

A Super-Twisting-based Controller for Trajectory Tracking of Perturbed Unicycle Mobile Robots

Pablo Rochel* Héctor Ríos*** y Manuel Mera***

* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón Coahuila, México.*

** *Cátedras CONACYT, Av. Insurgentes Sur 1582, C.P. 03940, Ciudad de México, Mexico.*

*** *ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, Mexico.*

Abstract: The aim of this paper is to design a robust controller for the perturbed kinematic model of the Unicycle Mobile Robot. The proposed controller is based on the Super-Twisting algorithm and, given the underactuated nature of the system, two sliding surfaces are proposed to ensure asymptotic convergence of the tracking error to zero, despite the presence of some external disturbances. The synthesis of the proposed controller is given in terms of Linear Matrix Inequalities while the convergence proofs are based on the Lyapunov and Input-to-State Stability theory. Simulation results show the feasibility of the proposed approach.

Keywords: Mobile robots, trajectory tracking, sliding-modes control.

1. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles han sido relevantes durante las últimas décadas debido a sus múltiples aplicaciones, tales como supervisión, inspección, vigilancia, rescate, etc. (*e.g.*, Siegwart and Nourbakhsh (2004)). Desde el punto de vista de control, las posibles tareas asignadas a un robot móvil son el movimiento de un punto a otro y el seguimiento de trayectorias (Ailon and Zohar (2008)). Por lo tanto, el desarrollo de estrategias de control es requerido. Sin embargo, tal diseño no es una tarea fácil debido a que la mayoría de los robots móviles presentan restricciones no holónomas (ver, Tzafestas (2013) y De Luca et al. (1998)). Diferentes enfoques se han utilizado para el seguimiento de trayectorias en robots móviles no holónomos, (*e.g.*, modos deslizantes adaptables (Jun and Zhi, 2019), control difuso (Castillo and Aguilar, 2019), estrategias basadas en teoría de Lyapunov (Karkoub et al., 2019)).

Es sabido que, de las condiciones de Brockett (Bloch, 2003), los sistemas no holónomos carecen de las condiciones necesarias para su estabilización usando funciones de control suaves. Específicamente, para el Robot Móvil Uniciclo (RMU) no holónimo, varias estrategias de control se han propuesto para lograr su estabilización. En Batti et al. (2019), se propone un controlador difuso

para el RMU basado en su modelo cinemático para el seguimiento de trayectorias. No se consideran perturbaciones. Respecto a este enfoque de control inteligente, un controlador PID optimizado por redes neuronales y un controlador lógico difuso PD son propuestos en Ben Jabeur and Seddik (2021) para el seguimiento de trayectorias. Sin embargo, no se consideran perturbaciones externas. Un enfoque por red neuronal de acción se considera en Lan et al. (2019) donde varios robots siguen un objetivo dinámico en un ambiente con obstáculos. Sin embargo, estos enfoques de control inteligente requieren de un excesivo poder de procesamiento, provocando algunos problemas en las aplicaciones en tiempo real.

En el contexto del enfoque de control por modos deslizantes, varios trabajos han abordado el problema de seguimiento de trayectorias para el RMU (*e.g.*, Azzabi and Nouri (2021)). Sin embargo, el controlador está basado en el modelo dinámico. Además, la mayoría de los trabajos basados en el modelo cinemático no consideran el efecto de perturbaciones externas, como en Mu et al. (2017) y Dòria-Cerezo et al. (2019). Ahora bien, en Tayebi and Rachid (2000) y Wang and Low (2008), aún cuando fuerzas externas no pueden ser consideradas en el modelo cinemático, existen fenómenos no modelados tales como el deslizamiento y derrapamiento de las ruedas y señales de control corruptas, que pueden considerarse como perturbaciones. En este sentido, en Mera et al. (2020), el diseño de control está basado en el enfoque de control por modos deslizantes de primer orden, el cual

* P. Rochel, H. Ríos y M. Mera agradecen el apoyo financiero brindado por CONACYT CVU 1011063, Cátedras CONACYT CVU 270504 proyecto 922 y el SIP Project 20210351, respectivamente.

asegura la convergencia del error de seguimiento a cero asintóticamente, en presencia de perturbaciones para el modelo cinemático de un RMU. En Martínez et al. (2021), el problema de seguimiento de trayectorias se aborda mediante dos técnicas de control robustas para el modelo cinemático perturbado del RMU, el ángulo de orientación es controlado mediante un enfoque de control por modos deslizantes y la posición mediante el método del elipsoide atractivo, el cual asegura que el error de seguimiento de orientación converja a cero en tiempo finito y los errores de seguimiento de posición converjan a una vecindad del origen asintóticamente. No obstante, las entradas de control resultantes también son discontinuas.

Motivados por las dificultades antes mencionadas, para resolver el problema de seguimiento de trayectorias se propone el Algoritmo Super-Twisting para el modelo cinemático perturbado del RMU. Este enfoque proporciona una ley de control continua basada en las superficies deslizantes propuestas en Mera et al. (2020), cuya estructura ataca el problema de subactuación del RMU. El controlador propuesto se caracteriza por su insensibilidad a cierta clase de perturbaciones, bajo costo computacional y atenuación de chattering debido a su naturaleza continua. La síntesis del algoritmo propuesto está dado en términos de LMIs y convergencia asintótica a cero del error de seguimiento. Resultados de simulaciones demuestran la factibilidad del esquema propuesto.

