

Predicción no Lineal de Estados para un Robot Móvil Diferencial^{*}

J. A. Báez-Hernández, M. Velasco-Villa, S. Mondie

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Av. I.P.N.
No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México (e-mail:
{julio.baez, velasco}@cinvestav.mx, smondie@ctrl.cinvestav.mx).

Resumen

En el siguiente artículo se estudia la predicción y el control de un robot móvil diferencial que sufre de un retardo a la entrada de tiempo constante. Se propone dividir el retardo en fracciones más pequeñas y así utilizar un predictor secuencial basado en un observador tipo Luenberger que estime los valores futuros del sistema de manera gradual. Posteriormente se demuestra la convergencia de los errores de predicción y se utilizan los estados predichos en el control del robot diferencial. Se muestra que los estados pueden ser siempre estimados sin importar el tamaño del retardo a la entrada del vehículo. El costo de esta estrategia se refleja en el aumento de la dimensión del predictor considerado. Finalmente, sin formalizar la estabilidad en lazo cerrado, se presentan resultados numéricos y experimentales para demostrar la eficacia de la predicción.

Keywords: Retardo de tiempo, robótica móvil, predicción no lineal.

1. INTRODUCCIÓN

En el control de sistemas, desde robóticos hasta de procesos químicos, los retardos de tiempo son un problema importante y amplio de estudio (Niculescu (2001)) ya que estos pueden presentarse de manera puntual, distribuida o variante en el tiempo tanto en la entrada del sistema como en los estados del mismo, Kharitonov (2013). Es por esta razón que siempre ha sido tema de interés, principalmente después del trabajo Smith (1957), donde se presentaba una solución al caso de la estimación de las salidas futuras en sistemas lineales con retardo a la entrada.

A pesar de solucionar de manera efectiva los problemas de retardo a la entrada, el predictor de Smith presentaba ciertas restricciones tales como que el sistema en lazo abierto debía ser estable. Sin embargo, su trabajo sentó las bases para que después surgieran trabajos como el de Palmor (1996), que buscaba mejorar y modificar el predictor para solucionar otros problemas.

En el caso de los sistemas no lineales es donde comenzaron a existir múltiples enfoques para solucionar los problemas de retardo, muchos de los cuales se basaban en los trabajos antes mencionados y en los presentados Thau (1973) en el campo de la observación de estados, entre los cuales se encuentran también Germani et al. (2002), Hou et al. (2002), etc. Por otro lado, en trabajos como en los de Mazenc and Bliman (2006) y Krstic (2009) se tratan aproximaciones y métodos basados en la retroalimentación de estados para buscarle solución al problema no lineal.

En el caso de los retardos en la robótica móvil, se han propuesto soluciones como la de Sira-Ramírez et al. (2010) en tiempo continuo, y los trabajos de Santos et al. (2018) y Velasco-Villa et al. (2007) en tiempo

discreto, entre muchos otros. Mas específicamente, en este trabajo se presenta un esquema basado en el propuesto en Fragoso Rubio et al. (2018), Velasco-Villa et al. (2014) y en Fragoso-Rubio et al. (2019), donde se propone un predictor de estados futuros inspirado en el observador de Luenberger (Luenberger (1971)). La diferencia principal entre el presente trabajo y los anteriores radica en el tipo de sistema a analizar, ya que los anteriores predicen y controlan los estados de un robot omnidireccional y en este caso se trabaja con un robot diferencial el cual presenta restricciones no holonómicas.

El resto del trabajo se presenta de la siguiente manera. En la Sección 2 se desarrolla el modelo cinemático del robot móvil diferencial junto con el retardo a la entrada. En la Sección 3 se presenta el desarrollo del predictor de los estados futuros junto con el análisis de su dinámica. En la Sección 4 se muestra el control implementado junto con el uso del predictor. En la Sección 5 se muestran resultados numéricos y experimentales por medio de la plataforma experimental y por última, en la Sección 6 se presentan las conclusiones finales de este trabajo.

2. MODELO CINEMÁTICO

Como ya se mencionó, el predictor y su análisis se desarrollara tomando en cuenta el modelo cinemático de un robot móvil (2,0) como el mostrado en la Figura 1. En Canudas de Wit et al. (1996), se desarrolla y obtiene el siguiente modelo cinemático,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) &= v(t) \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t)\end{aligned}\tag{1}$$

donde $\xi(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$ son los estados del robot diferencial (posición P en el marco inercial $X - Y$ y

^{*} Se agradece el apoyo brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) a través del Proyecto A1-S-24796.

