Memorias del Congreso Nacional de Control Automático
ISSN: 2594-2492

Stability of Positive Linear Systems by Invariant Polytopes

Horacio Leyva C.* **Francisco A. Carrillo N.***

* *Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, hleyva@mat.uson.mx, carrillo@mat.uson.mx.*

Abstract: The problem of stability and stabilization of positive linear systems is studied through the properties of the Metzler and Hurwitz matrices, the invariance of convex polytopes is established, such that it is possible to describe the geometry of the dynamics stable for such positive linear systems.

Keywords: Positive Systems, Invariant Polytopes, Stability.

1. INTRODUCCIÓN

La búsqueda por nuevas características de las soluciones de los sistemas positivos es motivada por la capacidad de representación que estos sistemas positivos tienen en el área de las aplicaciones. En general, las propiedades de las matrices Metzler nos permiten describir dichas características para sistemas autónomos lineales positivos, ver teorema de Perron-Frobenius como Teorema 2 en (2). Similarmente, existen teoremas de Lyapunov (ver (9)) que permiten concluir la invarianza de conjuntos convexos en el espacion de estados, de tal manera que nos permite una mejor descripción del comportamiento de las soluciones de este tipo de sistemas. En este trabajo, consideramos una función de Lyapunov lineal por pedazos, de tal forma que obtenemos la invarinza positiva de conjuntos tipo-simplex contenidos en el ortante positivo de $\mathbb{R}^n$, lo cual implica la estabilidad asintótica de las soluciones de sistemas positivos. Adicionalmente, estos resultados nos permiten diseñar controles estabilizantes que preserven la positividad del sistema.

Considerando los resultados de invariancia de politopos bajo sistemas lineales autónomos de tiempo continuo, presentados en (8; 12), en este trabajo presentamos resultados para describir la geometría de la estabilización de sistemas lineales positivos. En el trabajo (14) de Bartosiewicz se usa la equivalencia (para matrices Metzler) entre coeficientes positivos del polinomio y la estabilidad del sistema LTI de tiempo continuo, pero no trabajan la descripción de la dinámica del sistema positivo.

Para matrices Metzler A, es conocida la equivalencia entre una matriz A Hurwitz y la existencia de un vector $L > 0$ tal que $L^T A < 0$, ver (1; 13; 10). Dada una matriz A Metzler y Hurwitz, sea L_m una parametrización de la familia de vectores (cono) $\left\{L \in \mathbb{R}^n_+ : L^T A < 0\right\}$. Una vez determinada la familia de vectores positivos L_m, ¿cómo intervienen estos vectores en la descripción de la dinámica del sistema positivo (1)?. En este trabajo establecemos la invariancia de una familia de politopos P_m, definidos como conjunto de nivel de la función de Lyapunov $L_m^T |x|$, de manera que aun variando valores para $m > 0$, se preserva la invariancia de la familia de politopos P_m. Esta invariancia representa una descripción de la dinámica en el espacio de estado.

2. PRELIMINARES Y LA FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Notación

Diremos que una matriz A es *positiva* si todas sus entradas a_{ij} son positivas.

Para matrices A y B, con $A \neq B$, usamos la siguiente notación

$A > B$ significa que $a_{ij} > b_{ij}$

$A \geq B$ significa que $a_{ij} \geq b_{ij}$

$\mathbb{R}_+$ es el conjunto de números reales no negativos.

$\mathbb{R}^n_+$ es llamado el *ortante positive* de $\mathbb{R}^n$, dado por $\{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$.

Considérese el sistema lineal a tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax, \qquad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Con el fin de agregar el problema de estabilización de un sistema lineal positivo, consideramos un función de Lyapunov con peso L^T, dada por

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i |x_i| = L^T |x|,$$

tal que $V(x)$ es decreciente, para concluir que el origenis decreasing, to conclude that the origin $x = 0$ es un equilibrio globalmente asintóticamente estable para el sistema el sistema.

Primeramente definimos el politopo P_c como el siguiente conjunto cerrado y convexo

$$P_c = \{x \in \mathbb{R}^n : L^T |x| \leq c, \quad c > 0\},$$

donde $\|x\| = l_1 |x_1| + \cdots + l_n |x_n|$, con $l_i > 0$, para $i = 1, 2, ..., n$.

