

# Estimated State feedback for integrating plus unstable first order delayed systems.

I.O. Valderrama Sánchez \* B. Del Muro Cuéllar \*  
J.F. Marquez Rubio \* L.A. Barragan-Bonilla \*

\* *Instituto Politécnico Nacional, ESIME Culhuacán, Av. Santa Ana No. 1000, Coyoacán, México (e-mail: irving\_space@hotmail.com, bdelmuro@yahoo.com, jfcomr23@yahoo.com.mx, luis.bto08@gmail.com).*

**Abstract:** Estimated state feedback is a well-known control strategy for many types of systems. In the case of delayed systems, the general problem with estimated state feedback is that the necessary and sufficient stability conditions cannot be easily obtained. Many works in the literature make use of linear matrix inequalities where only sufficient conditions for the stability problem are available. This work proposes an observer-based state feedback control strategy for first-order systems with an integrator, unstable and delay. The proposed strategy is based on an observer, which is an extension of the work done previously. Necessary and sufficient conditions for the proposed control scheme are obtained and numerical simulations are presented to evaluate the behaviour of the proposed control scheme.

*Keywords:* integrating process, delay-time, estimated, state-feedback, unstable.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los retardos de tiempo son un problema común en diversos campos de aplicación, tales como procesos químicos, servomecanismos, sistemas hidráulicos, etc., ver por ejemplo Kolmanovskii and Myshkis (1999); (Niculescu, 2001). Actualmente los sistemas son controlados de manera remota, es decir que hay un transporte de información entre el sistema controlado y la estación de control, (Ailon and Gil, 2000); (Shin and Cui, 1995). Este tiempo de transmisión en el envío y recepción de datos provocan retardos en los lazos de control.

Una estrategia comúnmente utilizada para controlar diferentes clases de sistemas con retardo son los controladores con acciones Proporcional(P), Integral (I) y Derivativa (D), ver por ejemplo (Silva et al., 2002), Lee et al. (2010), Arrieta et al. (2011). Un segundo enfoque para controlar sistemas con retardo son el diseño de predictores, los cuales consisten en estimar las señales del sistema antes de ser retardadas y diseñar una etapa de control para el sistema libre de retardo. Entre los primeros antecedentes de las estrategias de estimación actuales se encuentra el bien conocido predictor de Smith, (Smith, 1957); asimismo se han desarrollado modificaciones a dicha estrategia para extender su uso a diferentes sistemas, véase por ejemplo (Del-Muro-Cuéllar et al., 2012) o Rao et al. (2007). Existe la posibilidad de combinar los dos enfoques previamente mencionados, ver por ejemplo (Márquez-Rubio et al., 2012).

Entre los modelos típicos de procesos con funciones de transferencia inestables generalmente identificados en procesos industriales y químicos se encuentran los sistemas de primer orden con un integrador y retardo, (Liu et al., 2005). En este trabajo se presentan las condiciones necesarias y suficientes para diseñar una retroalimentación de estados para la clase de sistemas antes mencionados; adicionalmente se propone el diseño de un observador para implementar la estrategia con un enfoque de estados estimados.

El trabajo se organiza con el siguiente orden: en la Sección 2 se presentan los resultados preliminares utilizados; en la Sección 3 se presenta la estrategia de retroalimentación estática de estados propuesta, en la Sección 4 se presenta el diseño del observador-predictor propuesto. En la Sección 5 se presenta un ejemplo con sus respectivos resultados de simulación, y por último en la Sección 6 se muestran las conclusiones.

## 2. PRELIMINARES

Este trabajo presenta una propuesta de control para la clase de sistemas lineales una-entrada una-salida con retardo de tiempo a la salida dado por,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{b}{s(s-a)}e^{-\tau s}, \quad (1)$$

donde  $U(s)$  y  $Y(s)$  son las señales de entrada y salida respectivamente,  $\tau \geq 0$  es el retardo de tiempo que se

supone conocido,  $a > 0$  es la posición del polo inestable y  $G(s)$  es la función de transferencia libre de retardo.