El resto de este trabajo se organiza como se muestra a continuación. En la Sección 2, se presenta el planteamiento del problema. El controlador propuesto y el resultado principal de este trabajo son presentados en la Sección 3. Los resultados de simulación se muestran en la Sección 4 y finalmente las conclusiones en la Sección 5.

Notación: Para una función medible en el sentido de Lebesgue $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ se define la norma $\|u\|_{(t_0, t_1)} := \text{ess sup}_{t \in (t_0, t_1)} \|u(t)\|$, entonces $\|u\|_{\infty} := \|u\|_{(0, +\infty)}$ y el conjunto de funciones u con la propiedad $\|u\|_{\infty} < +\infty$ se denota como \mathcal{L}_{∞} . Se define la función $[a]^b = |a|^b \text{sign}(a)$, para $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y cualquier $a \in \mathbb{R}$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el modelo cinemático perturbado para el RMU

$$\dot{x} = (1 + d_1(t))v \cos(\theta), \quad (1a)$$

$$\dot{y} = (1 + d_1(t))v \sin(\theta), \quad (1b)$$

$$\dot{\theta} = (1 + d_2(t))\omega, \quad (1c)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ representa la posición del RMU, $\theta \in \mathbb{R}$ es el ángulo de orientación, mientras que $v, \omega \in \mathbb{R}$ son las velocidades lineal y angular, respectivamente; y son consideradas las entradas de control las cuales satisfacen las condiciones

$$0 < v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \quad |\omega| \leq \omega_{\max}, \\ |\dot{v}| \leq \bar{v}_{\max}, \quad |\dot{\omega}| \leq \bar{\omega}_{\max},$$

para algunas constantes v_{\min} , v_{\max} , ω_{\max} , \bar{v}_{\max} y $\bar{\omega}_{\max}$. Los términos $d_1(t)$ y $d_2(t)$ representan perturbaciones

aditivas a las entradas y pueden provenir del tiempo de establecimiento del controlador interno, que transforma los comandos de velocidad en corriente o voltaje de entrada que se envían a los motores. Se asume que d_1 y d_2 están acotadas, *i.e.*, $-1 < d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max} < 1$, para $i = 1, 2$, con algunas constantes positivas d_{\min} y d_{\max} ; y Lipschitz continuas, *i.e.*, $\|\dot{d}_i\|_{\infty} \leq \bar{d}_i$, para $i = 1, 2$, con algunas constantes positivas \bar{d}_i . Observe que la restricción $d_{\min} > -1$ asegura que la perturbación no cause un cambio de signo en la señal de control v .

El objetivo de este trabajo es diseñar una estrategia de control robusto que cumpla con la tarea de seguimiento de trayectorias para el RMU a pesar de la presencia de perturbaciones externas.

3. DISEÑO DE CONTROL DE SEGUIMIENTO

Se introduce la trayectoria deseada que satisface el siguiente modelo cinemático

$$\dot{x}_d = v_d \cos \theta_d, \\ \dot{y}_d = v_d \sin \theta_d, \\ \dot{\theta}_d = \omega_d,$$

donde x_d, y_d son la posición deseada y θ_d representa la orientación deseada para el RMU. Las entradas v_d y ω_d son las velocidades de referencia lineal y angular, respectivamente; son continuas y satisfacen

$$0 < v_{d_{\min}} \leq v_d \leq v_{d_{\max}}, \quad |\omega_d| \leq \omega_{d_{\max}}, \\ |\dot{v}_d| \leq \bar{v}_{d_{\max}}, \quad |\dot{\omega}_d| \leq \bar{\omega}_{d_{\max}},$$

para algunas constantes positivas $v_{d_{\min}}$, $v_{d_{\max}}$, $\omega_{d_{\max}}$, $\bar{v}_{d_{\max}}$, $\bar{\omega}_{d_{\max}}$. Siguiendo el análisis en Canudas de Wit et al. (2012), se propone un cambio de coordenadas del marco inercial a uno fijo en el RMU. Los errores de seguimiento se definen como se muestra a continuación

$$e_1 = (x_d - x) \cos \theta + (y_d - y) \sin \theta, \\ e_2 = -(x_d - x) \sin \theta + (y_d - y) \cos \theta, \\ e_3 = \theta_d - \theta.$$

Entonces, la dinámica de los errores de seguimiento están dados por

$$\dot{e}_1 = (1 + d_2)\omega e_2 - v d_1 + u_1, \quad (3a)$$

$$\dot{e}_2 = -(1 + d_2)\omega e_1 + v_d \sin e_3, \quad (3b)$$

$$\dot{e}_3 = -\omega d_2 + u_2, \quad (3c)$$

donde $u_1 = -v + v_d \cos e_3$ y $u_2 = \omega_d - \omega$. Las nuevas entradas de control u_1 y u_2 se proponen como

$$u_i = -k_{i1} [\sigma_i]^{\frac{1}{2}} + z_i, \quad (4a)$$

$$\dot{z}_i = -k_{i2} [\sigma_i]^0, \quad i = 1, 2, \quad (4b)$$

para algunas ganancias positivas $k_{i1}, k_{i2} > 0$, $i = 1, 2$, y las variables de deslizamiento

