

# Formación de Vehículos Mediante Tiempos de Separación Utilizando Mediciones Relativas

M. Infante-Jacobo \* R. D. Cruz-Morales \*\*  
A. Rodríguez-Angeles \* M. Velasco-Villa \*

\* CINVESTAV, Depto. de Ing. Eléctrica, Sec. de Mecatrónica, Av.  
I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México,  
{marcos.infante, aangeles, velasco}@cinvestav.mx

\*\* UNAM FES Cuautitlán, Depto. de Ing., Sec. Ing. Eléctrica, Car.  
Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, San Sebastián Xhala, 54714,  
rdcruz@comunidad.unam.mx

---

**Resumen** En este trabajo se muestra el desarrollo de un esquema de formación para un conjunto de  $n$  robots móviles diferenciales en cadena, considerando un tiempo de separación entre vehículos consecutivos. Se propone un esquema semi-descentralizado que podría ser utilizado únicamente mediciones relativas entre robots y datos proporcionados por los encoders y giroscopio de los vehículos seguidores, sin la consideración de un sistema de posicionamiento global para la formación completa. Se realiza un análisis de la estabilidad de la formación mediante técnicas de Lyapunov. Se muestran algunos resultados en simulación numérica y experimentales que permiten validar el funcionamiento del esquema propuesto.

**Keywords:** Robot diferencial, líder-seguidor, tiempo de separación, convoy, odometría.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Una formación en convoy trae consigo varias ventajas, desde incrementar la cantidad de automóviles en carretera optimizando la fluencia del tráfico, van Arem et al. (2006), hasta el ahorro en el combustible consumido en un viaje, Lammert et al. (2014). Para atacar este problema, se han implementado diferentes técnicas de control como el Adaptive Cruise Control (ACC) donde el vehículo hace uso únicamente de sensores a bordo como un radar para poder calcular una velocidad que mantenga una distancia relativa al vehículo de enfrente, mientras el usuario se encarga del volante, sin embargo, este esquema fue propuesto como un sistema de asistencia para el manejo en carretera, no como una estrategia de formación. Un esquema más complejo, que tiene como propósito la conducción cooperativa, CACC (cooperative adaptive cruise control), emplea un sistema de comunicación inalámbrica entre vehículos para compartir información de velocidad y fusionarla con la adquirida por los sensores a bordo, con el fin de lograr una formación líder-seguidor entre ellos, aunque estos modelos han sido ampliamente estudiados e implementados, Ploeg et al. (2015), Shladover (2005), estos esquemas de control están planteados únicamente en el eje longitudinal del auto, realizando una aproximación a una partícula que se mueve en línea recta, lo cual representa un modelo bastante sencillo para un vehículo, y lo desprovee de control lateral, con lo que sigue siendo totalmente necesario un piloto que se encargue de realizar maniobras al volante.

Otros trabajos han tratado de mejorar este hecho utilizando la cinemática del vehículo, por ejemplo Cruz-Morales et al. (2018) y Dominguez-Ortega et al. (2018), desarro-

\* Trabajo parcialmente apoyado por CONACYT mediante los proyectos A1-S-26123 y A1-S-31628.

llan un esquema para robots diferenciales basado en tiempo de separación constante y variante respectivamente, donde diseñan observadores de estados retrasados para generar una referencia virtual a la cual converger, además de que en Dominguez-Ortega et al. (2018) utilizan un tiempo de separación variante dependiente de la distancia entre vehículos, con lo que a pesar de tener tiempos de separación pequeños se evita la colisión con el robot de enfrente, a pesar del buen desempeño de la formación en cadena en ambos trabajos, estos relacionan sus mediciones mediante un marco global para todo el conjunto de robots, lo cual limita su implementación en un ambiente más realista fuera del laboratorio. Otro trabajo en el que tienen objetivos similares es en Bom et al. (2005) donde conmutan de una ley de control longitudinal a una lateral cuando es necesario para lograr la formación del convoy. Se debe notar que los esquemas anteriores hacen uso explícito de un sistema de posicionamiento global (GPS y/o cámaras Optitrack), el cual entrega en todo momento la posición y orientación de cada agente.

Otra manera de realizar la formación en cadena es utilizando mediciones relativas, eliminando el uso de un sistema de posicionamiento global y sus inconvenientes, como pueden ser, las bajas frecuencias de actualización, pérdida de la señal, retrasos en la comunicación, espacio limitado, etc., es por esto que en este trabajo se propone una estrategia que pudiera ser implementada mediante el uso de sensores a bordo del vehículo seguidor con los que sea posible medir la distancia y orientación del vehículo de enfrente, así como el desplazamiento del propio seguidor.