3. RESULTADOS PRINCIPALES

Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, definimos el vector positivo L^T como

$$L^T = -p^T A^{-1},$$

donde $p > 0$ es un vector arbitrario, tal que el politopo $P_c \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo cerrado dado por

$$P_c = \{x \in \mathbb{R}^n : L^T |x| \leq c, \quad c > 0\}, \qquad (2)$$

con $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^T$. El politipo P_c tiene 2^n caras; cada cara es un segmento de hiperplano de dimensión $n-1$; este politopo lo podemos representar como

$$P_c = Conv\left\{\pm\frac{c}{l_1}e_1,\ \pm\frac{c}{l_2}e_2,\ \ldots,\ \pm\frac{c}{l_n}e_n\right\},$$

donde $L^T = (l_1, \ldots, l_n)$ y los vectores $e_1,\ e_2,\ \ldots, e_n$, representan la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definimos también el politopo (simplex) $S_c \subset \mathbb{R}^n_+$ como el conjunto convexo y cerrado

$$S_c = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : L^T |x| \leq c, \quad c > 0\},$$

para cada $c > 0$, el politopo $S_c \subset \mathbb{R}^n_+$ tiene $n+1$ caras, cada cara es un segmento de hiperplano de dimensión $n-1$; una cara puede ser escrita como $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Lx = c\}$, las otras n caras del politopo S_c pertenecen a la frontera $\partial\mathbb{R}^n_+$.

En (1.3) de la proposición 1 de (10), para la familia de matrices Metzler A, Rantzer mostró la equivalencia entre ser matriz Hurwitz A y la existencia de un vector positivo $L > 0$ tal que $L^T A < 0$. En el siguiente lema se muestra la familia de vectores positivos $L > 0$.

Lema 1. Sea A una matriz Metzler y Hurwitz, entonces con el vector $L^T := -p^T A^{-1}$, con p positivo, entonces $L^T A < 0$.

Demostración. Por el teorema de Perron-Frobenius para matrices Metzler (Teorema 2 en (2)), la matriz $-A^{-1}$ es positiva si y sólo si A es matriz Hurwitz, de tal forma que

$$L^T A = -p^T A^{-1} A = -p^T < 0.$$

■

Proposición 1. Si A es matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo P_c dado por (2) es invariante bajo el sistema lineal (1).

Demostración. Primero probaremos que la función $V(x(t)) = L^T |x(t)|$ es decreciente. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, tal que la vecindad N_x de x no contiene puntos sobre los ejes, así que las entradas x_i del vector x no cambian de signo, sea $L^T := -p^T A^{-1}$, con p cualquier vector positivo, tal que cuando se derive la función

$$\begin{aligned} V(x) &= L^T |x| \\ &= l_1 s_1 x_1 + l_2 s_2 x_2 + \cdots + l_n s_n x_n, \end{aligned}$$

donde $s_i = sign(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, con la función signo

$$sgn(x_i) = \frac{d|x_i|}{dx_i} = \begin{cases} 1 & si\ x_i > 0 \\ -1 & si\ x_i < 0 \end{cases},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (l_1 s_1, \ldots, l_n s_n) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \\ &= (l_1 s_1, ..., l_n s_n) \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & -a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= |x_1| \left(-l_1 a_{11} + \sum_{i \neq 1} l_i a_{i1} \frac{s_i}{s_1} \right) + \cdots \\ &\quad + |x_n| \left(-l_n a_{nn} + \sum_{i \neq n} l_i a_{in} \frac{s_i}{s_n} \right) \end{aligned}$$

ya que $\frac{s_i}{s_j} \leq 1$, entonces

$$|x_j| \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \frac{s_i}{s_j} \leq |x_j| \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \text{para } j = 1, 2, \ldots, n,$$

por lo tanto tenemos que

$$x_j(-l_j a_{jj} s_j + \sum_{i\neq j} l_i a_{ij} i s_i) =$$
$$|x_j|(-l_j a_{jj} + \sum_{i\neq j} l_i a_{ij} \frac{s_j}{s_i})$$
$$\le |x_j|\,(-l_j a_{jj} + \sum_{i\neq j} l_i a_{ij}) = |x_j|\, L^T A_j$$

donde A_j es la $j-th$ columna de la matriz A. Por lo cual

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (l_1 s_1, \ldots, l_n s_n)Ax \\ &\le L^T A\,|x| \\ &= -p^T A^{-1} A\,|x| \\ &= -p^T|x| < 0 \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^n \backslash E,\end{aligned}$$

donde

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n |\ \prod_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

