

Robust Output-Regulation for Constrained and Uncertain Linear Systems: An Attractive Ellipsoid Approach *

Ariana Gutiérrez * Manuel Mera ** y Héctor Ríos *,***

* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, Blvd. Revolución y Cuauhtémoc S/N, C.P. 27000, Torreón Coahuila, Mexico. (e-mail: m.agutierrez@correo.itlalaguna.edu.mx,*

hriosb@correo.itlalaguna.edu.mx).

** *Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UPT, C.P. 07340, Ciudad de México, Mexico. (e-mail: mmerah@ipn.mx)*

*** *Cátedras CONACYT, Av. Insurgentes Sur 1582, C.P. 03940, Ciudad de México, Mexico*

Abstract: This paper aims to design a robust output-based control to regulate the output for a class of uncertain linear systems with input saturation and state constraints, in the presence of external disturbances. The proposed robust control approach is composed of a homogeneous observer, that guarantees finite-time convergence of the state estimation error to a neighborhood of the origin, and a linear control law, that is designed based on the attractive ellipsoid method and a barrier Lyapunov function approach, taking into account the input and state constraints. The synthesis of the robust-output-based control is given in terms of linear matrix inequalities. Simulation results show the workability of the proposed robust control approach.

Keywords: Input Saturation, State Constraints, Uncertain Linear System, Robust Control.

1. INTRODUCCIÓN

Debido a limitaciones estructurales, los sistemas reales tienen restricciones, como la saturación en la entrada de control y restricciones en los estados, (ver, *e.g.*, Cao and Lynch (2015) y Huang and Jia (2019)). Los sistemas también pueden verse afectados por perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas que alteran su estabilidad. Por lo tanto, las estrategias de control deben de considerar estos inconvenientes.

Con respecto al diseño de control para sistemas con restricciones en los estados, en Yu et al. (2019) se propone un control adaptable basado en la salida para una clase de sistemas no lineales inciertos con restricciones en los estados, se garantiza que el error de seguimiento converge a una vecindad del origen sin violar las restricciones en el estado. En varios trabajos se ha empleado la función barrera de Lyapunov (BLF) para diseñar controladores para esta clase de sistemas. Por ejemplo, en Tee and Ge (2011) se diseña un control utilizando un backstepping basado en una BLF para sistemas con restricciones en los

estados, asegurando convergencia asintótica del error de seguimiento sin violar ninguna de las restricciones. Mientras que en Mera et al. (2020) se propone un control por realimentación de salida para sistemas con restricciones en los estados afectados por incertidumbres paramétricas y con ruido en la medición. Este enfoque se basa en un observador de Luenberger y el método del elipsoide atractivo (AEM). Los enfoques del AEM y la BLF son ampliamente utilizados para diseñar controladores considerando restricciones en la entrada de control y en los estados. Con base en estos métodos, considerando que las restricciones en los estados son representadas a través de un politopo, en Llorente-Vidrio et al. (2020) se diseña un control por realimentación de salida para sistemas lineales inciertos. Mientras que en Mera et al. (2016) se diseña un control robusto por realimentación de salida para estabilizar sistemas lineales inciertos con restricciones en los estados. En ambos trabajos, Llorente-Vidrio et al. (2020) y Mera et al. (2016), se garantiza convergencia asintótica de las trayectorias del sistema a una región cercana al origen. Sin embargo, los trabajos mencionados anteriormente no consideran restricciones de saturación en la entrada de control.

* A. Gutiérrez, H. Ríos y M. Mera agradecen el apoyo financiero brindado por CONACYT CVU 932774, Cátedras CONACYT CVU 270504 proyecto 922 y SIP Project 20210351, respectivamente.

En el contexto del diseño de control para sistemas con entradas saturadas y restricciones en los estados, en Zhang et al. (2018) un control robusto adaptable se propone para cierta clase de sistemas con perturbaciones externas y ruido en la medición. Dicho controlador está basado en un método de transformación restringida, asegurando la estabilidad en lazo cerrado. Un control adaptable por realimentación de estado basado en una BLF y la técnica de backstepping se propone en Min et al. (2020) para sistemas no lineales inciertos asegurando estabilidad en tiempo finito para las trayectorias en lazo cerrado. En Wu and Xie (2019) el problema de estabilización para sistemas no lineales se resuelve combinando una BLF y la técnica de ganancia de Nussbaum, asegurando que las trayectorias en lazo cerrado se encuentran acotadas, sin embargo no se consideran perturbaciones externas. Mientras que un controlador backstepping basado en una BLF combinado con la técnica de ganancia de Nussbaum se propone en Edalati et al. (2018) para sistemas no lineales con perturbaciones externas asegurando convergencia asintótica a cero del error de seguimiento. Sin embargo, la mayoría de los trabajos mencionados anteriormente consideran que todo el estado es medible.