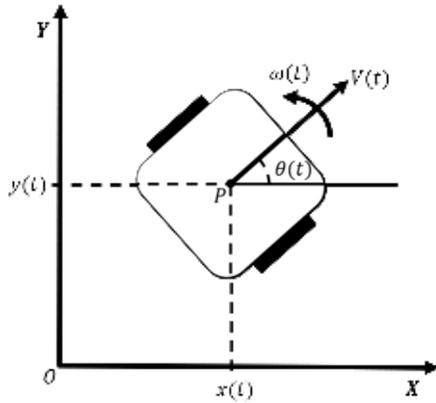


Figura 1. Diagrama sencillo robot omnidireccional

orientación con respecto al eje X y $u(t) = [v(t), \omega(t)]^T$ son las entradas del control que representan la velocidad lineal y angular respectivamente.

2.1 Cambio de coordenadas

El robot móvil (1) puede representarse alternativamente al considerar la transformación,

$$\begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \\ \theta_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) & 0 \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

dando como resultado, después de algunos pasos algebraicos y la utilización de identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= v(t) + \omega(t)y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) &= -\omega(t)x_r(t) \\ \dot{\theta}_r(t) &= \omega(t). \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 Inducción del tiempo de retardo

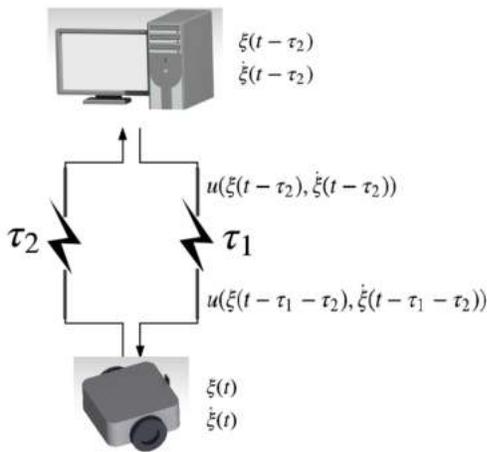


Figura 2. Ejemplo de retardo en comunicaciones

Tomando en cuenta que el control del robot se lleva a cabo en una computadora conectada por red inalámbrica al robot móvil diferencial y asumiendo que existe una distancia considerable entre ambas, se considera el retardo

de tiempo τ_1 que se demora la señal de control en alcanzar al robot y el tiempo τ_2 que tardan en llegar las señales del robot a la computadora principal, tal y como se muestra en la Figura 2. De esta manera puede establecerse de manera equivalente, un tiempo de retardo total $\tau = \tau_1 + \tau_2$ que afecte la entrada de control del sistema, como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= v(t - \tau) + \omega(t - \tau)y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) &= -\omega(t - \tau)x_r(t) \\ \dot{\theta}_r(t) &= \omega(t - \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

2.3 Sistema en adelanto

Suposición 1. Dado el retardo total τ , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{\tau} = \frac{\tau}{n}$, de manera que n es la cantidad de partes en las que se divide el retardo τ .

Tomando en cuenta la suposición anterior, se propone el siguiente cambio de variables para representar el sistema (4) en distintos instantes de tiempo futuros,

$$\begin{aligned} w_{i1}(t) &= x_r(t + i\bar{\tau}) \\ w_{i2}(t) &= y_r(t + i\bar{\tau}) \\ w_{i3}(t) &= \theta_r(t + i\bar{\tau}) \end{aligned}$$

con $i = 1, 2, \dots, n$. De esta manera se obtiene la siguiente representación en tiempo futuro,

$$\begin{aligned} \dot{w}_{i1}(t) &= v(t - (n - i)\bar{\tau}) + \omega(t - (n - i)\bar{\tau})w_{i2}(t) \\ \dot{w}_{i2}(t) &= -\omega(t - (n - i)\bar{\tau})w_{i1}(t) \\ \dot{w}_{i3}(t) &= \omega(t - (n - i)\bar{\tau}). \end{aligned} \quad (5)$$

3. PREDICTOR PROPUESTO

Antes del desarrollo del predictor, se toma en cuenta la siguiente suposición.

Suposición 2. Las señales de entrada $v(t)$, $\omega(t)$, el retardo τ y los estados x , y , θ del robot móvil son medibles.

