

# Non-Homogeneous Finite-Time Controllers for Double Integrator Dynamics<sup>\*</sup>

Emmanuel Cruz-Zavala<sup>\*</sup>, Emmanuel Nuño<sup>\*</sup>,  
Jaime A. Moreno<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Departamento de Ciencias Computacionales, CUCEI, Universidad de Guadalajara. Guadalajara, Jalisco, México.*

<sup>\*\*</sup> *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad de México, México.*

**Abstract:** In this note we propose a state-feedback and an output-feedback controller for providing finite-time stability for the double integrator dynamics. Compared to other reported schemes, our proposals do not make the corresponding closed-loop systems homogeneous of negative degree. Therefore, well-known results of homogeneous dynamical systems can not be used. We circumvent this problem by proposing suitable strict Lyapunov Functions. A simulation comparison is also included to show the performance of our proposals.

*Keywords:* Finite-time Control, Lyapunov Functions, Double Integrator.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas continuos cuyo origen es estable en tiempo finito (TF) presentan interesantes características de desempeño, como robustez, tiempo de asentamiento corto y error en estado estable pequeño (Venkataraman and Gulati, 1993). Estas propiedades han motivado a muchos autores a estudiar estos sistemas para resolver problemas de control. En este contexto, el doble integrador ha sido la piedra angular de muchos problemas de control porque es el bloque de construcción principal para modelar muchos sistemas físicos Haimo (1986); Bhat and Bernstein (1997, 1998); Hong et al. (2001); Moulay and Perruquetti (2006); Bernuau et al. (2012). En particular, en (Bhat and Bernstein, 1998) se introdujeron dos familias de controladores por retroalimentación de estado (RE) que estabilizan globalmente y en FT el doble integrador

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u = \psi(x, y), \quad (1)$$

es decir, el origen del sistema de lazo cerrado es un punto de equilibrio estable en TF (ver Definición 1 en la Sección 2). La función  $\psi(x, y)$  es continua y puede estar compuesta de términos no saturados y saturados. En el primer caso, la clase de controladores continuos no saturados propuestos por (Bhat and Bernstein, 1998) se extendieron en (Cruz-Zavala et al., 2018) de la siguiente manera<sup>1</sup>

$$\psi(x, y) = -k_1 [s(x, y)]^{\frac{m_c}{r_1}} - k_2 [y]^{\frac{m_c}{r_2}}, \quad (2)$$

<sup>\*</sup> Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por CONACyT CB-282807 y por PAPIIT-UNAM IN110719.

<sup>1</sup> Para cualquier  $z \in \mathbb{R}$  y cualquier número real  $p > 0$ ,  $[z]^p \triangleq |z|^p \text{sign}(z)$ , donde  $\text{sign}(z)$  es la función de signo estándar, es una función continua, impar y estrictamente creciente.

donde  $s(x, y) \triangleq \frac{r_1}{k_2^{\frac{r_1}{r_2}}} [y]^{\frac{r_1}{r_2}} + x$  y los parámetros  $m_c$ ,  $r_1$  y  $r_2$  satisfacen  $m_c \triangleq 2r_2 - r_1$  y  $2r_2 > r_1 > r_2 > 0$ . Esto asegura que los exponentes de (2) están en el intervalo  $(0, 1)$ . Las constantes  $k_1, k_2, \bar{k}_2$  son las ganancias de control. El controlador propuesto en (Bhat and Bernstein, 1998) se obtiene fijando  $k_1 = k_2 = r_2 = 1, \bar{k}_2^{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{1}{2-\alpha}$  y  $r_1 = 2 - \alpha$ . En el caso cuando  $\bar{k}_2 = 0$ , (2) se reduce al controlador

$$\psi(x, y) = -k_1 [x]^{\frac{m_c}{r_1}} - k_2 [y]^{\frac{m_c}{r_2}} \quad (3)$$

que fue reportado en (Bhat and Bernstein, 1997).

El sistema (1), con el controlador (2), es homogéneo de grado  $l \triangleq r_2 - r_1 < 0$ . Los resultados para los sistemas homogéneos aseguran la estabilidad en TF del equilibrio de (1) con la retroalimentación (2) siempre que el origen sea asintóticamente estable (AE) (Bhat and Bernstein, 1997). Para el lazo cerrado (1), (3), diversas funciones de Lyapunov (FL) débiles y estrictas pueden encontrarse en (Bhat and Bernstein, 1997; Hong et al., 2001; Orlov, 2009; Polyakov et al., 2015).