Motivados por los problemas anteriores, el objetivo de este artículo es diseñar un control robusto por salida para cierta clase de sistemas lineales inciertos con entradas saturadas, restricciones en los estados, perturbaciones externas y con información únicamente de la salida. Se propone un observador homogéneo que proporciona convergencia en tiempo finito del error de estimación a una región del origen. Basados en el AEM y la BLF, se diseña una ley de control lineal para contrarrestar el efecto de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas tomando en cuenta las restricciones la entrada de control y los estados. Se presenta un método constructivo en términos de desigualdades lineales matriciales (LMIs), para el diseño del control robusto.

Notación. Defina la matriz de dilatación $\Lambda_r(\lambda) = \text{diag}(\lambda^{r_i})$ y el vector de pesos $r = (r_1, \dots, r_n)$, para cualquier $r_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Para una función medible en el sentido de Lebesgue $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q$ defina la norma $\|w\|_{(t_0, t_1)} := \text{ess sup}_{t \in (t_0, t_1)} \|w(t)\|$, entonces $\|w\|_\infty = \|w\|_{(0, +\infty)}$ y el conjunto de todas las funciones w con la propiedad $\|w\|_\infty < +\infty$ se denota como \mathcal{L}_∞ . Defina $[s]^\alpha = |s|^\alpha \text{sign}(s)$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y $\alpha \geq 0$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente tipo de sistema lineal con entrada saturada

$$\dot{x} = (A + \Delta)x + B\sigma(u) + Dw(t), \quad (1a)$$

$$y = Cx, \quad (1b)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es la salida medible, $w \in \mathbb{R}^q$ es el vector de perturbaciones desconocidas y $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa algunas incertidumbres paramétricas del sistema. Las

matrices A, B, C y D son conocidas y de dimensiones adecuadas.

La función saturación σ puede ser expresada de la siguiente manera

$$\sigma(u) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{si } u_{\max} \leq u, \\ u, & \text{si } -u_{\max} < u < u_{\max}, \\ -u_{\max}, & \text{si } u \leq -u_{\max}, \end{cases} \quad (2)$$

donde $u_{\max} > 0$ es el valor máximo que puede tomar la señal de control. Las soluciones del sistema (1) están restringidas dentro del politopo

$$\mathcal{P}_x := \{x \mid b_{1i}^T x \leq 1, i = \overline{1, k_x}\}, \quad (3)$$

donde $b_{1i} \in \mathbb{R}^n$ son vectores dados, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $k_x \in \mathbb{R}$ es el número de caras del politopo.

El problema es diseñar un controlador robusto por salida para regular la salida del sistema (1).

Debido a la estructura de la función saturación (2), existe una región lineal en el control, donde $\sigma(u) = u$, caracterizada por el conjunto $\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R} \mid -u_{\max} \leq u \leq u_{\max}\}$. Se define la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\phi(u) := \sigma(u) - u$ y se introduce el siguiente Lema.

Lema 1. (Tarbouriech et al., 2011). Si $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$ es un elemento de \mathcal{U} ; entonces, la función $\phi(\bar{\alpha})$ cumple con $\bar{\delta}^{-1} \phi^T(\bar{\alpha}) [\phi(\bar{\alpha}) + \bar{\beta}] \leq 0$, para cualquier $\bar{\delta} \in \mathbb{R}_+$.

3. DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO

El enfoque de control robusto propuesto se compone de un observador homogéneo y una ley de control lineal. En la siguiente subsección, se presenta el observador homogéneo.

3.1 Observador Homogéneo

Se asume que el sistema (1) cumple con las siguientes suposiciones.

Suposición 1. El par (A, C) es observable.

Suposición 2. La perturbación w está acotada, i.e., $w \in \mathcal{W} := \{w \in \mathcal{L}_\infty : \|w\|_\infty \leq \bar{w}\}$, con \bar{w} una constante positiva conocida; y la norma de la matriz Δ está acotada, i.e., $\|\Delta\| \leq \vartheta$, con ϑ una constante positiva conocida.

Suposición 3. Las trayectorias del sistema se encuentran acotadas, i.e., $x \in \mathcal{X} := \{x \in \mathcal{L}_\infty : \|x\|_\infty \leq \bar{x}\}$, con \bar{x} una constante positiva conocida.