En la Sección 2 se presenta el modelo cinemático del robot y se plantea el problema de formación. En la Sección 3 se propone un observador de entrada retrasada mostrando su convergencia. En la Sección 4, se presenta la solución al problema de formación en convoy y se

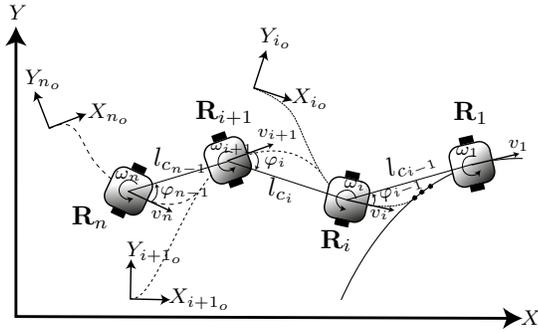


Figura 1. Pelotón de robots móviles.

prueba la estabilidad para el sistema mediante técnicas de Lyapunov. En la sección 5 se presentan algunos resultados de simulación numérica y experimental. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se consideran robots del tipo diferencial, Laumond et al. (1994), el cual presenta la siguiente restricción no-holonómica,

$$\dot{x}_i(t) \sin(\theta_i(t)) - \dot{y}_i(t) \cos(\theta_i(t)) = 0 \quad (1)$$

la cual indica físicamente que las ruedas no pueden deslizarse lateralmente. Considérese entonces un robot diferencial como los mostrados en la Figura 1, con modelo cinemático dado por,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t) \cos(\theta_i(t)) \\ \dot{y}_i(t) &= v_i(t) \sin(\theta_i(t)) \\ \dot{\theta}_i(t) &= \omega_i(t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $x_i(t)$  e  $y_i(t)$  describen la posición en el plano cartesiano  $X - Y$  del  $i$ -ésimo robot,  $\theta_i(t)$  indica la orientación del mismo con respecto al eje  $X$ ,  $v_i(t)$  y  $\omega_i(t)$  son las velocidades lineal y angular respectivamente, con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se desea que un grupo de  $n$  robots mantenga una formación en convoy como se muestra en la Figura 1, manteniendo una separación entre ellos basada en un tiempo constante, es decir, para un par de robots  $\mathbf{R}_i$  y  $\mathbf{R}_{i+1}$ , para  $i = 1, \dots, n - 1$ , se desea que el robot  $\mathbf{R}_{i+1}$  describa la misma trayectoria que el robot  $\mathbf{R}_i$ , retrasada  $\tau$  unidades de tiempo. El problema se plantea utilizando únicamente sensores a bordo de cada robot seguidor (cámaras, lidar, odometría, etc.), que permitan realizar mediciones relativas de la posición y orientación del robot delantero en la formación, así como mediciones del desplazamiento referidas a partir de la posición y orientación inicial de  $\mathbf{R}_{i+1}$  dadas por  $(X_{i+1_o}, Y_{i+1_o})$ . Con lo anterior, se realizarán las siguientes consideraciones sobre la formación descrita.

*Suposición 1.* Se tiene acceso a los estados  $(x_{i+1}(t), y_{i+1}(t), \theta_{i+1}(t))$  del robot seguidor  $\mathbf{R}_{i+1}$ , con  $i = 1, \dots, n - 1$ , respecto de su posición y orientación inicial.

*Suposición 2.* El robot seguidor  $\mathbf{R}_{i+1}$  cuenta con sensores (cámara, lidar, radar, etc.) a bordo, con lo que la distancia relativa  $l_{c_i}(t)$  entre robots, el ángulo de posición relativa  $\varphi_i(t)$  y el ángulo de orientación relativa entre robots  $\vartheta_i(t) = \theta_i(t) - \theta_{i+1}(t)$ , descritos en la Figura 2, están disponibles para su medición.

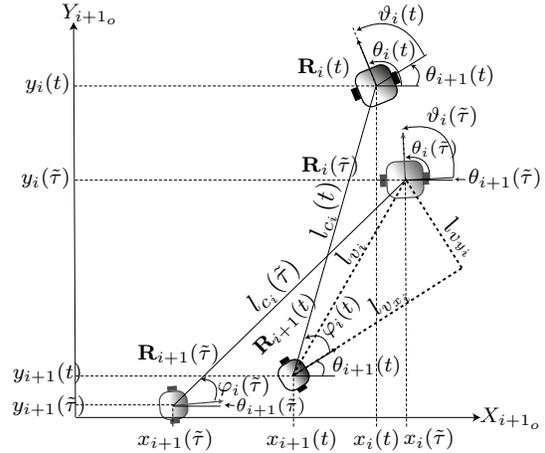


Figura 2. Esquema de seguimiento para un par de robots  $\mathbf{R}_i$  y  $\mathbf{R}_{i+1}$ , donde  $\tilde{\tau} = t - \tau$ .

De la Figura 2, y con las suposiciones 1 y 2, los estados de  $\mathbf{R}_i$  respecto al marco inercial local creado por la posición y orientación inicial del robot  $\mathbf{R}_{i+1}$ , pueden calcularse como,