Como se mencionó anteriormente, se propone el siguiente predictor del sistema (5) basado en un observador de tipo Luenberger (Luenberger (1971)),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}_{11}(t) &= v(t - (n - 1)\bar{\tau}) + \omega(t - (n - 1)\bar{\tau})\hat{w}_{12}(t) \\ &\quad + \lambda_{11}e_{w_{11}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{\hat{w}}_{12}(t) &= -\omega(t - (n - 1)\bar{\tau})\hat{w}_{11}(t) + \lambda_{12}e_{w_{12}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{\hat{w}}_{13}(t) &= \omega(t - (n - 1)\bar{\tau}) + \lambda_{13}e_{w_{13}}(t - \bar{\tau}) \\ &\quad \vdots \\ \dot{\hat{w}}_{n1}(t) &= v(t) + \omega(t)\hat{w}_{n2}(t) + \lambda_{n1}e_{w_{n1}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{\hat{w}}_{n2}(t) &= -\omega(t)\hat{w}_{n1}(t) + \lambda_{n2}e_{w_{n2}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{\hat{w}}_{n3}(t) &= \omega(t) + \lambda_{n3}e_{w_{n3}}(t - \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}$ para $i = 1, \dots, n$ son ganancias reales positivas y los errores de inyección utilizados tienen la forma,

$$\begin{aligned} e_{w_{11}}(t) &= w_{11}(t) - \hat{w}_{11}(t) \\ e_{w_{12}}(t) &= w_{12}(t) - \hat{w}_{12}(t) \\ e_{w_{13}}(t) &= w_{13}(t) - \hat{w}_{13}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

y

$$\begin{aligned} e_{w_{i1}}(t) &= \hat{w}_{(i-1)1}(t + \bar{\tau}) - \hat{w}_{i1}(t) \\ e_{w_{i2}}(t) &= \hat{w}_{(i-1)2}(t + \bar{\tau}) - \hat{w}_{i2}(t) \\ e_{w_{i3}}(t) &= \hat{w}_{(i-1)3}(t + \bar{\tau}) - \hat{w}_{i3}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

para $i = 2, \dots, n$. Cabe resaltar que en el sistema de ecuaciones (6), los errores de inyección se encuentran retrasados $\bar{\tau}$ unidades de tiempo, ya que en $i = 1$ y de acuerdo a la *Suposición 2*, los estados medibles se encuentran en dicho instante de tiempo.

3.1 Dinámica de los errores de inyección

Al derivar los errores mostrados en (7) puede analizarse la evolución de los mismos, tal que,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_{11}} &= \dot{w}_{11} - \dot{\hat{w}}_{11} \\ \dot{e}_{w_{11}} &= v(t - (n-1)\bar{\tau}) + \omega(t - (n-1)\bar{\tau})w_{12}(t) \\ &\quad - v(t - (n-1)\bar{\tau}) - \omega(t - (n-1)\bar{\tau})\hat{w}_{12}(t) \\ &\quad - \lambda_{11}e_{w_{11}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_{w_{11}} &= \omega(t - (n-1)\bar{\tau})e_{w_{12}}(t) - \lambda_{11}e_{w_{11}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_{w_{12}} &= \dot{w}_{12} - \dot{\hat{w}}_{12} \\ \dot{e}_{w_{12}} &= -\omega(t - (n-1)\bar{\tau})w_{11}(t) + \omega(t - (n-1)\bar{\tau})\hat{w}_{11}(t) \\ &\quad - \lambda_{12}e_{w_{12}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_{w_{12}} &= -\omega(t - (n-1)\bar{\tau})e_{w_{11}}(t) - \lambda_{12}e_{w_{12}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_{w_{13}} &= \dot{w}_{13} - \dot{\hat{w}}_{13} \\ \dot{e}_{w_{13}} &= \omega(t - (n-1)\bar{\tau}) - \omega(t - (n-1)\bar{\tau}) - \lambda_{13}e_{w_{13}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_{w_{13}} &= -\lambda_{13}e_{w_{13}}(t - \bar{\tau}). \end{aligned}$$

Que puede reescribirse de manera matricial como,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{w_{11}} \\ \dot{e}_{w_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n-1)\bar{\tau}) \\ -\omega(t - (n-1)\bar{\tau}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{11}}(t) \\ e_{w_{12}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{11} & 0 \\ 0 & -\lambda_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{11}}(t - \bar{\tau}) \\ e_{w_{12}}(t - \bar{\tau}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\dot{e}_{w_{13}} = -\lambda_{13}e_{w_{13}}(t - \bar{\tau}). \quad (10)$$