Por otro lado, considere un controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) dado por:

$$C(s) = k_p(1 + \frac{k_i}{s} + k_d s), \quad (2)$$

A continuación se presenta un resultado preliminar (Lee et al., 2010), el cual aborda el problema de estabilidad de un sistema de primer orden inestable retardado, utilizando un controlador PID.

*Lema 1.* (Lee et al., 2010). Considere el sistema,

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = G_1(s)e^{-\tau s} = \frac{b}{s-a}e^{-\tau s}, \quad (3)$$

el controlador dado por (2) y la ley de control  $U_1(s) = [R_1(s) - Y_1(s)]C(s)$ . Existen  $k_p$ ,  $k_i$ , y  $k_d$  que estabilizan al sistema en lazo cerrado  $Y_1(s)/R_1(s)$ , sí y solo sí  $\tau < \frac{2}{a}$ .

La función de transferencia en lazo cerrado asociado al Lema 1 está dada por,

$$\frac{Y_1(s)}{R_1(s)} = \frac{bk_p(k_d s^2 + s + k_i)}{s(s-a) + bk_p(k_d s^2 + s + k_i)e^{-\tau s}}, \quad (4)$$

donde su ecuación característica es,

$$s(s-a) + bk_p(k_d s^2 + s + k_i)e^{-\tau s} = 0. \quad (5)$$

Los valores  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$  que estabilizan al sistema en lazo cerrado (4) se pueden obtener considerando el siguiente procedimiento.

*Procedimiento 1.*

*Paso 1.* Elegir un valor de  $k_d$  del intervalo

$$\tau - \frac{1}{a} < k_d < \frac{1}{a}. \quad (6)$$

*Paso 2.* Con el valor seleccionado de  $k_d$  en el Paso 1, se puede verificar que con  $k_i = 0$  y algunos valores de  $k_i > 0$ , la expresión,

$$-\tau\omega + \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) + \arctan\left(k_d\omega - \frac{k_i}{\omega}\right) = 0, \quad (7)$$

tiene dos soluciones positivas, las cuales se denotan como  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . Entonces, la cota mínima de  $k_i$  es cero y la cota máxima es el valor máximo de  $k_i$  con el cual la ec. (7) tiene dos soluciones positivas. Elija un valor de  $k_i$  en dicho intervalo. Con los valores elegidos de  $k_d$  y  $k_i$ , identifique los valores  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  en la expresión (7).

*Paso 3.* Con los valores de seleccionados y obtenidos,  $k_d$ ,  $k_i$ ,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , en los pasos anteriores, calcule el intervalo de ganancias  $k_p$  estabilizantes con:

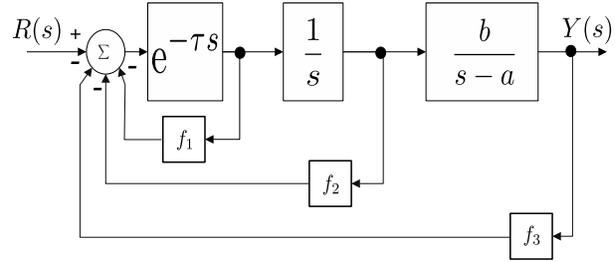


Fig. 1. Retroalimentación estática de estados propuesta.

$$\frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2 + \omega_{c1}^2}{1 + \left(k_d\omega_{c1} - \frac{k_i}{\omega_{c1}}\right)^2}} < k_p < \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2 + \omega_{c2}^2}{1 + \left(k_d\omega_{c2} - \frac{k_i}{\omega_{c2}}\right)^2}}, \quad (8)$$

Finalmente se elige un valor de  $k_p$  dentro del intervalo (8), y con esto se obtiene el último parámetro del controlador PID estabilizante.

La prueba del Lema 1 pueden obtenerse considerando un enfoque en el dominio de la frecuencia, haciendo uso del criterio de estabilidad de Nyquist (Desoer, 1965), ver Lee et al. (2010).