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_{i+1}(t) + l_{c_i}(t) \cos(\theta_{i+1}(t) + \varphi_i(t)) \\ y_i(t) &= y_{i+1}(t) + l_{c_i}(t) \sin(\theta_{i+1}(t) + \varphi_i(t)) \\ \theta_i(t) &= \theta_{i+1}(t) + \vartheta_i(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Como se desea que  $\mathbf{R}_{i+1}(t) \rightarrow \mathbf{R}_i(\tilde{\tau})$ , las distancias que relacionan la posición de  $\mathbf{R}_i(\tilde{\tau})$  respecto de  $\mathbf{R}_{i+1}(t)$  pueden ser obtenidas a partir de la Figura 2 como,

$$\begin{aligned} l_{v_{x_i}}(t) &= (x_i(\tilde{\tau}) - x_{i+1}(t)) \cos(\theta_{i+1}(t)) \\ &\quad + (y_i(\tilde{\tau}) - y_{i+1}(t)) \sin(\theta_{i+1}(t)) \\ l_{v_{y_i}}(t) &= -(x_i(\tilde{\tau}) - x_{i+1}(t)) \sin(\theta_{i+1}(t)) \\ &\quad + (y_i(\tilde{\tau}) - y_{i+1}(t)) \cos(\theta_{i+1}(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\tilde{\tau} = t - \tau$ . Nótese que para que  $l_{v_i}(t)$  exista, se debe cumplir que  $t \geq \tau$ , con  $\tau \geq 0$ .

## 3. OBSERVADOR DE ENTRADA RETRASADA

Como se mencionó anteriormente, se desea que el robot  $\mathbf{R}_{i+1}$  realice la trayectoria desarrollada por el robot  $\mathbf{R}_i$  retrasada en el tiempo; para ello se diseña un observador tipo Luenberger que permita estimar los estados retrasados de  $\mathbf{R}_i$ . Se asume que el sistema satisface las suposiciones 1, 2, y la suposición que se presenta a continuación.

*Suposición 3.* Las velocidades  $v_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  a la entrada de  $\mathbf{R}_i$  son acotadas y conocidas, esto es  $\sup \{v_i(t)\} \leq \bar{v}_i$  y  $\sup \{\omega_i(t)\} \leq \bar{\omega}_i$ , con  $\bar{v}_i, \bar{\omega}_i \in \mathbb{R}^+$ .

Tomando un tiempo de retraso constante  $\tau$ , podemos definir los estados retrasados de  $\mathbf{R}_i$  a estimar como,

$$\eta_{1_i} = x_i(\tilde{\tau}), \quad \eta_{2_i} = y_i(\tilde{\tau}), \quad \eta_{3_i} = \theta_i(\tilde{\tau}). \quad (5)$$

Considerando el modelo del robot  $\mathbf{R}_i$  (2), donde sus estados son obtenidos a partir de (3) es posible proponer un observador de entrada retrasada como,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_{1_i} &= v_i(\tilde{\tau}) \cos(\hat{\eta}_{3_i}) + \lambda_{1_i} e_{\eta_{1_i}} \\ \dot{\hat{\eta}}_{2_i} &= v_i(\tilde{\tau}) \sin(\hat{\eta}_{3_i}) + \lambda_{2_i} e_{\eta_{2_i}} \\ \dot{\hat{\eta}}_{3_i} &= \omega_i(\tilde{\tau}) + \lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}}\end{aligned}\quad (6)$$

donde,  $e_{\eta_{1_i}} = x_i(\tilde{\tau}) - \hat{\eta}_{1_i}$ ,  $e_{\eta_{2_i}} = y_i(\tilde{\tau}) - \hat{\eta}_{2_i}$ ,  $e_{\eta_{3_i}} = \theta_i(\tilde{\tau}) - \hat{\eta}_{3_i}$  son los errores de observación y  $\lambda_{1_i}$ ,  $\lambda_{2_i}$ ,  $\lambda_{3_i}$  son ganancias positivas de diseño.

### 3.1 Convergencia del observador

Derivando las señales del error de observación con respecto al tiempo se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\eta_{1_i}} &= v_i(\tilde{\tau}) [\cos(\eta_{3_i}) - \cos(\hat{\eta}_{3_i})] - \lambda_{1_i} e_{\eta_{1_i}} \\ \dot{e}_{\eta_{2_i}} &= v_i(\tilde{\tau}) [\sin(\eta_{3_i}) - \sin(\hat{\eta}_{3_i})] - \lambda_{2_i} e_{\eta_{2_i}} \\ \dot{e}_{\eta_{3_i}} &= -\lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}}.\end{aligned}\quad (7)$$

La utilización de identidades trigonométricas permite reescribir el sistema (7) en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\eta_{1_i}} &= -\lambda_{1_i} e_{\eta_{1_i}} - 2v_i(\tilde{\tau}) \sin(0.5e_{\eta_{3_i}}) \sin(0.5e_{\eta_{3_i}} + \hat{\eta}_{3_i}) \\ \dot{e}_{\eta_{2_i}} &= -\lambda_{2_i} e_{\eta_{2_i}} + 2v_i(\tilde{\tau}) \sin(0.5e_{\eta_{3_i}}) \cos(0.5e_{\eta_{3_i}} + \hat{\eta}_{3_i}) \\ \dot{e}_{\eta_{3_i}} &= -\lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}}.\end{aligned}\quad (8)$$

De la misma forma que en Cruz-Morales et al. (2018), es fácil mostrar que el observador converge de manera exponencial a los estados retrasados dados por (5).