De la misma manera se obtiene. para $i = 2, \dots, n$,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{w_{i1}} \\ \dot{e}_{w_{i2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n-i)\bar{\tau}) \\ -\omega(t - (n-i)\bar{\tau}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{i1}}(t) \\ e_{w_{i2}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{(i-1)1} & 0 \\ 0 & \lambda_{(i-1)2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{(i-1)1}}(t) \\ e_{w_{(i-1)2}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_{i1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{i1}}(t - \bar{\tau}) \\ e_{w_{i2}}(t - \bar{\tau}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\dot{e}_{w_{i3}} = \lambda_{(i-1)3}e_{w_{(i-1)3}}(t) - \lambda_{i3}e_{w_{i3}}(t - \bar{\tau}). \quad (12)$$

Nótese que la ecuación (9) puede reescribirse, definiendo $\bar{e}_{w_i}(t) = [e_{w_{i1}}(t) \ e_{w_{i2}}(t)]^T$, en la forma,

$$\dot{\bar{e}}_{w_1}(t) = B\bar{e}_{w_1}(t) + B_1\bar{e}_{w_1}(t - \bar{\tau}) \quad (13)$$

mientras que la ecuación (11) se reescribe como,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{w_i}(t) &= B_{(2+3(i-2))}\bar{e}_{w_i}(t) + B_{(3+3(i-2))}\bar{e}_{w_{(i-1)}}(t) \\ &\quad + B_{(4+3(i-2))}\bar{e}_{w_i}(t - \bar{\tau}). \end{aligned} \quad (14)$$

Dada la estructura de los errores de inyección (9)-(11), su convergencia puede establecerse al considerar el siguiente resultado, presentado en Niamsup et al. (2008).

Teorema 1. Niamsup et al. (2008): Un sistema de la forma,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t - h(t))), \quad t \geq 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq h(t) \leq h, \quad \dot{h}(t) \leq \delta < 1 \quad \text{y} \\ \|f(t, x)\| \leq \gamma\|x\| \end{aligned}$$

es exponencialmente estable mientras existan números enteros positivos $\alpha, \beta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, una matriz $P(t)$ simétrica semi definida positiva que satisfaga la siguiente ecuación de Lyapunov,

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + 2\alpha P(t) + \eta I = 0 \quad (16)$$

y si se cumple que,

$$\gamma \leq \frac{\sqrt{\epsilon_2(1-\delta)(\epsilon_1 - 2\beta\bar{\sigma}(A))}}{(p + \beta)e^{\alpha h}}, \quad (17)$$

$$p = \sup\|P(t)\|, \quad \sigma(A) = \frac{1}{2}\lambda_{max}(A + A^T),$$

$$\bar{\sigma}(A) = \sup(\sigma(A)), \quad \eta = \epsilon_3 h e^{2\alpha h} + \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\alpha\beta.$$

Para mostrar la convergencia de los errores de inyección (9)-(11) nótese inicialmente que la ecuación (13) es un caso particular de (15) por lo que el resultado del *Teorema 1* puede aplicarse al sistema 13. Para tal efecto, considere una matriz simétrica $\hat{P}_1(t)$ en la forma,

$$\hat{P}_1(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{13}(t) \end{bmatrix}.$$

Entonces la ecuación (16) se reescribe como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{P}}_{11} \\ \dot{\hat{P}}_{12} \\ \dot{\hat{P}}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 & 2\omega^* & 0 \\ -\omega^* & -2\alpha_1 & \omega^* \\ 0 & -2\omega^* & -2\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta_1 \\ 0 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde $\omega^* = \omega(t - (n-1)\bar{\tau})$. El sistema (18) que puede simplificarse como,

$$\dot{\hat{P}}_1 = A^*P_1 + \bar{\eta}_1.$$

Aplicando un cambio de coordenadas $z = TP_1$, donde T^{-1} es la matriz de transformación formada por los eigenvectores de la matriz A^* de manera que $TA^*T^{-1} = J$ es la forma de Jordan real de A^* . Esta transformación da como resultado,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 & 2\omega^* \\ 0 & -2\omega^* & -2\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{-2\alpha_1 t} - \frac{\eta_1}{2\alpha_1}(1 - e^{-2\alpha_1 t}) \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{-2\alpha_1 t} \cos(2\omega^* t) + z_3(0)e^{-2\alpha_1 t} \sin(2\omega^* t) \\ z_3(t) &= -z_2(0)e^{-2\alpha_1 t} \sin(2\omega^* t) + z_3(0)e^{-2\alpha_1 t} \cos(2\omega^* t). \end{aligned} \quad (20)$$

