V. (2016). Leak localization in water distribution networks using a mixed model-based/data-driven approach. *Control Engineering Practice*, 55, 162–173.
- Su, J., Bak, J.H., and Hyun, J. (2019). Optimal trajectory generation for quadrotor with suspended load under swing angle constraint. In *2019 IEEE 15th International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 549–554.
- Tchon, K. (2021). Endogenous configuration space approach in robotics research. In *Automatic Control, Robotics, and Information Processing*. Springer.
- Todini, E. and Pilati, S. (1988). A gradient algorithm for the analysis of pipe networks. In *Computer applications in water supply*, volume 1 systems analysis and simulation, 1–20.
- Torres, L. and Besançon, G. (2019). Port-hamiltonian models for flow of incompressible fluids in rigid pipelines with faults. In *58th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, Nice, France.
- Verde, C. and Torres, L. (2017). *Modeling and Monitoring of Pipelines and Networks: Advanced Tools for Automatic Monitoring and Supervision of Pipelines*, volume 7. Springer.
- Wellstead, P.E. (2000). *Introduction to Physical System Modelling*. Control Systems Principles.