*Lema 1.* Asumiendo las señales de control  $\omega_i$ ,  $v_i$  acotadas por  $\bar{\omega}_i$ ,  $\bar{v}_i$  respectivamente, y que  $\lambda_{1_i}$ ,  $\lambda_{2_i}$ ,  $\lambda_{3_i} \in \mathfrak{R}^+$ , los estados del observador (6) convergen a los estados retrasados de forma exponencial.

**Demostración.** Nótese que con  $\lambda_{3_i} > 0$ ,  $e_{\eta_{3_i}} \rightarrow 0$  de forma exponencial independientemente de  $e_{\eta_{1_i}}$ ,  $e_{\eta_{2_i}}$ .

Para probar la convergencia de  $e_{\eta_{1_i}}$ ,  $e_{\eta_{2_i}}$  sea,

$$\bar{e}_{\eta_i}(t) = [e_{\eta_{1_i}}, e_{\eta_{2_i}}]^T \quad (9)$$

cuya dinámica resulta,

$$\dot{\bar{e}}_{\eta_i}(t) = A_i \bar{e}_{\eta_i}(t) + g_i(e_{\eta_{3_i}}, \hat{\eta}_{3_i}) v_i(\tilde{\tau}) \quad (10)$$

donde,  $A_i = \text{diag}[-\lambda_{1_i}, -\lambda_{2_i}]$  y

$$g_i(e_{\eta_{3_i}}, \hat{\eta}_{3_i}) = \begin{bmatrix} -2 \sin(0.5e_{\eta_{3_i}}) \sin(0.5e_{\eta_{3_i}} + \hat{\eta}_{3_i}) \\ 2 \sin(0.5e_{\eta_{3_i}}) \cos(0.5e_{\eta_{3_i}} + \hat{\eta}_{3_i}) \end{bmatrix}.$$

Es importante notar que,

$$\begin{aligned}\|g_i(e_{\eta_{3_i}}, \hat{\eta}_{3_i}) v_i(\tilde{\tau})\| &\leq \|g_i(e_{\eta_{3_i}}, \hat{\eta}_{3_i})\| |v_i(\tilde{\tau})| \\ &\leq \gamma_i |e_{\eta_{3_i}}| \bar{v}_i, \quad \forall t \geq 0\end{aligned}$$

para algún  $\gamma_i \geq 0$ . Con lo anterior, se puede tratar a  $g_i(e_{\eta_{3_i}}, \hat{\eta}_{3_i})$  como una perturbación desvaneciente externa al sistema (10), debido a que  $e_{\eta_{3_i}} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , con lo que la convergencia exponencial al origen de los errores de observación queda asegurada a partir del hecho de que la matriz  $A$  es Hurwitz. ■

## 4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE FORMACIÓN

Una vez que se tienen los estados estimados de  $\mathbf{R}_i$  retrasados en el tiempo respecto al marco global local

generado por la posición y orientación inicial de  $\mathbf{R}_{i+1}$ , las distancias virtuales mostradas en (4) se pueden reescribir como,

$$\begin{aligned}l_{v_{x_i}} &= (\hat{\eta}_{1_i} - x_{i+1}) \cos(\theta_{i+1}) + (\hat{\eta}_{2_i} - y_{i+1}) \sin(\theta_{i+1}) \\ l_{v_{y_i}} &= -(\hat{\eta}_{1_i} - x_{i+1}) \sin(\theta_{i+1}) + (\hat{\eta}_{2_i} - y_{i+1}) \cos(\theta_{i+1}).\end{aligned}\quad (11)$$

El problema de seguimiento de trayectorias se satisface al hacer que las distancias  $l_{v_{x_i}}$ ,  $l_{v_{y_i}}$  tiendan a cero y que el ángulo de  $\mathbf{R}_{i+1}$  tienda al ángulo de  $\mathbf{R}_i(\tilde{\tau})$ , entonces se definen los siguientes errores de seguimiento,

$$e_{lx_i} = l_{v_{x_i}}, \quad e_{ly_i} = l_{v_{y_i}}, \quad e_{\theta_i} = \theta_{i+1} - \hat{\eta}_{3_i}. \quad (12)$$

Al derivar respecto al tiempo las ecuaciones anteriores, y tomando en consideración algunas identidades trigonométricas se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{lx_i} &= e_{ly_i} \omega_{i+1} - v_{i+1} + v_i(\tilde{\tau}) \cos(e_{\theta_i}) \\ &\quad + \lambda_{1_i} e_{\eta_{1_i}} \cos(\theta_{i+1}) + \lambda_{2_i} e_{\eta_{2_i}} \sin(\theta_{i+1}) \\ \dot{e}_{ly_i} &= -e_{lx_i} \omega_{i+1} - v_i(\tilde{\tau}) \sin(e_{\theta_i}) \\ &\quad - \lambda_{1_i} e_{\eta_{1_i}} \sin(\theta_{i+1}) + \lambda_{2_i} e_{\eta_{2_i}} \cos(\theta_{i+1}) \\ \dot{e}_{\theta_i} &= \omega_{i+1} - \omega_i(\tilde{\tau}) - \lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}}.\end{aligned}\quad (13)$$