Este artículo estudia el caso en el que los exponentes de los términos en (2) no satisfacen criterios de homogeneidad. Algunos trabajos han estudiado a los sistemas estables en TF no homogéneos. Por ejemplo, (Moreno, 2014) propuso algoritmos super-twisting no homogéneos, aquí el marco de Lyapunov es útil para establecer las propiedades de convergencia en TF. El trabajo (Haimo, 1986) presenta el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -[x]^a - [y]^b. \quad (4)$$

Haimo establece que (4) es estable en TF si  $1 > b > 0$  y  $a > b/(2-b)$ , véase también la pág. 191 en (Bacciotti and Rosier, 2005). En general, este sistema no es homogéneo.

En muchos casos, los sensores de velocidad no están disponibles y es preferible evitar la medición de  $y$ . Existen dos soluciones para este problema, implementando un observador o usando un filtro de velocidad. En las obras (Hong et al., 2001; Bernuau et al., 2012; Polyakov et al., 2015) se propusieron controladores por retroalimentación de salida (RS) usando observadores. Sin embargo, el uso de filtros se ha investigado en (Su and Zheng, 2015), donde se propone el siguiente esquema por RS basado en filtros

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= -k_1[x]^a - k_2[z]^a, \quad a \in (0, 1), \\ z &= q_c + k_4x, \quad \dot{q}_c = -k_3[q_c + k_4x]^{\frac{a+1}{2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

con ganancias  $k_i > 0$ . Este controlador hace que el sistema de lazo cerrado (1) sea homogéneo de grado  $(a-1)/2$ .

El objetivo de este artículo cubre tres puntos importantes:

**O1** Se generaliza el controlador (2) de la siguiente manera

$$\psi(x, y) = -k_1[\bar{s}(x, y)]^a - k_2[y]^b \quad (6)$$

con  $\bar{s}(x, y) \triangleq \bar{k}_2^{b/a}[y]^{b/a} + x$ . Los exponentes  $a$  y  $b$  son constantes positivas y no necesariamente hacen que el lazo cerrado sea homogéneo. Bajo ciertas condiciones en  $k_1, k_2$  y  $\bar{k}_2$ , se recupera el sistema (4).

**O2** Se generaliza el controlador (5) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= -k_1[x]^a - k_2[z]^b, \\ z &= q_c + k_4x, \quad \dot{q}_c = -k_3[q_c + k_4x]^c. \end{aligned} \quad (7)$$

Los exponentes  $a, b$  y  $c$  son constantes positivas y no necesariamente hacen que el lazo cerrado sea homogéneo. Bajo ciertas condiciones en  $a, b$  y  $c$ , se recupera el controlador (5).

**O3** En lugar de utilizar el enfoque propuesto en (Haimo, 1986), se construyen candidatas a FL débiles para demostrar estabilidad asintótica global y FL estrictas para mostrar estabilidad en TF del origen de (1) en lazo cerrado con las leyes de control propuestas (6) y (7). Sorprendentemente, se obtiene una condición diferente en los exponentes (4) para la estabilidad en TF.

## 2. PRELIMINARES

En este artículo se usa la siguiente notación:  $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ ,  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ . Para toda  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|$  es su valor absoluto. Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\|\mathbf{x}\|$  es la norma Euclídeana. Para cualquier  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $B_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$  es la bola centrada en el origen de radio  $\delta$ . Una función  $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R}_{>0} \mapsto \mathbb{R}^m$  se de clase  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , si sus derivadas  $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, \dots, \mathbf{f}^{(k)}$  existen y son continuas. Para un función diferenciable  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nabla V(\mathbf{x}) \triangleq [\partial_{x_1} V(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} V(\mathbf{x})]^\top$  siendo  $\partial_{x_i} V(\mathbf{x}) \triangleq \partial V(\mathbf{x})/\partial x_i$ .

### 2.1 Propiedades de algunas funciones

La función  $[x]^p$  tiene las siguientes propiedades:

**P1:** Para cada  $p \in [0, 1)$ ,  $[x]^p$  es diferenciable para toda  $x \neq 0$ ,  $[x]^p \in \mathcal{C}^1$  si  $p \in [1, 2]$  y  $[x]^p \in \mathcal{C}^2$  si  $p \in (2, \infty)$ .  $\triangleleft$

**P2:**  $\partial_x [x]^p = p|x|^{p-1}$  y  $\partial_x |x|^p = p[x]^{p-1}$ ,  $\forall x \neq 0$ .  $\int_0^x |z|^p dz = \frac{1}{p+1}[x]^{p+1}$  y  $\int_0^x [z]^p dz = \frac{1}{p+1}|x|^{p+1}$ .  $\triangleleft$

*Lema 1.* (Cruz-Zavala et al. (2018)). Para toda  $x, y \in \mathbb{R}$ , y cualquier  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , si  $a \leq b$ , entonces  $|[y]^a + [x]^a|^{1/a} \leq 2^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}|[y]^b + [x]^b|^{1/b}$ . Además, la igualdad se cumple si y sólo si  $a = b$  ó  $x = y$ .  $\triangleleft$