Asimismo existe un trabajo previo (Barragan-Bonilla et al., 2020), en el cual se trabaja un observador predictor utilizando una inyección estática de la salida. En este trabajo se propone el diseño de una estrategia por retroalimentación de los estados estimados, usando el observador diseñado en (Barragan-Bonilla et al., 2020).

La estrategia de control propuesta en este trabajo permite controlar sistemas con un tamaño de retardo superior a los controlados en trabajos previos; por ejemplo usando un controlador PID (Lee et al., 2010); o bien, usando un control basado en observador (Barragan-Bonilla et al., 2020).

### 3. RETROALIMENTACIÓN ESTÁTICA DE ESTADOS PROPUESTA

Considere la retroalimentación estática de estados propuesta para el sistema dado por (1), la cual se muestra en la Fig. 1. Observe que la retroalimentación propuesta en la Fig. 1 es una retroalimentación de estados especial ya que no solo se retroalimentan los estados sino que además se usa la retroalimentación de la señal que se encuentra entre el retardo y el resto de la función de transferencia. A continuación se presenta el resultado formal que establece las condiciones de estabilidad del esquema propuesto.

*Lema 2.* Considere el sistema (1) con una retroalimentación estática de estados descrita en el esquema de la Fig. 1. Existen  $f_1$ ,  $f_2$ , y  $f_3$  tal que el sistema en lazo cerrado  $Y(s)/R(s)$  es estable sí y solo sí  $\tau < 2/a$ .

**Demostración.** Considere la función de transferencia  $Y(s)/U(s)$  de lazo cerrado del esquema de la Fig. 1 dada por,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{be^{-\tau s}}{s(s-a) + [f_1s^2 + (f_2 - af_1)s + (bf_3 - af_2)]e^{-\tau s}}, \quad (9)$$

donde su ecuación característica es,

$$s(s-a) + [f_1s^2 + (f_2 - af_1)s + (bf_3 - af_2)]e^{-\tau s} = 0, \quad (10)$$

o bien,

$$s(s-a) + f_1 \left[ s^2 + \frac{(f_2 - af_1)}{f_1}s + \frac{(bf_3 - af_2)}{f_1} \right] e^{-\tau s} = 0. \quad (11)$$

Dado que las ecuaciones características (5) y (11) son iguales, considerando que  $k_d k_p b = f_1$ ,  $\frac{f_2}{f_1} - a = \frac{1}{k_d}$  y  $\frac{bf_3 - af_2}{f_1} = \frac{k_i}{k_d}$ , se concluye que la condición de estabilidad establecida para la ecuación (5) es la misma que para la ecuación característica (11). Observe que en la ecuación (11),  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  son parámetros libres de diseño, mientras que en la ecuación (5) se cuenta con el mismo número de parámetros libres,  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ . Por lo tanto, la ecuación característica (11) es estable sí y solo sí  $\tau < 2/a$ . ■

Los parámetros asociados al esquema de retroalimentación estática de los estados estudiados en el Lema 2,  $f_1, f_2$  y  $f_3$  se pueden obtener a través del siguiente procedimiento.

*Procedimiento 2.*

*Paso 1.* Elegir un valor del parámetro auxiliar  $\beta$  del intervalo

$$\tau - \frac{1}{a} < \beta < \frac{1}{a}. \quad (12)$$

*Paso 2.* Con el valor seleccionado de  $\beta$  en el Paso 1, se puede verificar que con  $\alpha = 0$  y algunos valores de  $\alpha > 0$ , la expresión,

$$-\tau\omega + \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) + \arctan\left(\beta\omega - \frac{\alpha}{\omega}\right) = 0, \quad (13)$$

tiene dos soluciones positivas, las cuales se denotan como  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . Entonces, la cota mínima de  $\alpha$  es  $\alpha = 0$  y la cota máxima es el valor máximo de  $\alpha$  con el cual la ecuación característica, (13), tiene dos soluciones positivas. Elija un valor de  $\alpha$  en dicho intervalo. Con los valores elegidos de  $\beta$  y  $\alpha$ , identifique los valores  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  en la expresión (13).