A partir de $P_1 = T^{-1}z$ se obtiene,

$$\begin{aligned} P_{11} &= z_1 + z_2 \\ P_{12} &= z_3 \\ P_{13} &= z_1 - z_2. \end{aligned}$$

Considerando ahora,

$$p_1 = \sup \|P_1(t)\| = \sup \left(\sqrt{\lambda_{\max}(P_1^T P_1)} \right)$$

se puede obtener su valor máximo cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que,

$$p_1 = \frac{\eta_1}{2\alpha_1}. \quad (21)$$

La ecuación (17) produce entonces la condición,

$$\gamma_1 \leq \sqrt{\frac{\epsilon_{12}\epsilon_{11}}{(p_1 + \beta_1)e^{\alpha_1\bar{\tau}}}} \quad (22)$$

donde es evidente que una correcta elección de parámetros asegura la convergencia de los errores de inyección cuando $i = 1$. Nótese que, para $i = 2$ se tiene un sistema de la forma,

$$\dot{\bar{e}}_{w_2}(t) = B_2\bar{e}_{w_2}(t) + B_3\bar{e}_{w_1}(t) + B_4\bar{e}_{w_2}(t - \bar{\tau}).$$

Considerando que cuando $t \rightarrow \infty$ los errores $\bar{e}_{w_1} \rightarrow 0$ independientemente de \bar{e}_{w_2} , la estabilidad del sistema con $i = 2$ puede establecerse a partir de,

$$\dot{\bar{e}}_{w_2}(t) = B_2\bar{e}_{w_2}(t) + B_4\bar{e}_{w_2}(t - \bar{\tau})$$

que tiene una forma similar a (13), por lo cual es posible determinar su estabilidad si se cumple la condición,

$$\gamma_2 \leq \sqrt{\frac{\epsilon_{22}\epsilon_{21}}{(p_2 + \beta_2)e^{\alpha_2\bar{\tau}}}}. \quad (23)$$

con $\alpha_2, \beta_2, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23} \in \mathbb{R}$. De esta manera, pueden analizarse las siguientes ecuaciones para $i = 3, \dots, n$. Por lo tanto, se obtiene la condición de estabilidad,

$$\gamma \leq \min(\gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (24)$$

A partir de los desarrollos anteriores se mostró la convergencia al origen de los errores de inyección (13)-(14), por otro lado, la convergencia de los errores de inyección $e_{w_{i3}}$ dados por (10) y (12) puede establecerse al notar que (10) es exponencialmente estable cuando $\bar{\tau} < \frac{\pi}{2\lambda_{i3}}$ y por lo tanto la convergencia de la ecuación (12) puede establecerse al considerar la dinámica de un sistema en la forma,

$$\dot{e}_{w_{i3}}(t) = -\lambda_{i3}e_{w_{i3}}(t - \bar{\tau})$$

que al igual que en (10) puede estabilizarse cuando se satisface la condición,

$$\bar{\tau} < \frac{\pi}{2\lambda_{i3}}.$$

Basado en la convergencia de los errores de inyección, es posible ahora, establecer la convergencia de los errores de predicción.

Lema 1. Los errores de predicción $\tilde{w}_i(t) = w_i - \hat{w}_i$, $i = 1, \dots, n$, donde $w_i = [w_{i1} \ w_{i2} \ w_{i3}]^T$, convergen asintóticamente a cero si y sólo si la dinámica de los errores de inyección es convergente.

Demostración. A partir de la definición de los errores de inyección (7) es posible obtener,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(t) &= w_i(t) + e_{w_i}(t) - \hat{w}_{i-1}(t + \bar{\tau}) \\ &= w_i(t) + e_{w_i}(t) + e_{w_{i-1}}(t + \bar{\tau}) - \hat{w}_{i-2}(t + 2\bar{\tau}) \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(t) &= w_i(t) + e_{w_i}(t) + e_{w_{i-1}}(t + \bar{\tau}) + \dots \\ &\quad + e_{w_2}(t + (i-2)\bar{\tau}) - \hat{w}_1(t + (i-1)\bar{\tau}) \\ &= w_1(t + (i-1)\bar{\tau}) + e_{w_i}(t) + e_{w_{i-1}}(t + \bar{\tau}) + \dots \\ &\quad + e_{w_2}(t + (i-2)\bar{\tau}) - \hat{w}_1(t + (i-1)\bar{\tau}) \\ &= e_{w_i}(t) + e_{w_{i-1}}(t + \bar{\tau}) + \dots \\ &\quad + e_{w_2}(t + (i-2)\bar{\tau}) + e_{w_1}(t + (i-1)\bar{\tau}) \end{aligned}$$