$$\sigma_1 = e_1, \quad (5)$$

$$\sigma_2 = e_3 - \arcsin(f(e_2)), \quad (6)$$

donde $f(e_2)$ es una función suave a trozos dada por

$$f(e_2) = -(\min\{\delta_1 |e_2|^{-1}, \delta_2\})e_2, \quad (7)$$

con $\delta_1 \in (0, 1)$ y $\delta_2 > 0$. El aportación de este trabajo se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 1. Sean las entradas de control (4) aplicadas al sistema (3). Asuma que existen matrices $0 < P_i^T = P_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y vectores $Y_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, para $i = 1, 2$, tal que las siguientes LMIs

$$\begin{pmatrix} P_1 A + A^T P_1 - Y_1 C - C^T Y_1^T & P_1 B \\ +L_1^2 C^T C + \alpha_1 P_1 + B B^T & \\ B^T P_1 & -1 \end{pmatrix} \leq 0, \quad (8a)$$

$$\begin{pmatrix} P_2 A + A^T P_2 - Y_2 C - C^T Y_2^T & P_2 B \\ +L_2^2 C^T C + \alpha_2 P_2 & \\ B^T P_2 & -1 \end{pmatrix} \leq 0, \quad (8b)$$

$$\begin{pmatrix} P_1 A + A^T P_1 - Y_1 C - C^T Y_1^T & P_1 B \\ +L_3^2 C^T C + \alpha_3 P_1 & \\ B^T P_1 & -1 \end{pmatrix} \leq 0, \quad (8c)$$

$$\begin{pmatrix} P_2 A + A^T P_2 - Y_2 C - C^T Y_2^T & P_2 B \\ +L_4^2 C^T C + \alpha_4 P_2 & \\ B^T P_2 & -1 \end{pmatrix} \leq 0, \quad (8d)$$

$$k_{11} > \frac{1}{2\mu}, \quad (8e)$$

$$v_{d_{\min}} \geq \frac{2\lambda_{\max}(P_1)\omega_{\max}}{\beta\delta_1}, \quad (8f)$$

$$\frac{8\omega_{\max}^2}{\xi\alpha_3\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1)} \leq 1, \quad (8g)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T,$$

son factibles para ciertas constantes fijas $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, 4}$, $\beta, \delta_1, \mu, \xi \in (0, 1)$, $\delta_2, \gamma > 0$ y

$$L_1 = 2(v_{\max}\bar{d}_1 + \bar{v}_{\max}), \quad L_2 = 2(\omega_{\max}\bar{d}_2 + \bar{\omega}_{\max}),$$

$$L_3 = 2\left(v_{\max}\bar{d}_1 + \bar{v}_{\max} + 2\omega_{\max}v_{d_{\max}} + 2\frac{\delta_1}{\delta_2}\bar{\omega}_{\max} + \bar{d}_2\omega_{\max}\right),$$

$$L_4 = 2\left\{\bar{\omega}_{\max} + \omega_{\max}\bar{d}_2 + \frac{\delta_2(2 + \gamma\pi)}{2}\left[\frac{\delta_2\gamma\pi}{2}(2 + \gamma\pi)v_{d_{\max}}^2 + (\bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}}(2\omega_{\max} + \omega_{d_{\max}}))\right]\right\}.$$

Si las ganancias k_{i1} y k_{i2} son diseñadas tal que $K_i = (k_{i1}, 2k_{i2})^T = P_i^{-1}Y_i$, para $i = 1, 2$; entonces, $(e_1, e_2, e_3) = 0$ es Localmente Uniformemente Asintóticamente Estable, para todo $e \in \mathcal{E} = \{(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3 : |e_1| < 1\}$ a pesar de las perturbaciones $d_1(t)$ y $d_2(t)$.

Observación 1. La propiedad de localidad proviene de la condición $|e_1| \leq 1$, la cual es requerida en el análisis de estabilidad.

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las simulaciones se realizan en MATLAB, con el método de discretización explícita de Euler y tiempo de muestreo igual a $1[m.s]$. La solución de las LMIs se obtiene mediante el solucionador SeDuMi y YALMIP en MATLAB.

La trayectoria deseada se construye de las siguientes funciones

$$x_d(t) = \frac{a}{2\pi}t, \quad y_d(t) = \sin(2\omega_0 t), \quad \theta_d(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)}\right),$$

$$v_d(t) = \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}, \quad \omega_d(t) = \frac{\dot{x}_d(t)\ddot{y}_d(t) - \dot{y}_d(t)\ddot{x}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)},$$

con $a = 10$, $\omega_0 = 0.3142[rad/s]$, $v_{d_{\max}} = 1.71[m/s]$, $\bar{v}_{d_{\max}} = 0.16[m/s^2]$ y $\omega_{d_{\max}} = 0.24[rad/s]$. Las velocidades lineal y angular máximas están dadas por $v_{\max} = 2[m/s]$ y $\omega_{\max} = 0.5[rad/s]$, respectivamente. Las aceleraciones máximas están dadas por $\bar{v}_{\max} = 0.82[m/s^2]$ y $\bar{\omega}_{\max} = 2.41[rad/s^2]$.