Ahora, consideremos el caso $x_0 \in E$, con la correspondiente solución $\varphi(t, x_0)$ del sistema lineal (1). Sean p, $q \in \mathbb{R}^n \backslash E$ tales que el segmento de línea pq que corta al conjunto E en x_0, se sabe que el conjunto $e^{At}pq$ es un segmento de línea para cada $t > 0$, así que $\dot{V}(p) < 0$ y $\dot{V}(q) < 0$, por lo tanto la función $V(x(t))$ es decreciente en $x_0 :\ V(\varphi(t, x_0)) < V(x_0)$ para $t > 0$. Concluímos que $V(x(t))$ es decreciente en $\mathbb{R}^n$. De acuerdo al teorema 2.7.20 en (9) pág. 154, el politopo convexo P_c es invariante bajo el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, de tal forma que el origen $x = 0$ es asintóticamente estable. ∎

Considérese el sistema

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \tag{3}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n_+$, $b \in \mathbb{R}^m_+$, con $\bar{u} > 0$. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz Metzler y Hurwitz, tenemos el equilibrio positivo $\bar{x}$ dado por

$$\bar{x} = -A^{-1} b\bar{u} > 0.$$

Para un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, se define al conjunto *adición de Minkowski* como

$$\bar{x} + P_c := \{\bar{x} + x \mid x \in P_c\}. \tag{4}$$

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.

Proposición 2. Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo $\bar{x} + P_c$ dado por (4) es invariante bajo el sistema (3).

Demostración. Sea $y(t) = x(t) - \bar{x}$, entonces el sistema (3) y $\dot{y} = Ay$ son equivalentes. Por lo tanto, la Proposición 1 implica que $x(t) \in \bar{x} + P_c$ para todo $t \ge 0$. ∎

Observación 1. El equilibrio $x = 0$ es exponencialmente estable, ya que existe $\mu > 0$ tal que la desigualdad

$$\dot{V} < -\mu V \quad \text{para toda } x \neq 0,$$

se satisface. Esta desigualdad se obtiene considerando $L^T = \omega^T > 0$, donde ω es el vector propio asociado al valor propio dominante de la matriz A.

A continuación se dá un problema de aplicación de los resultados anteriores. Consideremos el modelo lineal para la concentración de la insulina descrita en (2; 6), sea el sistema

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \tag{5}$$

donde las variables de estado

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

representan la concentración de insulina en los órganos principales del cuerpo humano (cerebro, corazón, pulmones, hígado, estómago, riñones y la piel). El sistema de control propuesto en (2) considera el valor $\bar{u} = 23.349$ y el vector no negativo $b = (0, 0, 0, 0, 0, 1.418, 0)$, con el equilibrio correspondiente $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$;

$$\bar{x} = \left(\frac{21379}{1000}, \frac{21379}{1000}, \frac{21379}{1000}, \frac{12789}{1000}, \frac{16439}{1000}, \frac{4019}{125}, \frac{14483}{1000} \right).$$

Sea $p^T = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7)$ un vector positivo cualquiera, para definir el vector $L_p^T = -p^T A^{-1}$, el cual nos permite definir la función no negativa

$$L_m^T|x| = p_1|x_1| + p_2|x_2| + \cdots + p_7|x_7|,$$

de tal forma que se define el politopo convexo

$$H_p = \{x \in \mathbb{R}^7 : L_p^T|x| \le 1\},$$

con una traslación obtenemos el politopo $\bar{x} + H_p$, el cual podemos representar como

$$\bar{x} + H_p = \{x \in \mathbb{R}^7 : L_p^T|x - \bar{x}| \le 1\}.$$

Podemos ver que si $p_i \ge 1$, para $i = 1, 2, \ldots, 7$, entonces sucede que $\bar{x} + H_p \subset \mathbb{R}^7_+$. De acuerdo a la proposición 2, tenemos que el politopo $\bar{x} + H_p$ es positivamente invariante bajo el sistema (5).