esto es,

$$\tilde{w}_i(t) = \sum_{k=1}^i e_{w_k}(t + (n-k)\bar{\tau}). \quad (25)$$

De la ecuación (25) se deriva que la convergencia de los errores de inyección $e_{w_k}(t)$ provocan la convergencia de los errores de predicción.

Q.E.D.

4. RETROALIMENTACIÓN APLICADA

Los estados predichos se utilizaran en el diseño de una retroalimentación para resolver el problema de seguimiento de trayectoria para el robot diferencial descrito por el sistema (3). Para esto, se utiliza la retroalimentación no lineal considerada en Canudas de Wit et al. (1996).

En los desarrollos presentados a continuación se realiza la aplicación de los estados predichos omitiendo el análisis de convergencia de los errores de seguimiento.

Las trayectorias deseadas están generadas por el modelo cinemático del robot virtual,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{vr}(t + \tau) &= \dot{w}_{1v}(t) = v_v(t) + \omega_v(t)w_{2v}(t) \\ \dot{y}_{vr}(t + \tau) &= \dot{w}_{2v}(t) = -\omega_v(t)w_{1v}(t) \\ \dot{\theta}_{vr}(t + \tau) &= \dot{w}_{3v}(t) = \omega_v(t) \end{aligned} \quad (26)$$

y la retroalimentación,

$$\begin{aligned} v(t - \tau) &= v_v(t - \tau) \cos(\theta_{vr} - \theta_r) + k_1(t - \tau)[x_{vr} - x_r] \\ \omega(t - \tau) &= \omega_v(t - \tau) + k_2v_v(t - \tau) \frac{\sin(\theta_{vr} - \theta_r)}{\theta_{vr} - \theta_r} [y_{vr} - y_r] \\ &\quad - k_3(t - \tau)(\theta_{vr} - \theta_r). \end{aligned} \quad (27)$$

donde,

$$\begin{aligned} k_1(t) = k_3(t) &= 2\xi \sqrt{\omega_v^2(t) + bV_v^2(t)}, \quad k_2 = b \\ &b, \xi > 0 \end{aligned}$$

y los estados $[x_v, y_v, \theta_v]$ están relacionados con $[x_{vr}, y_{vr}, \theta_{vr}]$ mediante la transformación (2).

Es evidente que (27) necesita valores futuros del sistema para poder ser viable, debido a esto, se utilizan los estados predichos propuestos en (6) y se adelanta la

retroalimentación τ unidades de tiempo en el futuro, dando como resultado,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_v(t) \cos(w_{3v} - \hat{w}_{n3}) + k_1(t)[w_{1v} - \hat{w}_{n1}] \\ \omega(t) &= \omega_v(t) + k_2 v_v(t) \frac{\sin(w_{3v} - \hat{w}_{n3})}{w_{3v} - \hat{w}_{n3}} [w_{2v} - \hat{w}_{n2}] \\ &\quad - k_3(t)(w_{3v} - \hat{w}_{n3}). \end{aligned} \quad (28)$$

5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Durante la evaluación experimental se utiliza el simulador de entornos 3D Gazebo, en el cual se incluyen dinámicas que aproximan los resultados al de los resultados experimentales en tiempo real. Se considero el seguimiento de una trayectoria tipo lemniscata generada por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} x &= A \cos(pt) \\ y &= B \sin(2pt) \end{aligned}$$

con los parámetros $A = 0.7, B = 0.4, p = \frac{\pi}{20}$. Para el diseño de la retroalimentación se considera $\xi = 0.35, b = 6$ y para el retardo $\tau = 0.1$ seg.

Se llevan a cabo dos casos considerando $n = 1$ y $n = 3$.

5.1 Simulación numérica con $\tau = 0.1$ seg.

Con la correcta elección de números enteros, es posible obtener $\gamma < 3.67$ para el caso de $n = 1$ y $\gamma < 11.03$ para el caso de $n = 3$. De esta manera, se escogen las ganancias $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 3$ para el primer predictor y $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 4, \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 3.5$ y $\lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = 3$ para el segundo caso.