Con base en Gutiérrez et al. (2020), el observador para el sistema (1) tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}A_0T\hat{x} + T^{-1}ay + B\sigma(u) + T^{-1}\chi[y - C\hat{x}], \quad (4)$$

donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es la estimación x , $a = (a_1, \dots, a_n)^T$, con a_i , $i = \overline{1, n}$, es el i -ésimo coeficiente del polinomio característico de A , mientras que la matriz A_0 tiene la siguiente forma

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \end{pmatrix},$$

y la matriz de transformación $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está dada por $T^{-1} = (A^{n-1}\zeta, A^{n-2}\zeta, \dots, \zeta)$, con $\zeta = \mathcal{O}^{-1}h$, $h = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ y \mathcal{O} es la matriz de observabilidad del par (A, C) . La Suposición 1 implica que la matriz T siempre existe. El término $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa la inyección no lineal, diseñada como

$$\chi[e_y] = \begin{pmatrix} l_1 p_{11}^{\frac{-\mu}{2+2\mu(n-1)}} [e_y]_{\frac{1+\mu(n-2)}{1+\mu(n-1)}} \\ l_2 p_{11}^{\frac{-2\mu}{2+2\mu(n-1)}} [e_y]_{\frac{1+\mu(n-3)}{1+\mu(n-1)}} \\ \vdots \\ l_n p_{11}^{\frac{-n\mu}{2+2\mu(n-1)}} [e_y]_{\frac{1-\mu}{1+\mu(n-1)}} \end{pmatrix},$$

donde $e_y := y - C\hat{x}$, $\mu \in (0, 1)$, l_i , $i = \overline{1, n}$, son ganancias positivas, $p_{11} = \bar{C}P_\varepsilon\bar{C}^T$, con $\bar{C} = CT^{-1}$ y una matriz definida positiva $0 \leq P_\varepsilon^T = P_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se define la función $Q(V, \varepsilon) = \varepsilon^T \Lambda_r (V^{-1}) P_\varepsilon \Lambda_r (V^{-1}) \varepsilon - 1$ que cumple con las propiedades de la función implícita de Lyapunov (Polyakov et al., 2015). Sea $r = (1 + \mu(n-1), 1 + \mu(n-2), \dots, 1)$ y $\tilde{r} = (\mu, 2\mu, \dots, n\mu)$ vectores de pesos, y defina el error de estimación como $e := x - \hat{x}$.

El siguiente teorema proporciona una manera de diseñar las ganancias l_i que garantizan la convergencia en tiempo finito del error de estimación a una vecindad del origen.

Teorema 1. (Gutiérrez et al., 2020). *Asuma que las suposiciones 1-3 se cumplen. Suponga que existe $0 < P_\varepsilon^T = P_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que las siguientes desigualdades matriciales*

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} N & P_\varepsilon \\ P_\varepsilon & -\beta\varphi^{-1}I \end{pmatrix} \leq 0, \\ N := & P_\varepsilon A_0 + A_0^T P_\varepsilon - Y\bar{C} - \bar{C}^T Y^T + P_\varepsilon H + H P_\varepsilon + \alpha P_\varepsilon, \\ & \begin{pmatrix} -\alpha^2 \bar{C} P_\varepsilon \bar{C}^T & Y^T \\ Y & -\tau^{-1} P_\varepsilon \end{pmatrix} \leq 0, \\ & P_\varepsilon H + H P_\varepsilon \geq \sqrt{\alpha + \beta\varphi} P_\varepsilon > 0, \\ & \sqrt{\alpha + \beta\varphi} < 1, \\ & \lambda^{-2\mu} (\Lambda_{\tilde{r}}(\lambda) - I) \Lambda_r(\lambda) P_\varepsilon \Lambda_r(\lambda) (\Lambda_{\tilde{r}}(\lambda) - I) \leq \tau P_\varepsilon, \end{aligned}$$

son factibles para toda $\lambda \in [0, \lambda^*]$, con $\lambda^* = \delta^{-1/(2+2(n-1)\mu)}$ y $\delta, \mu \in (0, 1)$, para ciertas constantes $\alpha, \beta, \tau > 0$, $\varphi = |T\Delta|\bar{x} + |TD|\bar{w}$, y $H = \text{diag}(r)$. Entonces, si $\mu \in (0, 1)$, $L = (l_1, \dots, l_n)^T = P_\varepsilon^{-1}Y$ y $p_{11} = \bar{C}P_\varepsilon\bar{C}^T$, el error de estimación converge en tiempo finito a una región del origen dada por:

$$\|e(t)\| \leq \frac{1}{\lambda_{\max}^{1/2}(T^T P_\varepsilon T)}, \forall t \geq T(e(0)),$$

con un tiempo de convergencia $T(e(0)) \leq (V^\mu(0) - 1)/(\mu(1 - \alpha - \beta\tilde{\varphi}))$, con $V(0) \geq 0$ tal que $Q(V(0), 0) = \varepsilon^T \Lambda_r (V^{-1}) P_\varepsilon \Lambda_r (V^{-1}) \varepsilon - 1 = 0$.