### 4.1 Análisis de los errores de seguimiento

Para resolver el problema de formación planteado anteriormente se considera ahora la retroalimentación,

$$\begin{aligned}v_{i+1} &= k_{1_i} e_{lx_i} + v_i(\tilde{\tau}) \cos(e_{\theta_i}) \\ &\quad + \lambda_{1_i} e_{\eta_{1_i}} \cos(\theta_{i+1}) + \lambda_{2_i} e_{\eta_{2_i}} \sin(\theta_{i+1}) \\ \omega_{i+1} &= \omega_i(\tilde{\tau}) + k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} e_{ly_i} - k_{3_i} e_{\theta_i} + \lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}}.\end{aligned}\quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13) se obtiene,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{lx_i} &= -k_{1_i} e_{lx_i} - k_{3_i} e_{ly_i} e_{\theta_i} + k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} e_{ly_i}^2 \\ &\quad + e_{ly_i} \omega_i(\tilde{\tau}) + \lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}} e_{ly_i} \\ \dot{e}_{ly_i} &= k_{3_i} e_{lx_i} e_{\theta_i} - k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} e_{lx_i} e_{ly_i} + m_i(t) \\ &\quad - e_{lx_i} \omega_i(\tilde{\tau}) - v_i(\tilde{\tau}) \sin(e_{\theta_i}) - \lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}} e_{lx_i} \\ \dot{e}_{\theta_i} &= k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} e_{ly_i} - k_{3_i} e_{\theta_i}\end{aligned}\quad (15)$$

con  $m_i(t) = -\lambda_{1_i} e_{\eta_{1_i}} \sin(\theta_{i+1}) + \lambda_{2_i} e_{\eta_{2_i}} \cos(\theta_{i+1})$ .

Observando las ecuaciones (15) se nota que existen términos dependientes de los errores de observación, cuya convergencia bajo la Suposición 3, fue previamente demostrada. Con esto,  $m_i(t)$  se puede ver como una perturbación desvaneciente. Por lo tanto, es posible escribir la dinámica de los errores de seguimiento en lazo cerrado y libre de perturbaciones como,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{lx_i} &= -k_{1_i} e_{lx_i} - k_{3_i} e_{ly_i} e_{\theta_i} + k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} e_{ly_i}^2 \\
&\quad + e_{ly_i} \omega_i(\tilde{\tau}) + \lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}} e_{ly_i} \\
\dot{e}_{ly_i} &= k_{3_i} e_{lx_i} e_{\theta_i} - k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} e_{lx_i} e_{ly_i} \\
&\quad - e_{lx_i} \omega_i(\tilde{\tau}) - v_i(\tilde{\tau}) \sin(e_{\theta_i}) - \lambda_{3_i} e_{\eta_{3_i}} e_{lx_i} \\
\dot{e}_{\theta_i} &= k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} e_{ly_i} - k_{3_i} e_{\theta_i}
\end{aligned} \tag{16}$$

*Observación 1.* Nótese que la Suposición 3 se satisface trivialmente para el robot líder  $\mathbf{R}_1$ , por lo que puede obtenerse la convergencia del primer observador. De esta forma, si  $\mathbf{R}_2$  sigue a  $\mathbf{R}_1$ , entonces las velocidades de  $\mathbf{R}_2$  también están acotadas. El resultado general se sigue por inducción sobre los vehículos restantes, por lo que en el siguiente lema, se considerarán los robots  $\mathbf{R}_i$  y  $\mathbf{R}_{i+1}$ .

*Lema 2.* Sean  $v_i$  y/o  $\omega_i$  distintas de cero para todo  $t$  y  $k_{1_i}, k_{2_i}, k_{3_i} > 0$ , el sistema (16) converge de manera asintótica al origen, lo cual implica que la retroalimentación (14) logra la convergencia asintótica al origen del sistema (13) resolviendo el problema de formación en cadena planteado.

**Demostración.** Sea la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V(e) = \frac{1}{2} k_{2_i} (e_{lx_i}^2 + e_{ly_i}^2) + \frac{1}{2} e_{\theta_i}^2 \tag{17}$$

derivándola respecto al tiempo resulta,

$$\dot{V}(e) = -k_{1_i} k_{2_i} e_{lx_i}^2 - k_{3_i} e_{\theta_i}^2 \leq 0.$$

Con este resultado, únicamente es posible establecer estabilidad en el sistema. Utilizando el lema de Barbalat, dado que  $\dot{V}(e)$  es acotada,  $\dot{V}(e) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y que  $k_{j_i} \in \mathbb{R}^+$  para  $j = 1, 2, 3$ , implica que  $e_{lx_i}$  y  $e_{\theta_i}$  tienden a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Utilizando lo anterior y el hecho de que  $e_{\eta_{3_i}}$  tiende a cero exponencialmente de forma independiente a los errores de seguimiento, a partir de (16) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{lx_i} &= k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) e_{ly_i}^2 + e_{ly_i} \omega_i(\tilde{\tau}) \rightarrow 0 \\
\dot{e}_{\theta_i} &= k_{2_i} v_i(\tilde{\tau}) e_{ly_i} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Con lo que solo es necesario que  $v_i(\tilde{\tau})$  u  $\omega_i(\tilde{\tau})$  sean distintas de cero para asegurar la convergencia de  $e_{ly_i}$ . ■