*Lema 2.* (Mercado-Uribe and Moreno (2017)). Para toda  $x, y \in \mathbb{R}$ , y cualquier  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\text{sign}([x+y]^\mu - [x]^\mu) = \text{sign}(y)$ .  $\triangleleft$

### 2.2 Estabilidad en tiempo finito

Considere un sistema dinámico descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de estados,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  es el campo vectorial continuo asociado. Suponga que el origen es un punto de equilibrio, es decir,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

*Definición 1.* (Bhat and Bernstein, 1998). El origen de (8) es estable en tiempo finito (ETF) si es estable en el sentido de Lyapunov y existe una función acotada localmente  $T : B_\delta \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$  (llamada la función de tiempo de asentamiento) de modo que para cada  $\mathbf{x}_0 \in B_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ , cualquier solución  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  de (8) está definida en  $t \in [0, T(\mathbf{x}_0))$  y  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  para toda  $t \geq T(\mathbf{x}_0)$ . Si  $B_\delta = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es globalmente ETF (GETF).  $\triangleleft$

La estabilidad en TF se puede determinar con nociones de homogeneidad. La relación entre estabilidad y aproximaciones homogéneas se establece en (Orlov, 2009; Bacciotti and Rosier, 2005; Andrieu et al., 2008; Zavala-Rio and Fantoni, 2014). En este contexto, si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es AE y (8) admite una aproximación homogéneas con punto de equilibrio AE tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  es homogénea de grado negativo, entonces el origen es GETF. Sin embargo, cuando no existe tal aproximación, este resultado no es útil y el análisis de estabilidad en TF es muy desafiante. Los métodos de Lyapunov parecen ser la única forma de hacer frente a este problema como muestra el siguiente resultado.

*Lema 3.* (Bhat and Bernstein, 1998). Suponga que existe una función  $\mathcal{C}^1$  definida positiva  $V : B_\delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  y números reales  $\alpha > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , tal que  $\dot{V} + \alpha V^p \leq 0$  en  $B_\delta$ , donde  $\dot{V} = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Entonces, el origen de (8) es un equilibrio estable en tiempo finito. Además, si  $T$  es el tiempo de asentamiento, entonces  $T \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} V(\mathbf{x})^{1-p}$  para toda  $\mathbf{x} \in B_\delta$ .  $\diamond$

Una observación clave es que cuando el punto de equilibrio es globalmente AE y ETF, en realidad es GETF.

## 3. RESULTADOS PRINCIPALES

### 3.1 Controlador por RE no homogéneo

Primero se estudia el sistema de lazo cerrado (1) y (3) descrito por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k_1[\bar{s}(x, y)]^a - k_2[y]^b \quad (9)$$

con  $\bar{s}(x, y) \triangleq \bar{k}_2^{b/a}[y]^{b/a} + x$ . Los exponentes  $a$  y  $b$  son constantes positivas. Dado que, en general, los valores de  $a$  y  $b$  no hacen homogéneo al sistema de lazo cerrado, los resultados de homogeneidad clásica no son útiles para determinar la ETF. Para superar este problema, se proponen las candidatas  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  siendo

$$V = \frac{1}{2}|y|^2 + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a}, \quad k_1 > 0, \quad (10)$$

$$\mathcal{V} = (\gamma_2 + 1)V^p + d_1xy, \quad \gamma_2 > 0, \quad (11)$$

donde  $p$  un exponente a determinar así como la constante  $d_1$ . Acorde con **P2**,  $V \in \mathcal{C}^1$  para cualquier  $a > 0$  y  $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^1$  para  $p \geq 1$  y  $a > 0$ . La derivada de  $V$  en la dirección de (9) satisface (se ha usado Lema 2 with  $z = \frac{r_1}{r_2}[y]$ )

$$\dot{V} = -k_2|y|^{1+b} - k_1|y||\chi(x, y)|, \quad (12)$$

donde  $\chi(x, y) = [\bar{s}(x, y)]^a - [x]^a$  y  $\dot{V} \leq 0$  para toda  $x, y \in \mathbb{R}$ . Además, (12) sólo se desvanece en  $y = 0$ . El hecho (12) junto con el principio de invariancia de Krasovskii-LaSalle conduce a concluir la estabilidad asintótica en  $x = y = 0$ , véase el Teorema 7.2.1 en (Michel et al., 2008). Además,  $V$  es radialmente no acotada, entonces el origen es globalmente AE. El sistema (9) no es homogéneo y, en general, no admite una aproximación homogénea de grado negativo. Por lo tanto, se analiza la estabilidad en TF usando Lema 3 y la función  $\mathcal{V}$ .