3.2 Diseño del Controlador

Se define el error de seguimiento como:

$$x_r := \int_0^t (r - y(\tau)) d\tau,$$

donde $r \in \mathbb{R}$ es una referencia constante. Entonces se define el siguiente sistema

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{\Delta}z + \tilde{B}\sigma(u) + \tilde{D}w(t) + Fr, \quad (6a)$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}z, \quad (6b)$$

donde $z := (x^T, x_r)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el vector de estados extendido y las matrices del sistema son

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\ \tilde{D} &= \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se introduce la siguiente suposición sobre el sistema extendido (6).

Suposición 4. *El par (\tilde{A}, \tilde{B}) es establezable.*

Debido a (3), las soluciones del sistema (6) se encuentran restringidas dentro del politopo

$$\mathcal{P} := \{z \mid b_i^T z \leq 1, i = \overline{1, k}\}, \quad (7)$$

donde $b_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ son vectores dados y $k \in \mathbb{R}$ es el número de caras del politopo. Debido a que x_r no tiene restricciones, es fácil incluirlo dentro de (3).

Se propone la siguiente ley de control

$$u = K\hat{z}, \quad (8)$$

donde $\hat{z} := (\hat{x}^T, x_r)^T$ es la estimación de z y $K \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un vector de ganancias. Se define el error de estimación de z como $\tilde{e} := z - \hat{z}$. Por lo tanto, la dinámica del error de estimación está dada por $\dot{\tilde{e}} = E\tilde{e} + \tilde{\Delta}z + \tilde{D}w(t) + \tilde{S}[C\tilde{e}]$, donde

$$E = \begin{pmatrix} T^{-1}A_0T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}[C\tilde{e}] = \begin{pmatrix} -T^{-1}\chi[C\tilde{e}] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la dinámica en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{e}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A} + \tilde{\Delta} & 0 \\ \tilde{\Delta} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tilde{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{D} \\ \tilde{D} \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} r \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{S}[C\tilde{e}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}\sigma(Kz - K\tilde{e}) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

El conjunto de restricciones en los estados (7) se aproxima a través de un elipsoide completamente contenido en el politopo (Boyd and Vandenberghe, 2009). Entonces, existe un conjunto de elipsoides $\mathcal{E}(R_x) := \{z \in \mathbb{R}^{(n+1)} \mid z^T R_x z \leq 1\}$, parametrizados por $0 < R_x^T = R_x \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, contenidos en \mathcal{P} si $b_i^T R_x^{-1} b_i \leq 1$, para $i = \overline{1, k}$, donde el elipsoide $\mathcal{E}(R_x)$ caracteriza la región en la que las restricciones en los entados no son violadas. Se definen los elipsoides $\mathcal{E}(R_u) := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z^T R_u z \leq 1\}$ y $\mathcal{E}(P, z_c) := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z^T P z \leq 1\}$, con $0 < R_u^T = R_u \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ con centro en $z_c \in \mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. El vector constante z_c representa el valor en estado estable del sistema nominal. El elipsoide $\mathcal{E}(R_u)$ está relacionado con la región no saturada del sistema, mientras que el elipsoide $\mathcal{E}(P, z_c)$ es la mínima región de convergencia de las trayectorias del sistema.

Se introducen la siguientes matrices:

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} T & \mathbf{0}_{n \times p} \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \kappa I \end{pmatrix}, \bar{P}_\varepsilon = \begin{pmatrix} P_\varepsilon & \mathbf{0}_{n \times p} \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \kappa I \end{pmatrix}, \quad (10a)$$

$$\bar{H} = \text{diag}(\bar{Z}^{-2}I_{(n+1)}) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad (10b)$$

$$\bar{Z} = \|e^{(\bar{A} + \bar{\Delta})T}\| \left[\|z(0)\| + T \left(\|\bar{D}\|w^+ + \|F\| \|r\| \right) \right], \quad (10c)$$

donde κ es un número real cercano a 1. La matriz \bar{H} proporciona una estimación de la región que contiene el conjunto de condiciones iniciales para el caso en el que no hay entrada de control. El control se activa cuando el error de estimación converge a una región cercana a cero, i.e., $u(t) = 0$, para todo $t < T(e(0))$.

El siguiente teorema describe la estabilidad en lazo cerrado del sistema considerando las restricciones en los estados.