Para propósitos de simulación, las perturbaciones son consideradas como $d_1(t) = 0.5 + 0.4 \cos(t)$, y $d_2(t) = 0.5 + 0.4 \sin(t)$, las cuales están acotadas por $d_{\min} = 0.1$ y $d_{\max} = 0.9$ y son Lipschitz continuas con las cotas de la derivada dadas por $\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = 0.4$.

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0.5[m]$, $y(0) = 0.6[m]$, $\theta(0) = 0[rad]$. Fijando $\delta_1 = 0.9$, $\delta_2 = 2$, $\gamma = 0.005$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha_3 = 6$, $\alpha_4 = 0.5$, $L_1 = 2.14$, $L_2 = 1.42$, $L_3 = 7.52$ y $L_4 = 9.62$. Las LMIs (8) son factibles para:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18.25 & -2.4 \\ -2.4 & 0.48 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 18.08 \\ 96.23 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 55.52 & -5.09 \\ -5.09 & 1.55 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 6.22 \\ 52.55 \end{pmatrix}$$

Note que para cualquier valor de $\mu \in (0, 1)$, (8e) se satisface. Además, (8f) se satisface para cualquier $v_{d_{\min}} \geq 0.5[m/s]$; y (8g) se cumple ya que $(8\omega_{\max}^2)(\xi\alpha_3\lambda_{\max}^{1/2}(P_1)) = 0.8081$. El desempeño del seguimiento de trayectoria está representado en la Figura 2, mientras que los estados del sistema y señales de control Figuras 1 y 4, respectivamente. La norma del error de seguimiento se ilustra en la Figura 3. Los resultados muestran que a pesar de las perturbaciones $d_1(t)$ y $d_2(t)$, el error de seguimiento converge asintóticamente a cero usando señales de control continuas.

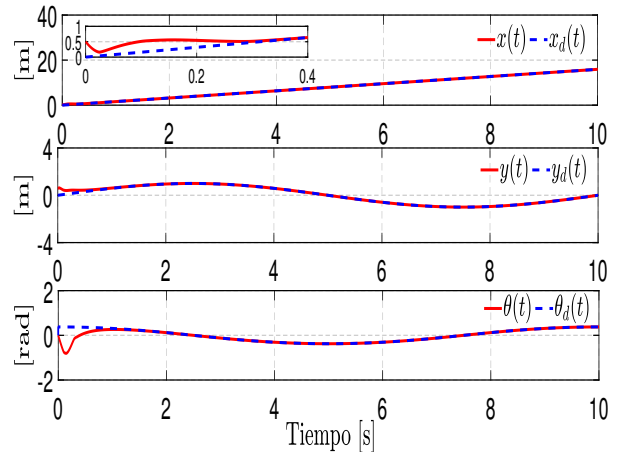


Fig. 1. Trayectorias del sistema

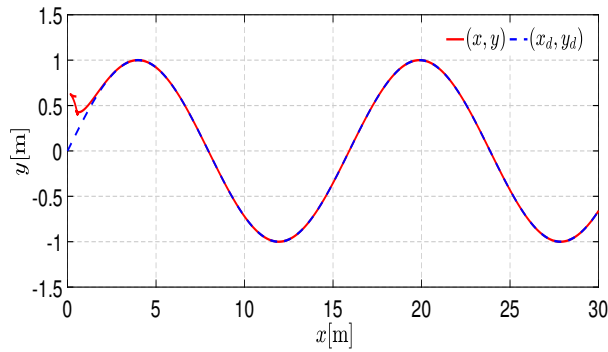


Fig. 2. Plano de Fase

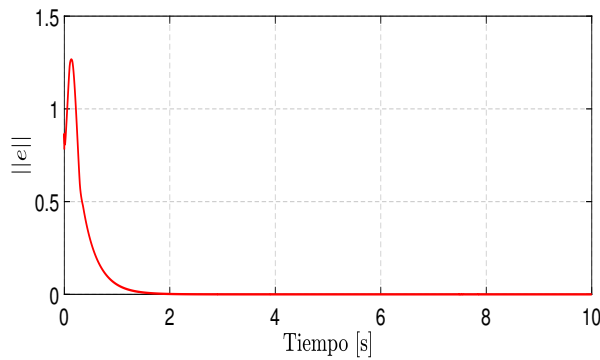


Fig. 3. Norma del error de seguimiento

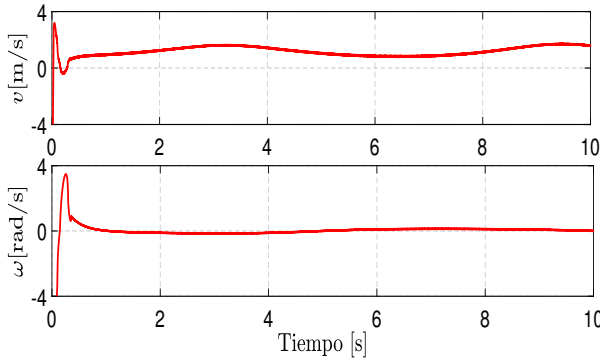


Fig. 4. Señales de control

5. CONCLUSIONES

Este trabajo contribuye con un controlador que asegura la convergencia asintótica a cero del error de seguimiento para el modelo cinemático perturbado del RMU. El enfoque del controlador propuesto está basado en el algoritmo Super-Twisting. Se consideran perturbaciones tipo Lipschitz y la síntesis del controlador propuesto está dado en términos de LMIs, ofreciendo un método constructivo, mientras que las pruebas de convergencia están basadas en teoría de Lyapunov y Estabilidad Entrada-Estado. Algunas simulaciones demuestran el desempeño del enfoque propuesto.