Defina el vector  $\mathbf{x} = [x, y]^T$ . El análisis se centra en la bola  $\mathbf{x} \in B_1$ , que implica  $|x| < 1$  y  $|y| < 1$ . La función  $V$  es definida positiva y (11) es definida positiva en  $B_1$  si  $V^p + d_1xy \geq 0$ . Esto pasa cuando

$$V^p - d_1|x||y| \geq 0 \iff V \geq (d_1|x||y|)^{\frac{1}{p}}. \quad (13)$$

De la desigualdad de Young,  $(|x||y|)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2p}c_1^{2p}|y|^2 + \frac{2p-1}{2p}c_1^{-\frac{2p}{2p-1}}|x|^{\frac{2}{2p-1}}$ . Además,  $|x|^{\frac{2}{2p-1}} = |x|^{\frac{2}{2p-1}-(1+a)}|x|^{1+a}$  y  $\frac{2}{2p-1} - (1+a) \geq 0$  cuando

$$\frac{3+a}{2(1+a)} \geq p. \quad (14)$$

Con lo anterior,  $|x|^{\frac{2}{2p-1}} \leq |x|^{1+a}$ , para toda  $\mathbf{x} \in B_1$ . Usando esta cota, la desigualdad (13) se cumple si

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{d_1^{\frac{1}{p}}}{p} c_1^{2p} \right) |y|^2 + \left( \frac{k_1}{1+a} - \frac{(2p-1)d_1^{\frac{1}{p}}}{2p} c_1^{-\frac{2p}{2p-1}} \right) |x|^{1+a} \geq 0.$$

Lo anterior es cierto si  $1 \geq \frac{d_1^{\frac{1}{p}}}{p} c_1^{2p}$  y  $\frac{k_1}{1+a} \geq \frac{(2p-1)d_1^{\frac{1}{p}}}{2p} c_1^{-\frac{2p}{2p-1}}$ . Resolviendo estas desigualdades para  $c_1$ , (13) se cumple, y  $\mathcal{V}$  es definida positiva en  $\mathbf{x} \in B_1$ , cuando los valores de  $d_1$  satisfacen

$$0 < d_1^2 \leq \left( \frac{2k_1}{(2p-1)(1+a)} \right)^{2p-1} p^{2p}. \quad (15)$$

De (12) se obtiene  $pV^{p-1}\dot{V} \leq -pV^{p-1}(k_2|y|^{1+b} + k_1|y||\chi(\cdot)|) \leq -A|y|^{2p+b-1} - C|\varphi(\cdot)|$ , con  $\varphi(\cdot) = |y|^{2p-1}|\chi(\cdot)|$  y siendo las constantes

$$A = p(1/2)^{p-1}k_2, \quad C = p(1/2)^{p-1}k_1. \quad (16)$$

Por lo tanto, la derivada en el tiempo de  $\mathcal{V}$  produce

$$\frac{\dot{\mathcal{V}}}{1+\gamma_2} = pV^{p-1}\dot{V} + \gamma \frac{d}{dt}(xy), \quad \gamma = \frac{1}{1+\gamma_2}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(xy) &= y^2 + x(-[k_1\bar{s}(x, y)]^a - k_2[y]^b) \\ &= y^2 - k_1x[x]^a - k_1x\chi(\mathbf{x}) - k_2x[y]^b. \end{aligned}$$

En esta última ecuación se ha sumado y restado el término  $k_1x[x]^a$ .

Del Lema 1, se tiene que  $|\chi(\mathbf{x})| \leq 2^{1-a}\bar{k}_2^b|y|^b, \forall a \leq 1$ . Con la cual,  $|\chi(\mathbf{x})| = |\chi(\mathbf{x})|^{\frac{2p-1}{2p-1+b}}|\chi(\mathbf{x})|^{\frac{b}{2p-1+b}} = (|\chi(\mathbf{x})|^{\frac{2p-1}{b}}|\chi(\mathbf{x})|^{\frac{b}{2p-1+b}})^{\frac{2p-1}{2p-1+b}} \leq \varpi\varphi^{\frac{b}{2p-1+b}}(\mathbf{x})$ , con  $\varpi = (2^{1-a}\bar{k}_2^b)^{\frac{2p-1}{b}}$ . Además, se cumple  $|y|^2 = |y|^{2-2p-b+1} \cdot |y|^{2p+b-1} \leq |y|^{2p+b-1}$  cuando  $\frac{3-b}{2} \geq p$  y  $\frac{3-b}{2} > 1 \iff 1 > b$ . Teniendo en cuenta las cotas anteriores se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{V}}}{1+\gamma_2} &\leq -(A - \gamma d_1)|y|^{2p+b-1} - \gamma d_1 k_1 |x|^{1+a} - C\varphi(\mathbf{x}) \\ &\quad + \gamma d_1 k_2 |x||y|^b + \gamma d_1 k_1 \varpi |x|\varphi^{\frac{b}{2p-1+b}}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (18)$$