*Paso 3.* Con los valores seleccionados y obtenidos,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , en los pasos anteriores, se calcula el intervalo de ganancias  $f_1$  estabilizantes con:

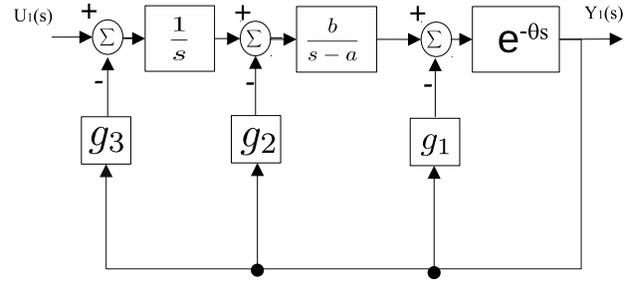


Fig. 2. Inyección de estados.

$$\beta b \sqrt{\frac{a^2 + \omega_{c1}^2}{1 + \left(\beta\omega_{c1} - \frac{\alpha}{\omega_{c1}}\right)^2}} < f_1 < \beta b \sqrt{\frac{a^2 + \omega_{c2}^2}{1 + \left(\beta\omega_{c2} - \frac{\alpha}{\omega_{c2}}\right)^2}}, \quad (14)$$

Se elige un valor de  $f_1$  dentro del intervalo (14), y con esto se obtiene el primer parámetro del esquema de retroalimentación estática de estados propuesta.

*Paso 4.* Con los valores seleccionados en los pasos anteriores  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $f_1$ , obtenemos la ganancia estabilizante  $f_2$ ,

$$f_2 = f_1 \left( \frac{1}{\beta} + a \right) \quad (15)$$

*Paso 5.* Finalmente con los valores seleccionados para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f_1$  y  $f_2$ , obtenemos la ganancia estabilizante  $f_3$ ,

$$f_3 = \frac{1}{b} \left( \frac{\alpha f_1}{\beta} + a f_2 \right) \quad (16)$$

A continuación se presenta un resultado de estabilidad similar al Lema 2.

*Lema 3.* Considere el sistema (1) con una inyección de la salida mostrada en la Fig. 2. Existen  $g_1$ ,  $g_2$ , y  $g_3$  tal que el sistema en lazo cerrado,

$$\frac{Y_2(s)}{R_2(s)} = \frac{be^{-\theta s}}{s(s-a) + [g_1s^2 + (bg_2 - ag_1)s + bg_3]e^{-\theta s}} \quad (17)$$

es estable sí y solo sí  $\theta < 2/a$ .

**Demostración.** La prueba de este lema puede obtenerse de forma similar a la prueba del Lema 2. ■

Los parámetros asociados al esquema de inyección de salida estudiado en el Lema 3,  $g_1, g_2$  y  $g_3$  se pueden obtener usando el siguiente procedimiento.

*Procedimiento 3.*

*Paso 1.* Elegir un valor del parámetro auxiliar  $\phi$  del intervalo

$$\tau - \frac{1}{a} < \phi < \frac{1}{a}. \quad (18)$$

*Paso 2.* Con el valor seleccionado de  $\phi$  en el Paso 1, se puede verificar que con  $\delta = 0$  y algunos valores de  $\delta > 0$ , la expresión,

$$-\tau\omega + \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) + \arctan\left(\phi\omega - \frac{\delta}{\omega}\right) = 0, \quad (19)$$

tiene dos soluciones positivas, las cuales se denotan como  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . Entonces, la cota mínima de  $\delta$  es  $\delta = 0$  y la cota máxima es el valor máximo de  $\delta$  con el cual la ecuación característica, (19), tiene dos soluciones positivas. Elija un valor de  $\delta$  en dicho intervalo. Con los valores elegidos de  $\phi$  y  $\delta$ , identifique los valores  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  en la expresión (19).