Se puede apreciar en la Figura (3) como los errores de predicción convergen a cero satisfactoriamente con ambos predictores, siendo la respuesta del predictor con $n = 3$ un poco mas suave a comparación del caso $n = 1$. Por otro lado, en la Figura (4) se muestra la evolución en el plano $X - Y$ de los dos casos, la cual demuestra que el sistema tiende a la trayectoria de manera adecuada.

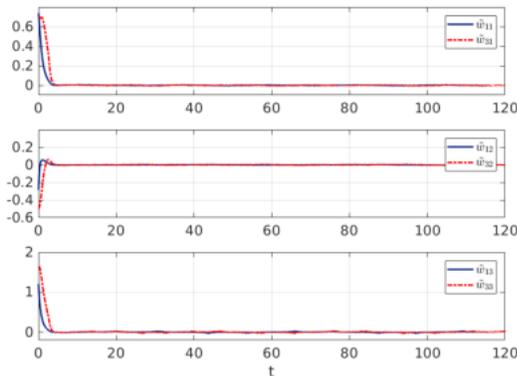


Figura 3. Gráficas del error de predicción en x, y y θ respectivamente con $n = 1$ y $n = 3$.

6. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los experimentos en tiempo real de este trabajo son llevados a cabo con robots diferenciales TurtleBot3 de la

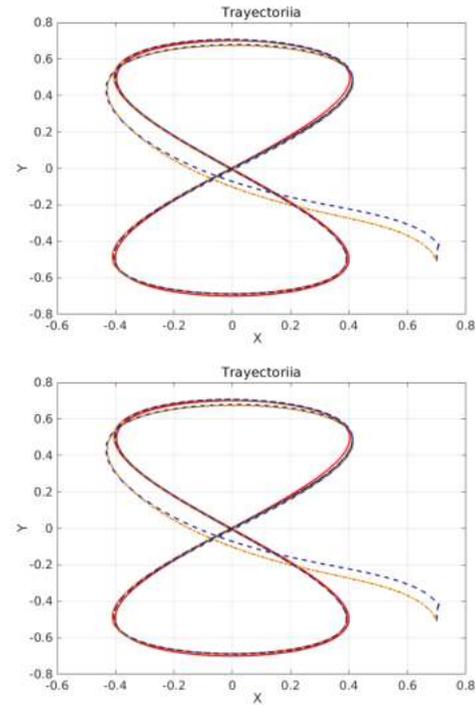


Figura 4. Trayectoria deseada (rojo), trayectoria recorrida con $n = 1$ (naranja) y trayectoria recorrida con $n = 3$ (azul).

marca $\text{\textcircled{R}}$ ROBOTIS, utilizando un sistema de cámaras de captura de movimiento Flex 3 de la marca $\text{\textcircled{R}}$ OptiTrack para medir la posición del robot móvil durante todo el experimento e interconectando todo el hardware mediante ROS.

Para el desarrollo de los experimentos se utiliza la misma trayectoria propuesta en la simulación numérica. El diseño del predictor (6) se lleva a cabo considerando $n = 3, \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 6, \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 5$ y $\lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = 4$, para la retroalimentación (28) se considera $\xi = 0.35$ y $b = 6$ y para el retardo $\tau = 0.1$ seg.

En las gráficas de la Figura (5) se observa como los errores de predicción se mantienen alrededor de 0. De igual manera se puede apreciar en las Figuras (6) y (7) como el robot diferencial es capaz de seguir de manera satisfactoria la trayectoria propuesta.

7. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó el diseño y desarrollo de un predictor no lineal para estimar los estados futuros de un robot móvil diferencial. Se demuestra de manera formal que la estrategia de predicción es capaz de utilizarse para valores significativos de τ siempre que se cumplan las condiciones de estabilidad establecidas. De ser necesario, es posible aumentar la dimensión del predictor para tratar con retardos mayores. Se muestra mediante simulaciones numéricas y experimentos en tiempo real que los errores de predicción convergen de manera satisfactoria y que la estrategia presentada es capaz de ser utilizada en problemas de seguimiento de trayectoria.