Teorema 2. *Asuma que las suposiciones 1-4 se cumplen y que se aplica la ley de control (8) al sistema (9), con $\sigma(u) = u$. Suponga que existen $0 < X_1 = X_1^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $0 < X_2 = X_2^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ y $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que el siguiente conjunto de LMIs*

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi & -\tilde{B}\tilde{Y} & F & \tilde{D} \\ * & \Psi & -\tilde{B}\tilde{Y} & F & \tilde{D} \\ * & * & -N_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma_1/r^2 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma_1 Q_w \end{pmatrix} \leq 0, \quad (11a)$$

$$\Psi = \tilde{A}X_2 + X_2\tilde{A}^T + \vartheta IX_2 + X_2\vartheta I + \tilde{B}\tilde{Y} + \tilde{Y}^T\tilde{B}^T,$$

$$\Psi_1 = \Psi + M - 3\tilde{X}_2,$$

$$\begin{pmatrix} M & X_2 \\ X_2 & 3^{-1}\gamma_1^{-1}X_1 \end{pmatrix} > 0, \quad (11b)$$

$$\begin{pmatrix} N_1 + 2X_2 & I \\ I & \gamma_1^{-1}\bar{P}_T^{-1} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (11c)$$

$$X_1 < X_2, \quad (11d)$$

$$X_2 > \bar{H}^{-1}, \quad (11e)$$

$$b_i^T X_2 b_i \leq 1, \text{ para } i = \overline{1, k}, \quad (11f)$$

es factible para cierta constante $\gamma_1 > 0$, algunos vectores b_i , y $0 < Q_w = Q_w^T \in \mathbb{R}^{q \times q}$ tal que $\lambda_{\max}(Q_w) = 1/\bar{w}^2$, con $\bar{P}_T = \bar{T}^T \bar{P}_\varepsilon \bar{T}$, $X_1 = P^{-1}$, $X_2 = R_x^{-1}$. Si $\|z(0)\| \in \mathcal{E}(R_x) \setminus \mathcal{E}(P, z_c)$ y K es diseñada como $K = \tilde{Y}R_x$; entonces, el elipsoide $\mathcal{E}(P, z_c)$ es asintóticamente atractivo para el sistema (9).

El siguiente teorema proporciona una manera de estimar la región de atracción del sistema (9) tomando en cuenta la saturación en la entrada de control.

Teorema 3. *Asuma que las suposiciones 1-4 se cumplen y que se aplica la ley de control (8) al sistema (9). Suponga que existe $0 < R_u = R_u^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ y $G_0 \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, tal que el siguiente conjunto de LMIs*

$$\begin{pmatrix} \Psi_3 & -R_u \tilde{B}K & R_u \tilde{B} - \bar{\delta}^{-1} \Psi_4^T & R_u F & R_u \tilde{D} \\ * & -N_2 & \bar{\delta}^{-1} \Psi_4^T & 0 & 0 \\ * & * & -2\bar{\delta}^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma_2/r^2 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma_2 Q_w \end{pmatrix} \leq 0, \quad (12a)$$

$$\Psi_2 = \tilde{A}R_u + R_u \tilde{A}^T + 2\vartheta IR_u + R_u \tilde{B}K + K^T \tilde{B}^T R_u,$$

$$\Psi_3 = \Psi_2 + 3\gamma_2(P - R_u), \quad \Psi_4 = K - G_0,$$

$$\begin{pmatrix} N_2 - 2\bar{T} & I_{n+1} \\ I_{n+1} & \gamma_2^{-1} \bar{P}_\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} < 0, \quad (12b)$$

$$\begin{pmatrix} R_u & G_0^T \\ G_0 & u_{\max}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (12c)$$

$$R_u < P, \quad (12d)$$

es factible para $u_{\max} > 0$, $K \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, $0 < P^T = P \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ dadas, para ciertas constantes $\gamma_2, \bar{\delta} > 0$, y $0 < Q_w = Q_w^T \in \mathbb{R}^{q \times q}$ tal que $\lambda_{\max}(Q_w) = 1/\bar{w}^2$. Si K se diseña como en el Teorema 2; entonces, el elipsoide $\mathcal{E}(R_u)$ es una estimación de la región de atracción para el sistema (9).

Las pruebas del Teorema 2 y 3 están dadas en el apéndice. Es posible calcular geoméricamente el máximo elipsoide contenido en la intersección de $\mathcal{E}(R_u)$ y $\mathcal{E}(R_x)$ para obtener la región final donde no se viole ninguna de las restricciones del sistema. El siguiente teorema proporciona una manera de obtener el máximo elipsoide contenido en $\mathcal{E}(R_u) \cap \mathcal{E}(R_x)$.