*Paso 3.* Con los valores seleccionados y obtenidos,  $\phi$ ,  $\delta$ ,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , en los pasos anteriores, calcule el intervalo de ganancias  $g_1$  estabilizantes con:

$$\phi b \sqrt{\frac{a^2 + \omega_{c1}^2}{1 + \left(\phi\omega_{c1} - \frac{\delta}{\omega_{c1}}\right)^2}} < g_1 < \phi b \sqrt{\frac{a^2 + \omega_{c2}^2}{1 + \left(\phi\omega_{c2} - \frac{\delta}{\omega_{c2}}\right)^2}}, \quad (20)$$

Se elige un valor de  $g_1$  dentro del intervalo (14), y con esto se obtiene el primer parámetro del esquema de inyección de salida propuesto.

*Paso 4.* Con los valores de seleccionados en los pasos anteriores  $\phi$ ,  $\delta$  y  $g_1$ , obtenemos la ganancia estabilizante  $g_2$ ,

$$g_2 = g_1 \left( \frac{1}{\phi} + a \right) \quad (21)$$

*Paso 5.* Finalmente con los valores seleccionados para  $\phi$  y  $\delta$ , obtenemos la ganancia estabilizante  $g_3$ ,

$$g_3 = \frac{\delta}{b\phi}. \quad (22)$$

#### 4. DISEÑO DEL OBSERVADOR

Observe que la ley de control propuesta en Lema 2 supone la medición de las variables internas del sistema. En esta Sección se estudia la implementación de la retroalimentación de estados propuesta en el Lema 2 pero tomándolos del estimador-predicor en lugar de tomarlos directamente de la planta. Para lograr esto, se requiere del diseño de un observador de estados para obtener las señales estimadas. Considere un sistema (1), con una partición del retardo como:

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = e^{-\bar{\tau}s} \frac{b}{s(s-a)} e^{-\theta s}, \quad (23)$$

con  $\tau = \bar{\tau} + \theta$  siendo el retardo total del proceso (23). En la Fig. 3 se propone un observador-predicor para el sistema dado por (23) y a continuación se presenta un resultado relacionado con la convergencia de dicho esquema.

*Teorema 1.* Considere el esquema observador-predicor mostrado en la Fig. 3 con  $\hat{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1(t) \\ \hat{\omega}_2(t) \end{bmatrix}$  siendo la

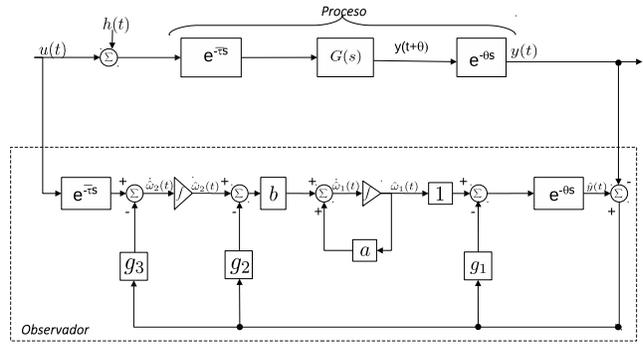


Fig. 3. Observador-predicor propuesto.

estimación de  $\omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix}$ . Entonces existen ganancias  $g_1, g_2$  y  $g_3$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\omega}(t) - \omega(t)] = 0$  si y solo si  $\theta < \frac{2}{a}$ .