6. APÉNDICE

Prueba del Teorema 1: Debido a que la derivada de la función $f(e_2)$ posee una discontinuidad en $|e_2| = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, dos casos son analizados para la estabilidad del error de seguimiento (3), *i.e.*, 1) $|e_2| > \delta_1/\delta_2$, y 2) $|e_2| \leq \delta_1/\delta_2$.

1) *Caso* $|e_2| > \delta_1/\delta_2$. Se sabe que $f(e_2) = -\delta_1 \text{sign}(e_2)$ por lo tanto $\arcsin(f(e_2))$ es constante. Entonces, se tiene que $\frac{d}{dt} \arcsin(f(e_2)) = 0$. La dinámica de la superficie deslizante σ_2 está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2 &= -k_1 [\sigma_2]^{\frac{1}{2}} + \bar{z}_2, \\ \dot{\bar{z}}_2 &= -k_2 [\sigma_2]^0 - \frac{d(\omega d_2(t))}{dt}, \end{aligned}$$

donde $\bar{z}_2 = z_2 - \omega d_2(t)$. La función candidata de Lyapunov (FCL) (Moreno, 2011) para σ_2 está dada por

$$V_{\sigma_2}(\sigma_2, \bar{z}_2) = \zeta_2^T P_2 \zeta_2, \quad P_2 = P_2^T > 0, \quad (9)$$

con $\zeta_2 = ([\sigma_2]^{\frac{1}{2}}, \bar{z}_2)^T$. La derivada temporal de ζ_2 es

$$\dot{\zeta}_2 = \frac{1}{2} |\sigma_2|^{-\frac{1}{2}} [(A - K_2 C) \zeta_2 + B \rho_{22}(t)], \quad (10)$$

con $\rho_{22}(t) = (-\omega \dot{d}_2(t) - \dot{\omega} d_2(t)) / (\frac{1}{2} |\sigma_2|^{-\frac{1}{2}})$ y $K_2 = (k_{21}, 2k_{22})^T$. La derivada de (9), a lo largo de las trayectorias del sistema (10), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2}(\sigma_2, \bar{z}_2) &\leq -\frac{1}{2} |\sigma_2|^{-\frac{1}{2}} \left[\alpha_2 \zeta_2^T P_2 \zeta_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |\sigma_2|^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \rho_{22} \end{pmatrix}^T \Omega_1 \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \rho_{22} \end{pmatrix} \right], \quad (11) \end{aligned}$$

donde Ω_1 está definida por (8b), $L_2 = 2(\bar{\omega} \bar{d}_2 + \bar{\omega}_{\max})$ y $Y_2 = K_2 C$. Si la LMI (8a) es factible, la derivada de la función de Lyapunov cumple

$$\dot{V}_{\sigma_2}(\sigma_2, \bar{z}_2) \leq -\frac{\alpha_2}{2} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2) V_{\sigma_2}^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Entonces, $(\sigma_2, \bar{z}_2) = 0$ es Uniformemente Estable en Tiempo Finito (UETF). En la superficie deslizante $\sigma_2 = 0$, se sabe que $e_3 = \arcsin(\delta_1 |e_2|^0)$. Considerando la igualdad anterior, las dinámicas de e_1 y e_2 en el modo deslizante, están dadas por

$$\dot{e}_1 = (1 + d_2) \omega e_2 - k_{11} [e_1]^{\frac{1}{2}} + \bar{z}_1, \quad (13a)$$

$$\dot{\bar{z}}_1 = -k_{12} [e_1]^0 - (v \dot{d}_1(t) + \dot{v} d_1(t)), \quad (13b)$$

$$\dot{e}_2 = -(1 + d_2(t)) \omega e_1 - v \dot{d}_1 [e_2]^0, \quad (13c)$$

con $\bar{z}_1 = z_1 - v d_1(t)$. Considere la FCL

$$V_e(e_1, e_2) = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + \zeta_1^T P_1 \zeta_1, \quad P_1 = P_1^T > 0, \quad (14)$$

con $\zeta_1 = ([e_1]^{\frac{1}{2}}, \bar{z}_1)^T$. La derivada temporal de ζ_1 satisface