Usando la desigualdad de Young, se obtiene que

$$\begin{aligned} |x||y|^b &\leq \frac{(2p-1)c_2^{\frac{2p+b-1}{2p-1}}}{2p+b-1}|x|^{\frac{2p+b-1}{2p-1}} + \frac{bc_2^{-\frac{2p+b-1}{b}}}{2p+b-1}|y|^{2p+b-1} \\ |x|\varphi^{\frac{b}{2p-1+b}}(\mathbf{x}) &\leq \frac{(2p-1)c_3^{\frac{2p+b-1}{2p-1}}}{2p+b-1}|x|^{\frac{2p+b-1}{2p-1}} + \frac{bc_3^{-\frac{2p+b-1}{b}}}{2p+b-1}|\varphi(\mathbf{x})|. \end{aligned}$$

Para cualquier  $\mathbf{x} \in B_1$ , el término  $|x|^{\frac{2p+b-1}{2p-1}} = |x|^{1+\frac{b}{2p-1}-a+a} = |x|^{\frac{b}{2p-1}-a}|x|^{1+a} \leq |x|^{1+a}$  cuando  $\frac{b}{2p-1} \geq a$  ó equivalentemente, si  $\frac{b+a}{2a} \geq p$ , y  $\frac{b+a}{2a} > 1 \iff b > a$ .

Por lo tanto, se puede acotar (18) como

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{V}}}{1+\gamma_2} &\leq -\frac{A}{2}|y|^{2p+b-1} - \frac{1}{2}\gamma d_1 k_1 |x|^{1+a} - \frac{C}{2}\varphi(\mathbf{x}) \\ &\quad - v_1(\mathbf{x}) - v_2(\mathbf{x}) - v_3(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $v_1(\mathbf{x}) = (A/4 - \gamma d_1)|y|^{2p+b-1}$ ,

$$\begin{aligned} v_2(\mathbf{x}) &= \left( \frac{1}{4}A - \frac{b}{2p+b-1}c_2^{-\frac{2p+b-1}{b}}\gamma d_1 k_2 \right) |y|^{2p+b-1} + \\ &\quad + \gamma d_1 \left( \frac{1}{4}k_1 - \frac{2p-1}{2p+b-1}c_2^{\frac{2p+b-1}{2p-1}}k_2 \right) |x|^{1+a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3(\mathbf{x}) &= \left( \frac{1}{2}C - \frac{b}{2p+b-1}c_3^{-\frac{2p+b-1}{b}}\gamma\varpi d_1 k_1 \right) |\varphi(\mathbf{x})| + \\ &\quad + \gamma d_1 k_1 \left( \frac{1}{4} - \frac{2p-1}{2p+b-1}c_3^{\frac{2p+b-1}{2p-1}}\varpi \right) |x|^{1+a}. \end{aligned}$$

De hecho, si  $v_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, 2, 3$ , se cumplen,  $\dot{\mathcal{V}}$  será definida negativa. Y esto es cierto cuando  $\frac{1}{4}A \geq \gamma d_1$ ,

$$\frac{1}{4}A \geq \frac{b\gamma d_1 k_2}{2p+b-1}c_2^{-\frac{2p+b-1}{b}}, \quad \frac{1}{4}k_1 \geq \frac{(2p-1)k_2}{2p+b-1}c_2^{\frac{2p+b-1}{2p-1}}, \quad (20a)$$

$$\frac{1}{2}C \geq \frac{b\gamma\varpi d_1 k_1}{2p+b-1}c_3^{-\frac{2p+b-1}{b}}, \quad \frac{1}{4}k_1 \geq \frac{(2p-1)\varpi}{2p+b-1}c_3^{\frac{2p+b-1}{2p-1}}. \quad (20b)$$

Las desigualdades en (20a) implican que

$$\Gamma_1 := \left( \frac{(2p+b-1)k_1}{4(2p-1)k_2} \right)^{\frac{2p-1}{b}} \left( \frac{4bd_1k_2}{A(2p+b-1)} \right)^{-1} \geq \gamma$$

mientras que las desigualdades en (20b) implican que

$$\Gamma_2 := \left( \frac{(2p+b-1)}{4(2p-1)\varpi} \right)^{\frac{2p-1}{b}} \left( \frac{2bd_1k_1\varpi}{C(2p+b-1)} \right)^{-1} \geq \gamma$$

y para toda  $\mathbf{x} \in B_1$ , se tiene que

$$\frac{1}{1+\gamma_2}\dot{V} \leq -\frac{1}{2}A|y|^{2p+b-1} - \frac{1}{2}\gamma d_1k_1|x|^{1+a}, \quad (21)$$

cuando  $\gamma$  se elige tal que  $\min \left\{ \frac{A}{4d_1}, \Gamma_1, \Gamma_2 \right\} \geq \gamma$ .