**Demostración.** La dinámica completa del observador mostrado en la Fig. 3 se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\omega}}_1(t) \\ \dot{\hat{\omega}}_2(t) \\ \dot{\hat{\omega}}_1(t) \\ \dot{\hat{\omega}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \hat{\omega}_1(t) \\ \hat{\omega}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bg_2 & -bg_2 \\ 0 & 0 & g_3 & -g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} y(t+\theta) \\ \hat{y}(t+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \hat{\omega}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_1 & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

Definiendo el error de predicción como  $e_\omega(t) = \hat{\omega}(t) - \omega(t)$  y el error de estimación como  $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ , es posible representar la dinámica del error como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\omega_1}(t) \\ \dot{e}_{\omega_2}(t) \\ e_{y_1}(t+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -bg_2 \\ 0 & 0 & -g_3 \\ 1 & 0 & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\omega_1}(t) \\ e_{\omega_2}(t) \\ e_{y_1}(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Considere ahora una realización en espacio de estados del sistema descrito en la ecuación (17) que puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ y_2(t+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -bg_2 \\ 0 & 0 & -g_3 \\ 1 & 0 & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t). \quad (27)$$

Se puede apreciar que las condiciones de estabilidad del sistema (27) dadas en el Lema 3, son equivalentes a las del sistema (26), de donde se deriva el resultado del Teorema. ■

Tomando en cuenta los resultados previamente presentados del Teorema 1, los estados pueden ser adecuadamente estimados si y solo si  $\theta < \frac{2}{a}$  y del Lema 2, una retroalimentación estática de estados estimados en el esquema

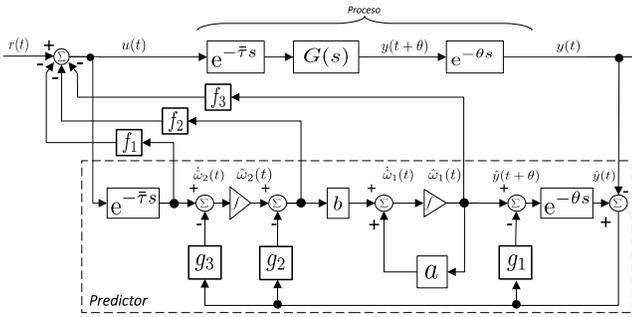


Fig. 4. Esquema de control por retroalimentación estática de estados estimados.

de la Fig. 3 es estable si y solo si  $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$ . De esta manera, se puede establecer el siguiente resultado.

**Teorema 2.** Considere el esquema de retroalimentación estática de estados estimados mostrado en la Figura 4. Entonces existen constantes  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2$  y  $g_3$  tal que el sistema en lazo cerrado es estable sí y solo sí

$$\tau < \bar{\tau} + \theta = \frac{2}{a} + \frac{2}{a} \quad (28)$$

o bien  $\tau < \frac{4}{a}$ .

En la etapa de diseño del controlador propuesto, se sugiere dividir el retardo exactamente a la mitad debido a que las condiciones para cada retardo son las mismas. Con esta sugerencia, se evita quedar cerca del límite de la condición. Por lo general, si el retardo se encuentra cerca del límite en la condición, el intervalo de parámetros estabilizantes es más pequeño, lo que provoca una limitación en la sintonización de los parámetros de convergencia y control.

## 5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

**Ejemplo 1.** Considere el sistema de segundo orden con un polo en el origen, un polo inestable y retardo dado por,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s-1)} e^{-2.8s}. \quad (29)$$

El primer paso es verificar que se cumpla la condición del Teorema 2. Dado que para este caso la condición  $\tau < 4$  se cumple, se procede a dividir el retardo  $\tau$  de la forma  $\bar{\tau} = 1.4$  y  $\theta = 1.4$ .

La condición para la existencia del esquema observador-predictor dada en el Teorema 1 es de  $\theta < 2$ , y dado que para este caso  $\theta = 1.4$ , se procede a calcular los parámetros  $g_1, g_2$  y  $g_3$  del esquema observador-predictor. Haciendo uso del Procedimiento 3, de la ec. (18) se obtiene el rango de  $0.4 < \phi < 1$ . El valor utilizado en esta simulación es de  $\phi = 0.7$ . Con el valor de  $\delta = 0.01$  se puede verificar que la ec. (19) tiene dos valores para  $\omega$ . Estos son  $\omega_{c1} = 0.18$  y  $\omega_{c2} = 0.9$ . Con los valores anteriores es posible obtener el primer parámetro del esquema observador-predictor. Haciendo uso de la ec. (20) se obtiene el rango de  $0.711 < g_1 < 0.8008$ . Usando las