Proposición 3. Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo S_c es invariante bajo el sistema (1).

Demostración. Podemos ver esta proposición como un corolario de la proposición 1, para el caso $|x| = x$, ya que $V : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$. ∎

De acuerdo a la Proposición 1 de Rantzer, podemos observar la siguiente generalización.

Proposición 4. Si el sistema lineal (1) es positivo, sea la matriz D, tal que $\det DA \neq 0$. Consideremos el vector $L^T = -p^T(DA)^{-1}$, con cualquier vector $p > 0$. Así, considerando el sistema lineal

$$\dot{x} = DAx,$$

tenemos la equivalencia

$$L^T < 0 \quad \Leftrightarrow \quad DA \text{ is Hurwitz.}$$

Demostración.
Por el teorema de Perron-Frobenius para matrices Metzler. ∎

Un ejemplo de la proposición 4.
Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad DA = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix},$$

de tal manera que el vector $L^T = -p^T\,(DA)^{-1} < 0$, para cualquier vector $p > 0$, como

$$-(DA)^{-1} = -\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

por lo que el sistema $\dot{x} = DAx + b\bar{u}$, con $\bar{u} > 0$, tiene el equilibrio $\bar{x}$:

$$\bar{x} = -(DA)^{-1}b\bar{u} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\bar{u}$$

$$= \frac{\bar{u}}{35}\begin{pmatrix} 6b_1 + b_2 \\ b_1 + 6b_2 \end{pmatrix},$$

y si $b\bar{u} > 0$, entonces $\bar{x} > 0$.

3.1 Una función lineal estabilizante para un sistema lineal positivo

Consideremos un sistema lineal positive con entrada escalar u

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{6}$$

con matriz Metzler no singular A, de tal manera que agregamos el siguiente problema de estabilización.

Dado el sistema (6), inestable a lazo abierto, proponemos encontrar un vector positivo $L^T > 0$ y un vector K de forma que tenemos la desigualdad

$$L^T(A + bK)x < 0 \;\text{ para toda }\; x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}. \tag{7}$$

Para resolver este problema de estabilización, consideremos el vector $L^T = -p^T A^{-1}$, con un vector positivo $p > 0$, se propone diseñar el vector K de tal manera que (7) se satisfaga.

Un ejemplo en el plano. Consideremos el sistema de control lineal(6) dado por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con constantes positivas a_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tales que $a_1 a_4 - a_2 a_3 > 0$. Observamos que la matriz A es Metzler. También, si $a_1 > a_4$ la matriz A no es Hurwitz.

Encontrando un vector $K = (k_1,\ k_2)$,

$$A + bK = \begin{pmatrix} a_1 + k_1 & a_2 + k_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix},$$

es Metzler y satisface la desigualdad (7). Observamos que

$$L^T(A+bK) = -p^T A^{-1}(A+bK) = -p^T(I+A^{-1}bK)$$

y en nuestro ejemplo tenemos que

$$I + A^{-1}bK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(k_1,\ k_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{d}a_4 k_1 & -\frac{1}{d}a_4 k_2 \\ -\frac{1}{d}a_3 k_1 & 1 - \frac{1}{d}a_3 k_2 \end{pmatrix},$$

tal que

$$L^T(A + bK) = -\Bigg(p_1\left(\frac{1}{d}a_4 k_1 - 1\right) + \frac{1}{d}a_3 k_1 p_2,$$

$$p_2\left(\frac{1}{d}a_3 k_2 - 1\right) + \frac{1}{d}a_4 k_2 p_1\Bigg),$$

para tener estabilidad, the constants k_1 y k_2 deben ser tales que $L^T(A + bK) < 0$, haciendo