Cuando se cumple la condición anterior para  $\gamma$ ,  $v_i(\mathbf{x}) \geq 0$  y  $\dot{V}$  resulta ser definida negativa. Ahora, se muestra la estabilidad en TF en el equilibrio de (6). Primero, tenga en cuenta que  $d_1xy \leq V^p$ . Entonces,  $\mathcal{V} \leq (\gamma_2 + 2)V^p \leq (\gamma_2 + 2) \left( \frac{1}{2}|y|^{2p+b-1} + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a} \right)^p$ , para toda  $\mathbf{x} \in B_1$ .

Ahora se acota (21) en términos de  $\mathcal{V}$ . Dado que, la desigualdad  $\min \left\{ A, \frac{1}{2}\gamma d_1(1+a) \right\} \left( \frac{1}{2}|y|^{2p+b-1} + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a} \right) \leq \frac{1}{2}A|y|^{2p+b-1} + \frac{1}{2}\gamma d_1k_1|x|^{1+a}$  se cumple, se llega a que

$$\dot{V} \leq -\alpha\mathcal{V}^{\frac{1}{p}}, \quad \alpha = \frac{(1+\gamma_2)}{(2+\gamma_2)^{\frac{1}{p}}} \min \left\{ A, \frac{1}{2}\gamma d_1(1+a) \right\} \quad (22)$$

para toda  $\mathbf{x} \in B_1$ . Finalmente, elija  $p$  tal que

$$\min \left\{ \frac{3+a}{2(1+a)}, \frac{3-b}{2}, \frac{b+a}{2a} \right\} \geq p > 1.$$

De acuerdo con el Lema 3, la condición  $1/p < 1$  implica estabilidad en TF. Recuerde que: (a)  $\frac{3+a}{2(1+a)} \geq p > 1$  cuando  $1 > a$ ; (b)  $\frac{3-b}{2} \geq p > 1$  cuando  $1 > b$ ; y (c)  $\frac{b+a}{2a} \geq p > 1$  cuando  $b > a$ . El análisis anterior arroja el siguiente resultado.

*Proposición 1.* Para toda  $k_1, k_2, \bar{k}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  y bajo la condición de exponentes  $1 > b > a > 0$ , el origen de (1) en lazo cerrado con (6) es globalmente ETF.  $\triangleleft$

Las condiciones de Haimo se reducen a  $1 > b > a > b/(2-b)$ , (Bacciotti and Rosier, 2005). La Proposición muestra que el exponente  $a$  puede tomar valores menores que  $b/(2-b)$ .

*Comentario 1.* El conjunto  $\mathcal{S} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : s(\mathbf{x}) = 0\}$  no es invariante positivo para (9). Esto se debe al hecho de que a lo largo de las soluciones de (9),  $\dot{s}(\mathbf{x}) = \frac{b}{a}\bar{k}_2^{\frac{b}{a}}|y|^{\frac{b-a}{a}}\dot{y} + y = -\frac{b}{a}\bar{k}_2^{\frac{b}{a}}k_1|y|^{\frac{b-a}{a}}[s(\mathbf{x})]^a - \frac{b}{a}\bar{k}_2^{\frac{b}{a}}k_2|y|^{\frac{b-a}{a}}[y]^b + y$ , y los últimos términos no se cancelan para todos los valores de  $a$  y  $b$ . Esto solo sucede si  $\bar{k}_2 = [a/(bk_2)]^{a/b}$  y  $a = b/(2-b)$ . Estas condiciones dan como resultado los controladores homogéneos reportados en (Cruz-Zavala et al., 2018). Así, toda solución  $\mathbf{x}(t)$  de (9), en general, no puede permanecer en  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}, \forall t \geq t_1$  si para algún  $t_1, \mathbf{x}(t_1) \in \mathcal{S}$ , ya que  $s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) \leq 0$  no se cumple, y  $\mathcal{S}$  no es un modo deslizante terminal (Venkataraman and Gulati, 1993).

*Proposición 2.* Para toda  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}, \bar{k}_2 = 0$  y bajo la condición de exponentes  $1 > b > a > 0$ , el origen de (1) en lazo cerrado con (6) es globalmente ETF.  $\triangleleft$

*Prueba 1.* Tome las FL (10) y (11). En este caso  $\chi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = 0$ , y las derivadas con respecto al tiempo satisfacen  $\dot{V} = -k_2|y|^{1+b}$  y  $\frac{\dot{V}}{\gamma_2+1} \leq -(A - \gamma d_1)|y|^{2p+b-1} - \gamma d_1k_1|x|^{1+a} + \gamma d_1k_2|x||y|^b$ . Siguiendo el mismo procedimiento anterior se llega al resultado.