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{1}{2} |e_1|^{-\frac{1}{2}} [(A - K_1 C) \zeta_1 + (C^T \rho_{11}(t) + B \rho_{12}(t))],$$

con $\rho_{11}(t) = (1 + d_2(t)) \omega e_2$, $\rho_{12}(t) = -2|e_1|^{\frac{1}{2}} (v \dot{d}_1(t) + \dot{v} d_1(t))$ y $K_1 = (k_{11}, 2k_{12})^T$. La derivada temporal de V_e , a lo largo de las trayectorias del sistema (13), satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_e \leq & -k_{11}|e_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e_1^2 - v_d\delta_1|e_2| + \frac{1}{2}|e_1|^{-\frac{1}{2}} \left[-\alpha_1\zeta_1^T P_1 \zeta_1 \right. \\ & \left. + 2\zeta_1^T P_1 C^T \rho_{11}(t) + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \rho_{12} \end{pmatrix}^T \Omega_2 \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \rho_{12} \end{pmatrix} \right], \quad (15) \end{aligned}$$

donde Ω_2 está definida por (8a), $L_1 = 2(v_{\max}\bar{d}_1 + \bar{v}_{\max})$. Si la LMI (8b) es factible, la derivada temporal de V_e puede ser acotada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_e \leq & -k_{11}|e_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e_1^2 - v_{d_{\min}}\delta_1|e_2| \\ & - \frac{\alpha_1}{2}|e_1|^{\frac{1}{2}}\lambda_{\min}(P_1) + 2\lambda_{\max}(P_1)\omega_{\max}|e_2|, \end{aligned}$$

y así, para cualquier $\beta, \mu \in (0, 1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_e \leq & -(1-\mu)k_{11}|e_1|^{\frac{3}{2}} - \mu k_{11}|e_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e_1^2 \\ & - \frac{\alpha_1}{2}|e_1|^{\frac{1}{2}}\lambda_{\min}(P_1) - (1-\beta)v_{d_{\min}}\delta_1|e_2| \\ & - \beta v_{d_{\min}}\delta_1|e_2| + 2\lambda_{\max}(P_1)\omega_{\max}|e_2|. \quad (16) \end{aligned}$$

Para asegurar que \dot{V}_e es negativa definida, se considera que $|e_1| \leq 1$ y las desigualdades, (8e) y (8f), se satisfacen. Así, la derivada temporal de V_e satisface

$$\dot{V}_e \leq -\frac{\alpha_1}{2}|e_1|^{\frac{1}{2}}\lambda_{\min}(P_1) - \mu k_{11}|e_1|^{\frac{3}{2}} - (1-\beta)v_{d_{\min}}\delta_1|e_2|. \quad (17)$$

Basado en (17), $(e_1, e_2) = 0$ es Localmente Uniformemente Asintóticamente Estable (LUAE). Después de un tiempo finito, $|e_2(t)|$ alcanza el valor δ_1/δ_2 .

2) *Caso* $|e_2| \leq \delta_1/\delta_2$. Para este caso $f(e_2) = -\delta_2 e_2$, $|\delta_2 e_2| \leq \delta_1 < 1$ y la derivada temporal de $\arcsin(f(e_2))$ puede ser calculada como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arcsin(f(e_2)) &= \eta(t, e_1, e_2, e_3), \\ &= \frac{\delta_2(1+d_2(t))\omega e_1 - \delta_2 v_d \sin(e_3)}{\sqrt{1-\delta_2^2 e_2^2}}. \end{aligned}$$

De (6), se sabe que $e_2 = \delta_2^{-1} \sin(\sigma_2 - e_3)$ y

$$\eta(t, e_1, e_2, e_3) = \frac{\delta_2(1+d_2(t))\omega e_1 - \delta_2 v_d \sin(e_3)}{\sqrt{1-\delta_2^2[(1/\delta_2^2)\sin^2(\sigma_2 - e_3)]}}.$$

Aplicando identidades trigonométricas $\eta(e_1, e_2, e_3)$ puede ser reescrito como $\eta = \eta_1 + \eta_2$ con

$$\eta_1(t, e_1, \sigma_2, e_3) = \frac{\delta_2(1+d_2)\omega e_1}{\cos(\sigma_2 - e_3)}, \quad (18a)$$

$$\eta_2(e_1, \sigma_2, e_3) = -\frac{\delta_2 v_d \sin(e_3)}{\cos(\sigma_2 - e_3)}. \quad (18b)$$

Entonces, de acuerdo a (6) y $|e_2| \leq \delta_1/\delta_2$, se obtiene que

$$|\sigma_2 - e_3| \leq \arcsin(\delta_1), \quad (19)$$

y debido al hecho de que $\delta_1 \in (0, 1)$, la desigualdad anterior puede ser acotada por $\pi/2$. Por lo tanto

$$|\sec(\sigma_2 - e_3)| \leq 1 + \gamma |\sigma_2 - e_3| \leq \frac{2 + \gamma\pi}{2},$$

para algún $\gamma > 0$. Por lo tanto, el término (18a) puede ser acotado por

$$|\eta_1(e_1, \sigma_2, e_3)| \leq (2 + \gamma\pi)\delta_2\omega_{\max}|e_1|,$$

mientras que la derivada temporal de $\eta_2(e_1, e_2, e_3)$ está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_2(t)}{dt} &= \delta_2\{v_d \sin(e_3) \sec(\sigma_2 - e_3) \tan(\sigma_2 - e_3)\eta \\ &+ \sec(\sigma_2 - e_3)[\dot{v}_d \sin(e_3) + v_d \cos(e_3)(-\omega d_2 + u_2)]\}, \end{aligned}$$

y está acotada por

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\eta_2(t)}{dt} \right| \leq & \frac{\delta_2(2 + \gamma\pi)}{2} \left\{ \frac{\gamma\pi}{2} v_{d_{\max}} |\eta| \right. \\ & \left. + [\bar{v}_{\max} + v_{d_{\max}}(2\omega_{\max} + \omega_{d_{\max}})] \right\}. \end{aligned}$$