$$p_1\left(\frac{1}{d}a_4 k_1 - 1\right) + \frac{1}{d}a_3 k_1 p_2 < 0$$

y

$$p_2\left(\frac{1}{d}a_3 k_2 - 1\right) + \frac{1}{d}a_4 k_2 p_1 < 0,$$

si asignamos los valores $k_1 = -2a_1$ y $k_2 = 0$, obtenemos

$$L^T(A + bK) =$$

$$-\left(\frac{1}{d}(dp_1 + 2a_1 a_3 p_2 + 2a_1 a_4 p_1),\ p_2\right) < 0.$$

Se concluye el diseño de la retroalimentación $u(x) = -2a_1 x_1$, para obtener la estabilidad del sistema positivo retroalimentado con matriz

$$A + bK = \begin{pmatrix} a_1 + k_1 & a_2 + k_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix},$$

ya que $\det A = \det(A + bK) > 0$ y $tr(A + bK) = -a_1 - a_4 < 0$. De manera que hemos logrado encontrar una función de control lineal $u = Kx$ de manera que el sistema retroalimentado sea positivo y estable.

4. CONCLUSIONES

En este estudio se presentan resultados sobre la invariancia de politopos bajo sistemas LTI de tiempo continuo, que permiten describir geometricamente el comportamiento de un sistema lineal positivo. Para matrices Metzler y Hurwitz, se muestra que existe una familia de vectores positivos, denotada por L_m, que permite describir politopos invariantes P_m; de manera que aun variando el parámetro $m > 0$, se preserva la invariancia del sistema positivo. Inclusive, para sistemas en el plano, se muestra que es posible obtener estabilización de un sistema de control mediante tal criterio de invariancia del politopo.

REFERENCES

[1] -L. Farina and S. Rinaldi. *Positive Linear Systems, Theory and Applications.* Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, 2000.

[2] Horacio Leyva, Francisco A. Carrillo, G. Quiroz, R. Femat, *Robust stabilization of positive linear systems via sliding positive control*, Journal of Process Control 41 (2016).

[3] H. Leyva, G. Quiroz, F.A. Carrillo, R. Femat, *Rapid insulin stabilization via slidingmodes control for T1DM therapy*, in: Proceedings of the Mexican Conferenceof Automatic Control, 2013.

[4] H. Leyva, Julio Solís and Rodolfo Suárez, Global CLF Stabilization of Systems with control inputs constrained to a Hyperbox, SIAM J. CONTROL OPTIM., 2013, Vol. 51, No. 1, pp. 745–766.

[5] Leyva,H., Quiroz, G., Carrillo, F.A, and Femat, R. *Insulin stabilisation in artificial pancreas: a positive control approach.* IET Control Theory and Applications, pp. 970-978, (2018).

[6] G. Quiroz, R. Femat. *On hyperglycemic glucose basal levels in type 1 diabetesmellitus from dynamic analysis.* Math. Biosci. 210, 554–575. (2007).

[7] J.T. Sorensen. *A physiologic model of glucose metabilism in man and its use te design and assess improved insulin therapies for diabeties.* (Ph.D. thesis), MIT, USA. (1985).

[8] E.B. Castelan, J.C. Hennet, *On Invariant Polyhedra Of Continuous-Time Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No.11, 1993, pp.1680-85.

[9] N. Bhatia and G. Szegö, "Stability Theory of Dynamical Systems," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.

[10] Anders Rantzer, *Scalable control of positive systems*, European Journal of Control 24 (2015) 72–80.

[11] Vahid Samadi Bokharaie. *Stability Analysis of Positive Systems with Applications to Epidemiology.* January 2012.

[12] Horváth, Z., Song, Y., and Terlaky, T. A Novel Unified Approach to Invariance for a Dynamical System. 2014. arXiv: 1405.5167 [math.DS].

[13] A. Berman, R.J. Plemmons, Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, NewYork, SanDiego, 1994.

[14] Zbigniew Bartosiewicz, Stability and stabilization of linear positive systems on time scales, Positivity (2020) 24:1361–1372, https://doi.org/10.1007/s11117-020-00735-z, (Published online: 28 January 2020).