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

Con fines de mostrar la efectividad de la estrategia de control se presentan a continuación resultados en simulación numérica y experimentales. Ambos casos fueron realizados utilizando 4 robots, con el líder del convoy dado por un robot virtual, el cual traza una trayectoria específica de forma perfecta. La trayectoria propuesta es tal que incluye rectas y curvas, de forma que permita mostrar la capacidad del controlador en  $\mathbf{R}_{i+1}$  para converger a la trayectoria retrasada desarrollada por  $\mathbf{R}_i$ . Esta trayectoria es la mostrada en la Figura 3, y su descripción matemática se muestra en la Tabla 1. Donde  $r = 0.4m$ ,  $b = 8s$ ,  $f_w = \frac{\pi}{6}$  rad/s,  $l_1 = 0.4m$ ,  $l_2 = 3l_1$ ,  $g = 0.2m/s$ ,  $T_1 = l_1/g$ ,  $T_2 = l_2/g$ ,  $t_1 = T_1$ ,  $t_2 = t_1 + b/2$ ,  $t_3 = t_2 + T_2$ ,  $t_4 = t_3 + b$ ,  $t_5 = t_4 + T_1$ ,  $t_6 = t_5 + b/2$ ,  $t_7 = t_6 + T_2$ ,

Tabla 1. Ecuaciones de la trayectoria deseada

| $a$   | $x_d(t)$   | $y_d(t)$  | $t$         |
|-------|--|---|-------------|
| $a_1$ | $gt$   | 0   | $t_0 - t_1$ |
| $a_2$ | $r \sin(f_w \tilde{t}_1) + l_1$                      | $-\cos(f_w \tilde{t}_1) + r$                        | $t_1 - t_2$ |
| $a_3$ | $l_1 + r$  | $g\tilde{t}_2 + r$                                  | $t_2 - t_3$ |
| $a_4$ | $r \sin(f_w \tilde{t}_3 - \frac{\pi}{2}) + l_1 + 2r$ | $r \cos(f_w \tilde{t}_3 - \frac{\pi}{2}) + l_2 + r$ | $t_3 - t_4$ |
| $a_5$ | $l_1 + 3r$   | $-g\tilde{t}_4 + l_2 + r$                           | $t_4 - t_5$ |
| $a_6$ | $r \cos(f_w \tilde{t}_5) + l_1 + 2r$                 | $-r \sin(f_w \tilde{t}_5) + 2l_1 + r$               | $t_5 - t_6$ |
| $a_7$ | $-g\tilde{t}_6 + l_1 + 2r$                           | $2r$  | $t_6 - t_7$ |
| $a_8$ | $r \cos(f_w \tilde{t}_7 + \frac{\pi}{2})$            | $r \sin(f_w \tilde{t}_7 + \frac{\pi}{2}) + r$       | $t_7 - t_8$ |

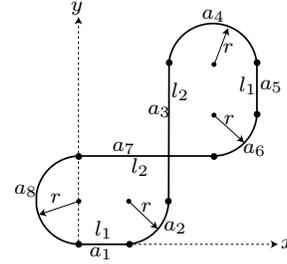


Figura 3. Trayectoria deseada.

$t_8 = t_7 + b$  y  $\tilde{t}_i = t - t_i$  para  $i = 1, \dots, 8$ . Las velocidades lineal y angular del robot líder  $\mathbf{R}_1$  son dadas como,

$$v_1 = \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}, \quad \omega_1 = \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}$$

donde  $x_d(t)$  e  $y_d(t)$  toman los valores mostrados en la Tabla 1 para cada segmento de la trayectoria.

### 5.1 Simulaciones numéricas

Las simulaciones numéricas fueron realizadas utilizando un tiempo de separación de  $\tau = 5s$  entre cada robot. Se consideró un convoy de 4 robots para lo cual se utilizaron 3 observadores cuyas condiciones iniciales fueron igual a cero, las condiciones iniciales para cada robot son las mostradas en la Tabla 2. Las ganancias utilizadas para el observador (6) fueron  $\lambda_{1_i} = \lambda_{2_i} = \lambda_{3_i} = 1$  para  $i = 1, 2, 3$ . Por otro lado, el valor para las ganancias de control fueron  $k_{1_i} = 0.5$ ,  $k_{2_i} = 10$  y  $k_{3_i} = 2$  para  $i = 1, 2, 3$ . En la

Tabla 2. Condiciones iniciales.

|               | $\mathbf{R}_1$ | $\mathbf{R}_2$ | $\mathbf{R}_3$ | $\mathbf{R}_4$ |
|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x[m]$        | -0.9           | -0.41          | -0.86          | -1.24          |
| $y[m]$        | -1             | -0.9           | -0.86          | -0.77          |
| $\theta[rad]$ | 0              | -0.2           | -0.33          | -0.56          |

Figura 4 se muestra la trayectoria descrita por el convoy en el plano  $X - Y$ , así como la distancia existente entre cada par de robots mediante rectas que los unen. Los errores de seguimiento se muestran en la Figura 5, así como los errores de observación en la Figura 6, nótese que los observadores empiezan a recibir valores a los cuales convergen después de  $\tau = 5s$ . En la Figura 7 se muestran las distancias de separación relativas entre cada vehículo, así como la convergencia hacia los robots líder retrasados. Las señales de control  $v_i$  y  $\omega_i$  se pueden observar en la Figura 8.