### 3.2 Controladores por RS no homogéneos

El sistema de lazo cerrado (1) y (7) se describe mediante

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k_1[x]^a - k_2[z]^b, \quad \dot{z} = -k_3[z]^c + k_4y. \quad (23)$$

Se proponen las candidatas  $V_d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathcal{V}_d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$V_d = \frac{1}{2}|y|^2 + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a} + \frac{k_4^{-1}k_2}{1+b}|z|^{1+b}, \quad (24)$$

$$\mathcal{V}_d = (\gamma_1 + \gamma_3 + 1)V_d^p + \gamma_1 d_1xy - d_2yz, \quad (25)$$

donde  $\gamma_1, \gamma_3 \in \mathbb{R}_{>0}$  y se determinarán los valores de las constantes  $p > 1, d_1 > 0$  y  $d_2 > 0$ . La función  $V_d$  es definida positiva y su derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{V}_d &= y(-k_1[x]^a - k_2[z]^b) + k_1[x]^a y \\ &\quad + k_4^{-1}k_2[z]^b(-k_3[z]^c + k_4y) = -k_4^{-1}k_2k_3|z|^{b+c}. \end{aligned} \quad (26)$$

Este hecho, junto con el principio de invariancia de Krasovskii-LaSalle y el no acotamiento radial de  $V_d$  llevan a concluir que  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  es globalmente AE, donde el vector  $\mathbf{z} = [x, y, z]^T$ , (Michel et al., 2008). Para analizar la estabilidad en TF se usa la función  $\mathcal{V}_d$  y el Lema 3.

Ahora restringimos el análisis a la bola  $\mathbf{z} \in B_1$ , lo que implica que  $|x| < 1, |y| < 1$  y  $z < 1$ . La función (25) es definida positiva si  $V_d^p + d_1xy \geq 0$  y  $V_d^p - d_2yz \geq 0$ . Como  $V_d(\mathbf{z}) \geq V(\mathbf{x})$ , la primera desigualdad se reduce a (13). En consecuencia,  $d_1$  y  $p$  deben satisfacer (15) y (14), respectivamente. Por otro lado,  $V_d^p - d_2yz \geq 0 \implies \left( \frac{1}{2}|y|^2 + \frac{k_4^{-1}k_2}{1+b}|z|^{1+b} \right)^p - d_2|y||z| \geq 0$ . Siguiendo el mismo procedimiento para obtener (15), se llega a que  $d_2$  cumple

$$0 < d_2^2 \leq \left( \frac{2k_2k_4^{-1}}{(2p-1)(1+b)} \right)^{2p-1} p^{2p} \quad (27)$$

y  $p$  debe cumplir  $\frac{3+b}{2(1+b)} \geq p$ . Las condiciones en  $d_1$  y  $d_2$  aseguran que  $V_d$  es definida positiva. Además,  $pV^{p-1}\dot{V} \leq -A|z|^{(1+b)(p-1)+b+c}$ , donde  $A = p \left( \frac{1}{1+b}k_4^{-1}k_2 \right)^{p-1}k_4^{-1}k_2k_3$ , y  $(1+b)(p-1)+b+c = (1+b)p+c-1$ .

La derivada con respecto al tiempo de  $\mathcal{V}_d$  es

$$\frac{\dot{\mathcal{V}}_d}{1+\gamma_1+\gamma_3} = pV_d^{p-1}\dot{V}_d + \gamma_4 d_1 \frac{d}{dt}(xy) - \gamma_5 d_2 \frac{d}{dt}(yz) \quad (28)$$

donde  $\gamma_4 = \gamma_1/(1+\gamma_1+\gamma_3)$  y  $\gamma_5 = 1/(1+\gamma_1+\gamma_3)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}xy &= y^2 + x(-k_1[x]^a - k_2[z]^b) \\ \frac{d}{dt}yz &= y(-k_3[z]^c + k_4y) + z(-k_1[x]^a - k_2[z]^b). \end{aligned}$$

Observe que  $|z|^{1+b} = |z|^{1+b-[(1+b)p+c-1]}|z|^{(1+b)p+c-1} \leq |z|^{(1+b)p+c-1}$  cuando  $1+b \geq (1+b)p+c-1 \iff 1+$

$\frac{1-c}{1+b} \geq p$ , y  $1 + \frac{1-c}{1+b} > 1$  para  $1 > c$ . Además,  $V^p \leq \left(\frac{1}{2}|y|^2 + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a} + \frac{k_4^{-1}k_2}{1+b}|z|^{(1+b)p+c-1}\right)^p$ ,  $\forall \mathbf{x} \in B_1$ .

Teniendo en cuenta las cotas anteriores se tiene que

$$\frac{\dot{V}}{1 + \gamma_1 + \gamma_3} \leq -(A - \gamma_5 \varpi_1)|z|^{(1+b)p+c-1} - \gamma_4 C|x|^{1+a} - (\gamma_5 B - \gamma_4 \varpi_2)|y|^2 + \gamma_4 \varpi_3|x||z|^b + \gamma_5 \varpi_4|y||z|^c + \gamma_5 \varpi_5|z||x|^a \quad (29)$$

donde  $B = d_2 k_4$ ,  $C = d_1 k_1$ ,  $\varpi_1 = d_2 k_2$ ,  $\varpi_2 = d_1$ ,  $\varpi_3 = d_1 k_2$ ,  $\varpi_4 = d_2 k_3$  and  $\varpi_5 = d_2 k_1$ .