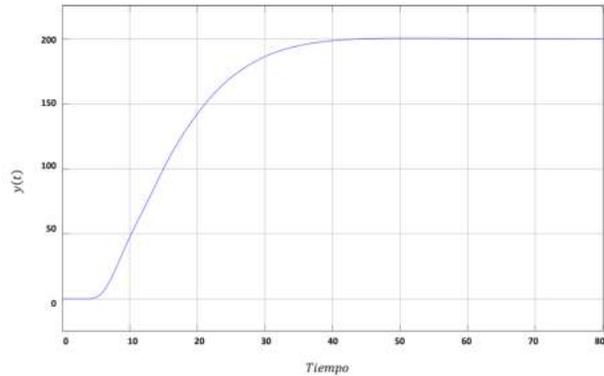


Fig. 5. Respuesta de salida del sistema.

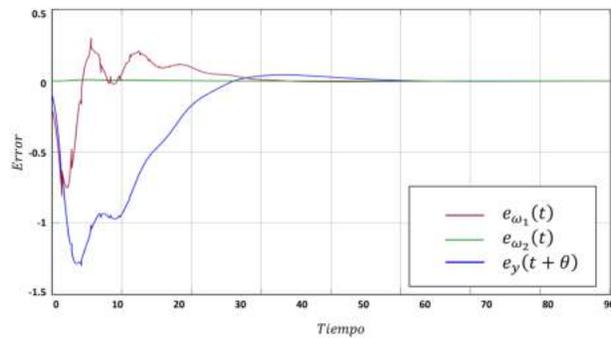


Fig. 6. Convergencia de las señal estimada.

ecuaciones (21) y (22), se obtienen los dos parámetros restantes, los cuales son  $g_2 = 1.82$  y  $g_3 = 0.007$

Para los parámetros del esquema de control por retroalimentación estática de estados estimados se tiene que cumplir la condición de  $\bar{\tau} < 2$ . Dado que en este ejemplo  $\bar{\tau} = 1.4$  se procede a calcular los parámetros  $f_1, f_2$  y  $f_3$ . Haciendo uso del Procedimiento 2, mediante la ec. (12) se selecciona un valor para  $\beta$ . El valor utilizado para este ejemplo es  $\beta = 0.7$ . Con un valor para  $\alpha = 0.01$  la ec. (13) tiene dos soluciones para  $\omega$ , estos valores son  $\omega_{c1} = 0.18$  y  $\omega_{c2} = 0.9$ . Con los valores seleccionados para  $\beta, \alpha, \omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , es posible obtener el rango de valores para  $f_1$  usando la ec. (14). Dicho rango queda dado por  $0.711 < f_1 < 0.8008$ . Utilizando la ec. (15) se obtiene el segundo parámetro, el cual es  $f_2 = 1.82$ . Finalmente, con todos los valores obtenidos anteriormente es posible obtener el valor para el tercer parámetro, el cual queda dado por  $f_3 = 1.825$ .

Para la simulación se utilizó una entrada  $R(s)$  escalón de amplitud 1. La respuesta de salida del sistema se estabiliza en estado estacionario, como se muestra en la Fig. 5.

La convergencia de las señales estimadas se muestran en la Fig. 6. En donde se escogieron condiciones iniciales para los estados de la planta  $G(s)e^{-\bar{\tau}s}$  de 0.1. Asimismo, se muestra la respuesta de salida del sistema en la Fig. 7.

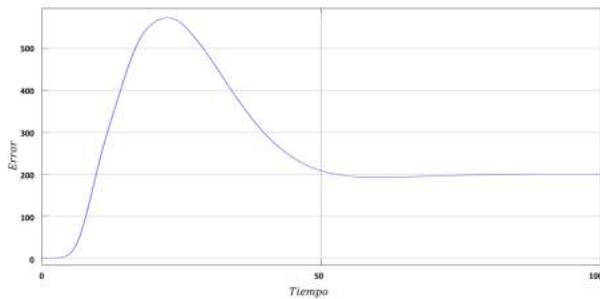


Fig. 7. Respuesta de salida ante condiciones iniciales para la planta de 0.1.