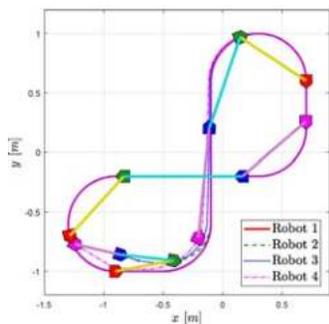


Figura 4. Trayectorias del convoy en el plano.

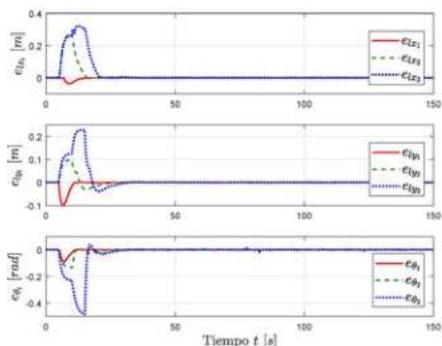


Figura 5. Errores de seguimiento.

### 5.2 Experimentos en tiempo real

El tiempo de separación entre robots considerado fue de  $\tau = 5s$ . Las ganancias de los observadores y de las señales de control utilizadas, así como las posiciones iniciales del sistema, fueron los mismos que se utilizaron en la simulación.

Los robots utilizados en este trabajo fueron 3 Turtlebot3 (un Burger y dos Waffle Pi) de la marca ROBOTIS, cuya programación está basada en ROS (Robot Operating System), estos robots cuentan con un sistema de posicionamiento mediante encoders y giroscopio. Como este esquema de formación plantea el uso de mediciones relativas entre cada robot de la cadena, se hizo uso de un sistema de cámaras Flex 3 de Optitrack, para emular el sistema de sensores a bordo que en un futuro podrían utilizarse para realizar dichas mediciones, tómesese en cuenta que las cámaras solo se utilizan para medir la distancia y orientación relativas entre vehículos, y no proporciona ningún sistema de referencia inercial al cual referir las mediciones realizadas, en su lugar, se hace uso del sistema de posicionamiento montado en cada robot seguidor como se muestra en la Figura 2, donde los estados de  $\mathbf{R}_{i+1}$  son obtenidos mediante encoders y giroscopio. En la Figura 9 se muestra la trayectoria descrita por el convoy en el plano  $X - Y$ . Los errores de seguimiento se muestran en la Figura 10, así como los errores de observación en la Figura 11, nótese que los errores  $e_{\eta_{i3}}$  para  $i = 1, 2, 3$ , presentan algunos picos, esto es debido a que el sistema de posicionamiento en el robot  $\mathbf{R}_4$ , entregaba en ciertos momentos, mediciones erróneas para el cálculo de sus estados, tales problemas pueden verse como perturbaciones en la estimación de la posición las cuales se ven reflejadas

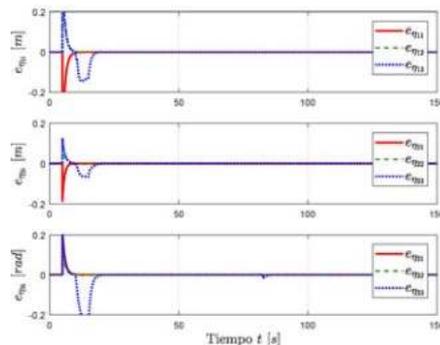


Figura 6. Errores de observación.

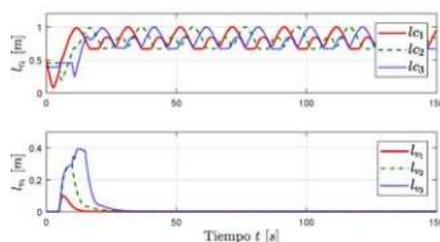


Figura 7. Distancia de separación entre robots.

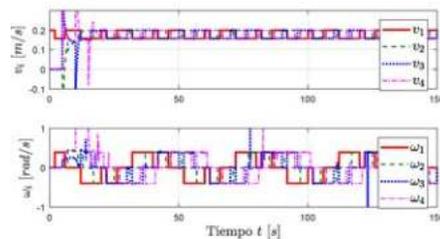


Figura 8. Señales de control para cada robot.

en las señales de control. En la Figura 12 se muestran las distancias de separación relativas entre cada par de vehículos, así como la convergencia de las distancias de seguimiento. Las señales de control  $v_i$  y  $\omega_i$  se pueden observar en la Figura 13, nótese que aunque la ley de control empieza a calcular información desde el segundo 0, por motivos de evitar transitorios que pudieran hacer que los robots colisionaran entre sí, la señal de control se envía a cada robot seguidor después de que se cumple el tiempo de separación  $\tau = 5s$ .