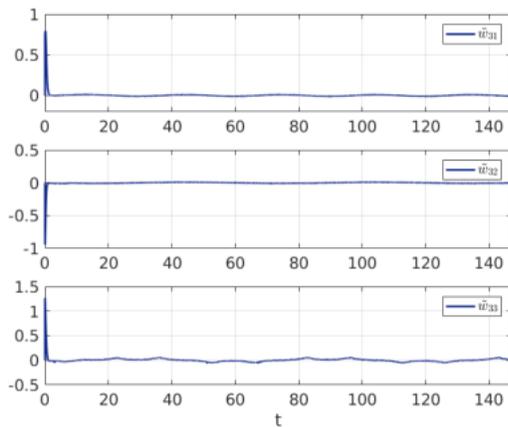


Figura 5. Gráficas del error de predicción en x , y y θ con $\tau = 0.1$ seg.

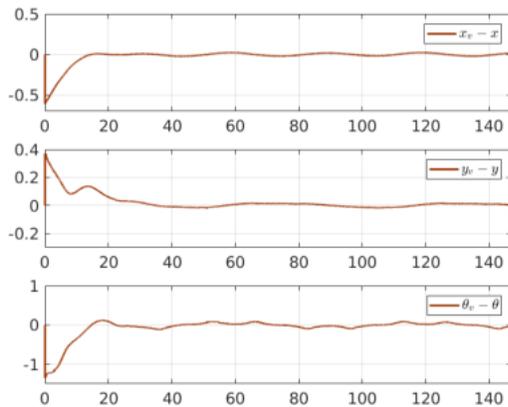


Figura 6. Gráficas del error de seguimiento en x , y y θ con $\tau = 0.1$ seg.

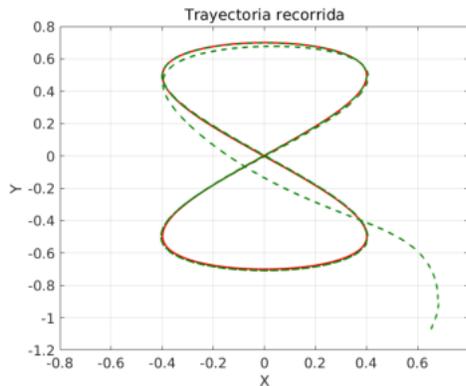


Figura 7. Trayectoria deseada(rojo) y trayectoria recorrida(verde) con un retardo $\tau = 0.1$ seg.

REFERENCIAS

Canudas de Wit, C., Siciliano, B., and Bastin, G. (1996). *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag.

Fragoso Rubio, V., Vallejo Alarcón, M.A., and Velasco Villa, M. (2018). Control basado en predicción no lineal para un robot móvil omnidireccional con retardo a la entrada. In *Congreso Nacional de Control Automático*.

Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., and Márquez-Rubio, J.F. (2019). Prediction-observer scheme for linear systems with input-output time delay. *International Journal of Control, Automation and System*, 17.

Germani, A., Manes, C., and Pepe, P. (2002). A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 96-101.

Hou, M., Ztek, P., and Patton, R.J. (2002). An observer design for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 121-125.

Kharitonov, V.L. (2013). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functional and Matrices*. Birkhäuser.

Krstic, M. (2009). *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer.

Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16, 596-602.

Mazenc, F. and Bliman, P.A. (2006). Backstepping design for time delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51, 149-154.

Niamsup, P., Mukdasai, K., and Phat, V.N. (2008). Improved exponential stability for time-varying systems with nonlinear delayed perturbations. *Applied Mathematics and Computation*, 204, 490-495.

Niculescu, S. (2001). *Delay Effects on Stability, A Robust Control Approach*. Springer.

Palmor, Z.J. (1996). Time-delay compensation smith predictor and its modifications. *The Control Handbook*, 1, 224-229.

Santos, J., Conceição, A., Santos, T., and Araújo, H. (2018). Remote control of an omnidirectional mobile robot with time-varying delay and noise attenuation. *Mechatronics*, 52, 7-21.

Sira-Ramírez, H., López-Uribe, C., and Velasco-Villa, M. (2010). Trajectory-tracking control of an input delayed omnidirectional mobile robot. In *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control(CCE)*.

Smith, O.J.M. (1957). Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5), 217-219.

Thau, F.E. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3), 471-479.

Velasco-Villa, M., del Muro-Cuellar, B., and Alvarez-Aguirre, A. (2007). Smith-predictor compensator for a delayed omnidirectional mobile robot. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*.

Velasco-Villa, M., Mandujano-García, E., Estrada-Sanchez, I., Rodríguez-Cortés, H., and Sira-Ramírez, H. (2014). Esquema predictor-observador para el control de un robot móvil omnidireccional con retardos de tiempo. In *Congreso Latinoamericano de Control Automático*.