## 6. CONCLUSION

En el presente trabajo se propone una estrategia de control por retroalimentación estática de estados estimados para sistemas retardados que contienen un polo en el origen y un polo inestable. El diseño de la presente propuesta de control se basa en un esquema observador-predicador con retardo dividido. Utilizar la estrategia de la división del retardo permite diseñar un observador para una planta  $G(s)$  con un retardo  $\theta$ , el cual consta de tres parámetros de ajuste ( $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ ). La condición para la convergencia de las señales de dicho observador se cumple sí y solo sí  $\theta < 2/a$ . Una vez estimadas las señales se propone un control por retroalimentación de estados estimados con tres parámetros de ajuste ( $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ ). Esta propuesta de control permite controlar sistemas retardados con un polo en el origen y un polo inestable bajo la condición de  $\bar{\tau} < 2/a$ . Por lo tanto, hacer uso del esquema observador presentado en este trabajo y el control por retroalimentación de estados estimados (esquema que se presenta en la Fig. 4), la condición total para dicha clase de sistemas es de  $\tau < 4/a$ .

## REFERENCES

- Ailon, A. and Gil, M.I. (2000). Stability analysis of a rigid robot with output-based controller and time delay. *Systems & control letters*, 40(1), 31–35.
- Arrieta, O., Vilanova, R., and Visioli, A. (2011). Proportional-integral-derivative tuning for servo/regulation control operation for unstable and integrating processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 50(6), 3327–3334. doi:10.1021/ie101012z. URL <https://doi.org/10.1021/ie101012z>.
- Barragan-Bonilla, L., Marquez-Rubio, J., Del Muro-Cuéllar, B., and Hernández-Pérez, M. (2020). Observer/predicador desing for unstable delayed linear systems with one pole at the origin. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.
- Del-Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J.F., Velasco-Villa, M., and de Jesús Álvarez-Ramírez, J. (2012). On the control of unstable first order linear systems with large time lag: Observer based approach. *European Journal of Control*, 18(5), 439 – 451.
- Desoer, C. (1965). General formulation of the nyquist criterion. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 12(2), 230–234.
- Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (1999). Optimal control of stochastic delay systems. In *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, 557–572. Springer.
- Lee, S.C., Wang, Q.G., and Xiang, C. (2010). Stabilization of all-pole unstable delay processes by simple controllers. *Journal of Process Control*, 20(2), 235–239.
- Liu, T., Zhang, W., and Gu, D. (2005). Analytical design of two-degree-of-freedom control scheme for open-loop unstable processes with time delay. *Journal of Process Control*, 15(5), 559–572.
- Márquez-Rubio, J.F., del Muro-Cuéllar, B., Velasco-Villa, M., and Novella-Rodríguez, D.F. (2012). Observer-pid stabilization strategy for unstable first-order linear systems with large time delay. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51(25), 8477–8487. doi:10.1021/ie201793j. URL <https://doi.org/10.1021/ie201793j>.
- Niculescu, S.I. (2001). *Delay effect on stability: a robust control approach*.
- Rao, A.S., Rao, V., and Chidambaram, M. (2007). Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (foptd) processes. *Industrial & engineering chemistry research*, 46(13), 4561–4571.
- Shin, K.G. and Cui, X. (1995). Computing time delay and its effects on real-time control systems. *IEEE Transactions on control systems technology*, 3(2), 218–224.
- Silva, G.J., Datta, A., and Bhattacharyya, S.P. (2002). New results on the synthesis of pid controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2), 241–252. doi:10.1109/9.983352.
- Smith, O.J.M. (1957). Close control of loops with dead time. *Chem. Eng. Prog.*, Vol. 53.