Teorema 4. (Boyd and Vandenberghe, 2009). *Suponga que existe $0 < B_I = B_I^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ y un vector $d \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que*

$$\min \log(\det(B_I^{-1})),$$

$$\text{s.t.} \begin{pmatrix} -\bar{\lambda}_1 + 1 & 0 & d^T \\ 0 & \bar{\lambda}_1 & B_I \\ d & B_I & R_x^{-1} \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} -\bar{\lambda}_2 + 1 & 0 & d^T \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & B_I \\ d & B_I & R_u^{-1} \end{pmatrix} \geq 0,$$

es factible para ciertas constantes $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 > 0$, ciertas matrices $0 < R_u^T = R_u \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ y $0 < R_x^T = R_x \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ dadas, tal que $W = B_I^{-2}$ es una matriz definida positiva que parametriza al elipsoide $\mathcal{E}(W, d) := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z^T W z \leq 1\}$ centrado en $d \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Debido a que $r \neq 0$, el elipsoide $\mathcal{E}(P, z_c)$ no está centrado en el origen $z = 0$, es necesario que este se encuentre completamente contenido en $\mathcal{E}(W, d)$. Con base en el Lema 3 de Gutiérrez et al. (2020), es suficiente con verificar que se cumpla la siguiente desigualdad $z_c^T P z_c \geq \varpi$, donde $\varpi \in \mathbb{R}$ es la solución de la siguiente ecuación $[1 - (1/z_c^T W z_c)] \varpi + 2\sqrt{\varpi} + 1 = 0$.

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se considera el modelo del péndulo:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (13a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J} \sigma(u) - \left(\frac{mgl}{2J} + \delta \right) \sin(x_1) + w(t), \quad (13b)$$

$$y = x_1, \quad (13c)$$

donde x_1 es la posición angular del péndulo, x_2 es la velocidad angular, w representa perturbaciones externas,

mientras que para fines de simulación δ representa un 10% de incertidumbre paramétrica. El sistema (13) se linealiza en el punto de equilibrio inestable $(x_1, x_2) = (0, 0)$, las matrices en el sistema (1), son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{2J} & 0 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $m = 1[\text{kg}]$ es la masa del péndulo, $l = 0.707[\text{m}]$ es la longitud del péndulo, $J = 0.5[\text{kgm}^2]$ es el momento de inercia, $g = 9.815[\text{m}^2/\text{s}^2]$ es la constante de la gravedad, $\delta = 0.1734$. Se puede verificar fácilmente que el sistema cumple con las Suposiciones 1-4.

Para fines de simulación, la perturbación w se toma como $w(t) = 0.2 \sin(5t) + 0.1$, por lo tanto $\bar{w} = 0.3$, y $Q_w = 11.11$. La referencia deseada es $r = \pi/18$. Las condiciones iniciales son $x(0) = (-0.2, 0)^T$, $x_r(0) = 0$ y $\hat{x}(0) = (0, 0)^T$. Entonces, la matriz de transformación $T = I_2$. Para las desigualdades matriciales del Teorema 1, se fijan los valores $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.1$, $\tau = 0.2$, $\mu = 0.5$ y $\varphi = 0.4089$, se obtienen los siguientes resultados:

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0.4491 & -0.1031 \\ -0.1031 & 0.0332 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 5.7612 \\ 9.1324 \end{pmatrix}.$$

Para las desigualdades del Teorema 2, fijando los valores $\gamma_1 = 0.09$, $\bar{H} = \text{diag}(6.3670)$, $b_1 = (3/\pi, 0, 0)^T$, $b_2 = (0, 3/\pi, 0)^T$, $b_3 = (0, 0, 2/\pi)^T$, $b_4 = -b_1$, $b_5 = -b_2$ and $b_6 = -b_3$, se obtienen los siguientes resultados:

$$P = \begin{pmatrix} 6.8691 & 2.5476 & -2.4297 \\ 2.5476 & 4.9418 & -1.8421 \\ -2.4297 & -1.8421 & 2.7831 \end{pmatrix},$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1.9880 & 0.7285 & -0.6943 \\ 0.7285 & 1.4343 & -0.5280 \\ -0.6943 & -0.5280 & 0.8075 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -15.3751 \\ -30.6079 \\ 11.3816 \end{pmatrix}^T.$$

Los vectores b_1 y b_4 son equivalentes al máximo y al mínimo valor que puede tomar x_1 , *i.e.*, $x_1 \in (-\bar{x}_1, \bar{x}_1)$ con $\bar{x}_1 = \pi/3$. De manera similar, para el estado x_2 , los vectores b_2 y b_5 son equivalentes a $\bar{x}_2 = \pi/3$ y $-\bar{x}_2$, *i.e.*, $x_2 \in (-\bar{x}_2, \bar{x}_2)$. Para motivos de simulación, se consideran restricciones suficientemente grandes para el estado x_r , *i.e.*, $b_3 = (0, 0, 2/\pi)^T$ y $b_6 = -b_3$.