Así, la función $\eta(e_1, \sigma_2, e_3)$ está acotada por

$$|\eta(e_1, \sigma_2, e_3)| \leq (2 + \gamma\pi)\delta_2[\omega_{\max}|e_1| + v_{d_{\max}}]. \quad (20)$$

Considere $\zeta_3 = ([\sigma_2]^{\frac{1}{2}}, z_3)^T$, con $z_3 = z_2 - \omega d_2(t) - \eta_2$. La derivada temporal de ζ_3 está dada por

$$\dot{\zeta}_3 = \frac{1}{2}|\sigma_2|^{-\frac{1}{2}} [(A - K_2 C)\zeta_3 + B_1\eta_1(t) + B_2\rho_{22}(t)]. \quad (21)$$

Considere la FCL (Moreno, 2011)

$$V_{\sigma_2}(\sigma_2, z_3) = \zeta_3^T P_2 \zeta_3, \quad P_2 = P_2^T > 0. \quad (22)$$

Así, la derivada de V_{σ_2} , a lo largo de las trayectorias del sistema (21), satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2}(\sigma_2, z_3) &= \frac{1}{2}|\sigma_2|^{-\frac{1}{2}} \left[\zeta_3^T (A - K_2 C)^T P_2 \zeta_3 \right. \\ & \left. + \zeta_3^T P_2 (A - K_2 C)\zeta_3 + 2\zeta_3^T P_2 B \bar{\rho}_{22}(t) + 2\zeta_3^T P_2 C^T \eta_1(t) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

con $\bar{\rho}_{22}(t) = (-\omega \dot{d}_2 + \dot{\omega} d_2) + \frac{d\eta_2(t)}{dt} / (\frac{1}{2}|\sigma_2|^{-\frac{1}{2}})$. La derivada \dot{V}_{σ_2} puede ser acotada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2}(\sigma_2, z_3) \leq & \frac{1}{2}|\sigma_2|^{-\frac{1}{2}} \left[-\alpha_4 \zeta_3^T P_2 \zeta_3 + 2\zeta_3^T P_2 B \eta_1(t) \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \bar{\rho}_{22} \end{pmatrix}^T \Omega_4 \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \bar{\rho}_{22} \end{pmatrix} \right], \quad (24) \end{aligned}$$

donde Ω_4 está definida por (8d) con

$$\begin{aligned} L_4 = 2 \left\{ \bar{\omega}_{\max} + \omega_{\max} \bar{d}_2 + \frac{\delta_2(2 + \gamma\pi)}{2} \left[\frac{\delta_2 \gamma \pi}{2} (2 + \gamma\pi) v_{d_{\max}}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}}(2\omega_{\max} + \omega_{d_{\max}})) \right] \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Si la LMI (8d) es factible, la derivada temporal de V_{σ_2} puede ser acotada por arriba como

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma_2}(\sigma_2, z_3) &\leq -(1 - \phi) \frac{\alpha_4}{2} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2) V_{\sigma_2}^{\frac{1}{2}}, \\ \forall V_{\sigma_2} \geq & \frac{4\lambda_{\max}^2(P_2)\delta_2 [(2 + \phi\pi)\delta_2\omega_{\max}|e_1]|^2}{\alpha_4^2 \lambda_{\min}(P_2)}, \end{aligned}$$

con $\phi \in (0, 1)$. Entonces, se prueba que $\dot{\sigma}_2$ es Estable Entrada-Estado con respecto a e_1 .

Considere la siguiente FCL (Moreno, 2011) para σ_1 como

$$V_{\sigma_1} = \zeta_4^T P_1 \zeta_4, \quad P_1^T = P_1 > 0, \quad (26)$$

con $\zeta_4 = ([\sigma_1]^{\frac{1}{2}}, z_4)^T$ y $z_4 = z_1 - vd_1 + (1 + d_2(t))\omega e_2$. La derivada de ζ_4 está dada por

$$\dot{\zeta}_4 = \frac{1}{2} |e_1|^{-\frac{1}{2}} \{ (A - K_1 C)\zeta_4 + B\bar{\rho}_{12}(t) + B[-(1 + d_2(t))^2 \omega^2 e_1] \}, \quad (27)$$

con $\bar{\rho}_{12}(t) = (2|e_1|^{\frac{1}{2}})(-v\dot{d}_1 - \dot{v}d_1(t) + (1 + d_2(t))\omega v_d \sin(e_3) + e_2(1 + d_2(t))\dot{\omega} + \dot{d}_2(t)\omega)$. La derivada temporal de (26), a lo largo de las trayectorias del sistema (27), está dada por

$$\dot{V}_{\sigma_1} \leq \frac{1}{2} |e_1|^{-\frac{1}{2}} \left[-\alpha_3 \zeta_4^T P_1 \zeta_4 + 2\zeta_4^T P_1 B(1 + d_2)^2 \omega^2 e_1 + \begin{pmatrix} \zeta_4 \\ \bar{\rho}_{12} \end{pmatrix}^T \Omega_3 \begin{pmatrix} \zeta_4 \\ \bar{\rho}_{12} \end{pmatrix} \right], \quad (28)$$