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un esquema de formación en cadena basado en tiempo de separación constante con un enfoque basado en la no utilización de un sistema de posicionamiento global, en su lugar, para cualquier par de robots, se trata de estimar la posición del vehículo a seguir mediante distancias relativas emulando un sistema de medición a bordo del seguidor y relacionarlas a un eje de referencia inercial local creado mediante la posición y orientación inicial del robot seguidor. Se presentó el desarrollo de un observador de entrada retrasada así como la convergencia de los errores de observación de manera formal. Se obtuvo una ley de control y se probó también

mediante técnicas de Lyapunov la convergencia de los errores de seguimiento. Finalmente, se presentaron resultados en simulación numérica y experimentales, donde se puede apreciar claramente el funcionamiento de este esquema de control, es importante notar que en el caso experimental todos los robots seguidores poseen, inherente a su naturaleza física, ruido y efectos de deriva en su sistema de posicionamiento por odometría. Como trabajo futuro se planea poner en marcha el sistema de mediciones relativas a través de cámara a bordo, que permita a los robots realizar trayectorias más grandes sin la necesidad de emular dichas mediciones.

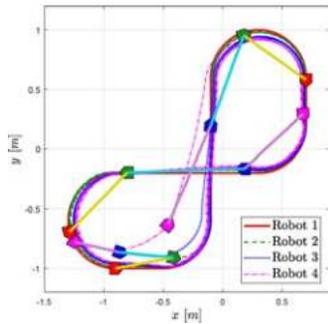


Figura 9. Trayectorias del convoy en el plano.

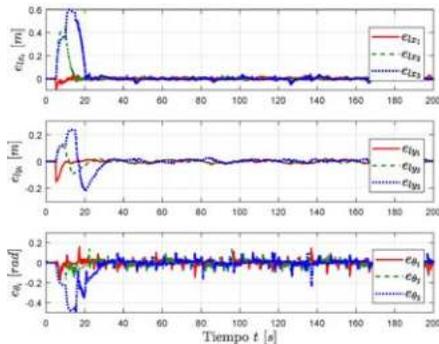


Figura 10. Errores de seguimiento.

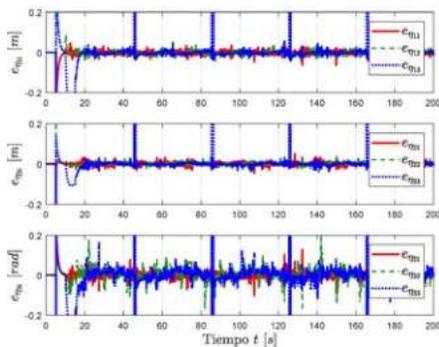


Figura 11. Errores de observación.

#### REFERENCIAS

Bom, J., Thuilot, B., Marmoulin, F., and Martinet, P. (2005). Nonlinear control for urban vehicles platooning, relying upon a unique kinematic gps. In

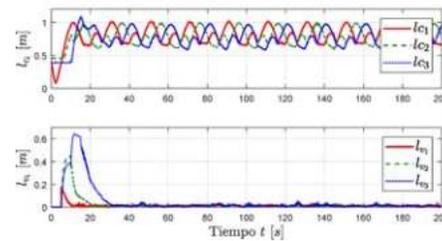


Figura 12. Distancia de separación entre robots.

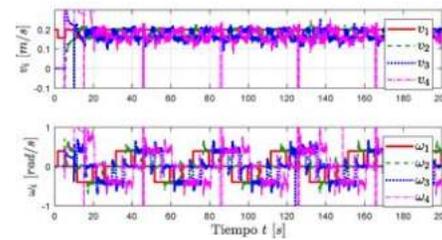


Figura 13. Señales de control para cada robot.

*Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4138–4143. doi:10.1109/ROBOT.2005.1570755.

Cruz-Morales, R.D., Velasco-Villa, M., and Rodriguez-Angeles, A. (2018). Chain formation control for a platoon of robots using time-gap separation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 15(2), 1729881418770858. doi:10.1177/1729881418770858.

Dominguez-Ortega, C.A., Cruz-Morales, R.D., Rodriguez-Angeles, A., and Velasco-Villa, M. (2018). Control de un convoy de robots móviles con tiempo variable de separación. In *Memorias del CNCA 2018*, 140–145.

Lammert, M.P., Duran, A., Diez, J., Burton, K., and Nicholson, A. (2014). Effect of platooning on fuel consumption of class 8 vehicles over a range of speeds, following distances, and mass. *SAE Int. J. Commer. Veh.*, 7(2), 626–639. doi:https://doi.org/10.4271/2014-01-2438.

Laumond, J.P., Jacobs, P., Taix, M., and Murray, R. (1994). A motion planner for nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(5), 577–593. doi:10.1109/70.326564.

Ploeg, J., Semsar-Kazeroni, E., Lijster, G., van de Wouw, N., and Nijmeijer, H. (2015). Graceful degradation of cooperative adaptive cruise control. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 16(1), 488–497. doi:10.1109/TITS.2014.2349498.

Shladover, S.E. (2005). Automated vehicles for highway operations (automated highway systems). *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 219(1), 53–75. doi:10.1243/095440705X9407.

van Arem, B., van Driel, C.J.G., and Visser, R. (2006). The impact of cooperative adaptive cruise control on traffic-flow characteristics. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 7(4), 429–436. doi:10.1109/TITS.2006.884615.