Para las desigualdades matriciales del Teorema 3, considerando $u_{\max} = 1$, se fijan los valores $\gamma_2 = 28$, $\bar{\delta} = 8$, se obtiene el siguiente resultado:

$$R_u = \begin{pmatrix} 0.1122 & -0.0154 & 0.0286 \\ -0.0154 & 0.1615 & 0.0502 \\ 0.0286 & 0.0502 & 0.1538 \end{pmatrix}.$$

Considerando la optimización convexa del Teorema 4, con $\bar{\lambda}_1 = 0.999$ y $\bar{\lambda}_2 = 0.8158$, se obtiene el siguiente resultado:

$$W = \begin{pmatrix} 1.9905 & 0.7294 & -0.6955 \\ 0.7295 & 1.4360 & -0.5289 \\ -0.6955 & -0.5289 & 0.8088 \end{pmatrix}.$$

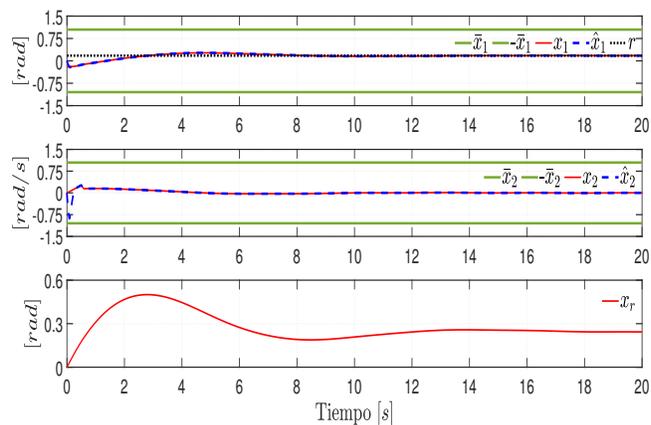


Fig. 1. Estados reales y estimados.

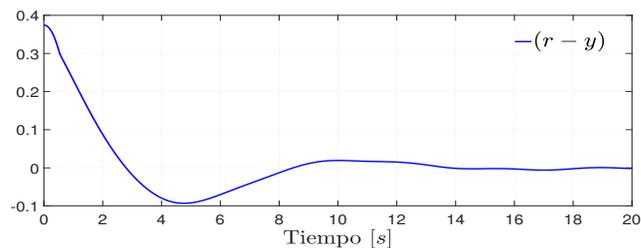


Fig. 2. Error de seguimiento.

Para garantizar que el elipsoide $\mathcal{E}(P, z_c)$ se encuentra completamente contenido en $\mathcal{E}(W)$, se puede verificar que la condición $z_c^T P z_c \geq \varpi$ se satisface con $\varpi = 0.3908$. Las simulaciones se llevaron a cabo a través de MATLAB con el método explícito de discretización de Euler y un tiempo de muestreo igual a $0.001 [\text{s}]$, las soluciones de las LMIs se obtienen mediante SDPT3.

En la Fig. 1 se muestran las trayectorias del sistema junto con sus estimados, además se observa que las restricciones en los estados no se transgreden en ningún instante de tiempo. Mientras que el estado estimado converge en tiempo finito a una región cercana al origen. En la Fig. 2 se observa que el error de seguimiento converge a una región cercana a cero. En la Fig. 3 se muestran la señal de control junto con las restricciones de saturación, se observa que la señal de control permanece apagada hasta que el error de estimación converge a una región cercana al origen, después de $t < T(e(0))$, la señal de control se activa y permanece saturada por unos instantes de tiempo. A pesar de esto, el control es capaz de cumplir con la tarea de seguimiento. Las trayectorias del sistema y los elipsoides correspondientes se presentan en la Fig. 4, donde las trayectorias comienzan en el elipsoide $\mathcal{E}(\bar{H})$, permanecen en el elipsoide $\mathcal{E}(W)$, y convergen asintóticamente al elipsoide $\mathcal{E}(P, z_c)$, donde z_c se selecciona como el valor de estado estable, *i.e.*, $z_c = [0.1772, -0.0269, 0.4970]^T$.

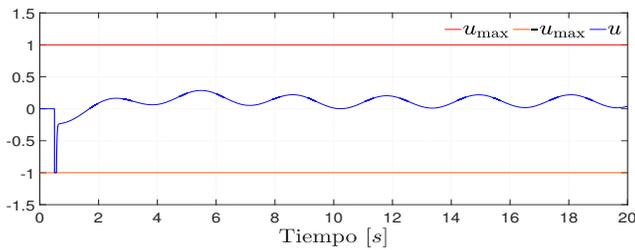


Fig. 3. Señal de Control.