donde Ω_3 está definida por (8c), $L_3 = 2(v_{\max}\bar{d}_1 + \bar{v}_{\max} + 2\omega_{\max}v_{d_{\max}} + 2\frac{\delta_1}{\delta_2}\bar{\omega}_{\max} + \bar{d}_2\omega_{\max})$, y $Y_1 = K_1 C$. Si la LMI (8c) es factible, la derivada de V_{σ_1} , considerando que $|e_1| \leq 1$, puede ser acotada por arriba como

$$\dot{V}_{\sigma_1} \leq -(1 - \xi) \frac{\alpha_3}{2} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1) V_{\sigma_1}^{\frac{1}{2}} - \xi \frac{\alpha_3}{2} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1) V_{\sigma_1}^{\frac{1}{2}} + 4\omega_{\max}^2 V_{\sigma_1}^{\frac{1}{2}}, \quad (29)$$

para cualquier $\xi \in (0, 1)$. Entonces, para garantizar la definidad negativa de (29), la condición (8g) se debe satisfacer. Así, la derivada temporal de V_{σ_1} satisface

$$\dot{V}_{\sigma_1} \leq -(1 - \xi) \frac{\alpha_3}{2} \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1). \quad (30)$$

Entonces, $e_1 = 0$ es Localmente UETF. Por lo tanto, cuando σ_2 es Estable Entrada-Estado con respecto a e_1 , y $e_1 = 0$ es Estable en Tiempo Finito; $\sigma_2 = 0$ es también Estable en Tiempo Finito. Finalmente, para el error e_2 se propone la FCL $V_{e_2} = \frac{1}{2}e_2^2$. Cuando $\sigma_2 = 0$ y $e_1 = \sigma_1 = 0$, se sabe que $\sin(e_3) = f(e_2)$, entonces

$$\dot{V}_{e_2} = -\delta_2 v_d e_2^2 \leq -\delta_2 v_{d_{\min}} e_2^2, \quad (31)$$

por lo tanto, $e_2 = 0$ es UAE. Por otra parte, en la superficie deslizante $\sigma_2 = 0$, por su definición se sabe que $|e_3| = \arcsin(\delta_2|e_2|)$; así, $e_3 = 0$ es también UAE. Esto concluye la prueba.

REFERENCIAS

- Ailon, A. and Zohar, I. (2008). Point-to-point control and trajectory tracking in wheeled mobile robots: some further results and applications. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 9546–9551.
- Azzabi, A. and Nouri, K. (2021). Design of a robust tracking controller for a nonholonomic mobile robot based on sliding mode with adaptive gain. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 18(1).
- Batti, H., Ben Jabeur, C., and Seddik, H. (2019). Fuzzy logic controller for autonomous mobile robot navigation. In *2019 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, 1–6.
- Ben Jabeur, C. and Seddik, H. (2021). Design of a PID optimized neural networks and PD fuzzy logic controllers for a two-wheeled mobile robot. *Asian Journal of Control*, 23(1), 23–41.
- Bloch, A.M. (2003). *Nonholonomic Mechanics*, 207–276. Springer New York, New York, NY.
- Canudas de Wit, C., Bruno, S., and Georges, B. (2012). *Theory of robot control*. Springer Science & Business Media.
- Castillo, O. and Aguilar, L.T. (2019). Fuzzy control for wheeled mobile robots. In *Type-2 Fuzzy Logic in Control of Nonsmooth Systems*, 85–96. Springer.
- De Luca, A., Oriolo, G., and Samson, C. (1998). *Feedback control of a nonholonomic car-like robot*, 171–253. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Dòria-Cerezo, A., Biel, D., Olm, J.M., and Repecho, V. (2019). Sliding mode control of a differential-drive mobile robot following a path. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, 4061–4066.
- Jun, Z. and Zhi, S. (2019). Adaptive sliding mode trajectory tracking control for wheeled mobile robots. *International Journal of Control*, 92(10), 2255–2262.
- Karkoub, M., Atinç, G., Stipanovic, D., Voulgaris, P., and Hwang, A. (2019). Trajectory tracking control of unicycle robots with collision avoidance and connectivity maintenance. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 96(3), 331–343.
- Lan, X., Qin, C., Liu, Y., Ouyang, H., and Liu, G. (2019). Intelligent guidance of autonomous mobile robots based on adaptive dynamic programming. In *2019 34rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC)*, 695–699.
- Martínez, E.A., Ríos, H., and Mera, M. (2021). Robust tracking control design for unicycle mobile robots with input saturation. *Control Engineering Practice*, 107, 104676.
- Mera, M., Ríos, H., and Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102, 104548.
- Moreno, J.A. (2011). Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*, 113–149. Springer.
- Mu, J., Yan, X.G., Spurgeon, S., and Mao, Z. (2017). Nonlinear sliding mode control of a two-wheeled mobile robot system. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 27, 75.
- Siegwart, R. and Nourbakhsh, I. (2004). *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. Bradford Book. MIT press, Cambridge, Massachusetts.
- Tayebi, A. and Rachid, A. (2000). Adaptive controller for non-holonomic mobile robots with matched uncertainties. *Advanced Robotics*, 14(2), 105–118.
- Tzafestas, S.G. (2013). *Introduction to mobile robot control*. Elsevier, Amsterdam.
- Wang, D. and Low, C.B. (2008). Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: Control design perspective. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(3), 676–687.