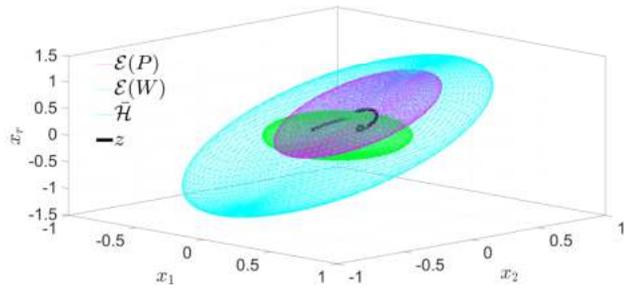


Fig. 4. Trayectorias del sistema y elipsoides.

5. CONCLUSIONES

Este artículo aborda el problema del diseño de control robusto para regular la salida de cierta clase de sistemas lineales inciertos con entradas saturadas, restricciones de estado, perturbaciones externas e información únicamente de la salida. Se caracteriza un conjunto atractivo donde no se transgrede la saturación en la entrada y las restricciones en los estados. La ley de control lineal garantiza la convergencia a un conjunto atractivo mínimo a pesar de la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. La síntesis del algoritmo se presenta en términos de LMIs proporcionando un enfoque constructivo. Algunos resultados de simulación ilustran la viabilidad del enfoque propuesto.

Como trabajo futuro se contempla la aplicación del controlador robusto propuesto a un robot omnidireccional de tres ruedas con la finalidad de probar la eficacia del algoritmo en una plataforma experimental.

APÉNDICE

Prueba del Teorema 2: Considerando el caso no saturado y siguiendo el análisis de estabilidad mostrado en Gutiérrez et al. (2020), se obtienen las LMIs (11a)-(11e).

Prueba del Teorema 3: Considerando el caso saturado y siguiendo el análisis de estabilidad mostrado en Gutiérrez et al. (2020), se obtienen las LMIs (12a)-(12d).

REFERENCIAS

Boyd, S. and Vandenberghe (2009). *Convex optimization*. Los Angeles: Cambridge University Press.
Cao, N. and Lynch, A.F. (2015). Inner-outer loop control for quadrotor uavs with input and state constraints.

IEEE Transactions on Control Systems Technology, 24(5), 1797–1804.
Edalati, L., Sedigh, A.K., Shooredeli, M.A., and Moarefianpour, A. (2018). Asymptotic tracking control of strict-feedback non-linear systems with output constraints in the presence of input saturation. *IET Control Theory & Applications*, 12(6), 778–785.
Gutiérrez, A., Ríos, H., and Mera, M. (2020). Robust output-regulation for uncertain linear systems with input saturation. *IET Control Theory & Applications*, 14(16), 2372–2384.
Huang, Y. and Jia, Y. (2019). Adaptive finite-time 6-dof tracking control for spacecraft fly around with input saturation and state constraints. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 55(6), 3259–3272.
Llorente-Vidrio, D., Mera, M., Salgado, I., and Chairez, I. (2020). Robust control for state constrained systems based on composite barrier lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(17), 7238–7254.
Mera, M., Salgado, I., and Chairez, I. (2016). Robust control for state constrained uncertain systems: Attractive ellipsoid method approach. *IFAC-PapersOnLine*, 49(18), 19–23.
Mera, M., Salgado, I., and Chairez, I. (2020). Robust observer-based controller design for state constrained uncertain systems: attractive ellipsoid method. *International Journal of Control*, 93(6), 1397–1407.
Min, H., Xu, S., and Zhang, Z. (2020). Adaptive finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems subject to full-state constraints and input saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
Polyakov, A., Efimov, D., and Perruquetti, W. (2015). Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit lyapunov function approach. *Automatica*, 51, 332–340.
Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes, J., and Queinnec, I. (2011). *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.
Tee, K.P. and Ge, S.S. (2011). Control of nonlinear systems with partial state constraints using a barrier lyapunov function. *International Journal of Control*, 84(12), 2008–2023.
Wu, Y. and Xie, X.J. (2019). Stabilisation of high-order nonlinear systems with full-state constraints and input saturation. *International Journal of Control*, 1–11.
Yu, J., Zhao, L., Yu, H., and Lin, C. (2019). Barrier lyapunov functions-based command filtered output feedback control for full-state constrained nonlinear systems. *Automatica*, 105, 71–79.
Zhang, Z., Duan, G., and Hu, Y. (2018). Robust adaptive control for a class of semi-strict feedback systems with state and input constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(9), 3189–3211.