Usando la desigualdad de Young, se acotan los términos cruzados de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x|z|^b &\leq \frac{(1+b)(p-1)+c}{(1+b)p+c-1} c_1^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)(p-1)+c}} |x|^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)(p-1)+c}} \\ &\quad + \frac{b}{(1+b)p+c-1} c_1^{-\frac{(1+b)p+c-1}{b}} |z|^{(1+b)p+c-1}, \\ y|z|^c &\leq \frac{(1+b)p-1}{(1+b)p+c-1} c_2^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)p-1}} |y|^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)p-1}} \\ &\quad + \frac{c}{(1+b)p+c-1} c_2^{\frac{(1+b)p+c-1}{c}} |z|^{(1+b)p+c-1}, \\ z|x|^a &\leq \frac{a}{1+a} c_3^{\frac{1+a}{a}} |x|^{1+a} + \frac{1}{1+a} c_3^{-1+a} |z|^{1+a} \\ &\leq \frac{a}{1+a} c_3^{\frac{1+a}{a}} |x|^{1+a} + \frac{1}{1+a} c_3^{-(1+a)} |z|^{(1+b)p+c-1}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usa el hecho de que  $|z|^{1+a} = |z|^{1+a-[(1+b)p+c-1]} |z|^{(1+b)p+c-1} \leq |z|^{(1+b)p+c-1}$ , para toda  $\frac{2+a-c}{1+b} \geq p$  y  $\frac{2+a-c}{1+b} > 1 \iff 1+a > b+c$ . Además para toda  $\mathbf{z} \in B_1$ ,

$$\begin{aligned} |y|^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)p-1}} &= |y|^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)p-1}-2} |y|^2 \leq |y|^2, \quad \forall c > b \\ |x|^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)(p-1)+c}} &= |x|^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)(p-1)+c}-1-a} |x|^{1+a} \leq |x|^{1+a}, \end{aligned}$$

$\forall b > ac$ , donde se utilizan los siguientes hechos: (i)  $\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)(p-1)+c} \geq 1+a \iff (1+b)p+c-1 \geq (1+a)[(1+b)p-1-b+c] \iff 1 + \frac{1}{1+b} \left(\frac{b}{a} - c\right) \geq p$  y  $1 + \frac{1}{1+b} \left(\frac{b}{a} - c\right) > 1$  si  $\frac{b}{a} > c$ ; y (ii)  $\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)p-1} \geq 2 \iff (1+b)p+c-1 \geq 2[(1+b)p-1] \iff \frac{c+1}{1+b} \geq p$  y  $\frac{c+1}{1+b} > 1$  si  $c > b$ .

Por lo tanto, se puede acotar (29) como

$$\frac{\dot{V}_d}{1 + \gamma_1 + \gamma_3} \leq -\frac{A}{2}|z|^{(1+b)p+c-1} - \frac{\gamma_5 B}{2}|y|^2 - \frac{\gamma_4 C}{2}|x|^{1+a} - v_1(z) - v_2(y) - v_3(\mathbf{z}) - v_4(\mathbf{z}) - v_5(\mathbf{z}) \quad (30)$$

donde  $v_1 = (A/8 - \gamma_5 \varpi_1)|z|^{(1+b)p+c-1}$ ,  $v_2 = (B\gamma_5/4 - \gamma_4 \varpi_2)|y|^2$ ,

$$\begin{aligned} v_3(\mathbf{z}) &= \left(\frac{A}{8} - \frac{\gamma_4 b \varpi_3}{(1+b)p+c-1} c_1^{-\frac{(1+b)p+c-1}{b}}\right) |z|^{(1+b)p+c-1} \\ &\quad + \gamma_4 \left(\frac{C}{4} - \frac{\varpi_3[(1+b)(p-1)+c]}{(1+b)p+c-1} c_1^{\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)(p-1)+c}}\right) |x|^{1+a}, \\ v_4(\mathbf{z}) &= \gamma_5 \left(\frac{B}{4} - \frac{\varpi_4[(1+b)p-1]}{(1+b)p+c-1} c_2^{-\frac{(1+b)p+c-1}{(1+b)p-1}}\right) |y|^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\frac{A}{8} - \frac{\gamma_5 c \varpi_4}{(1+b)p+c-1} c_2^{\frac{(1+b)p+c-1}{c}}\right) |z|^{(1+b)p+c-1}, \\ v_5(\mathbf{z}) &= \left(\frac{A}{8} - \frac{\gamma_5 \varpi_5}{1+a} c_3^{-(1+a)}\right) |z|^{(1+b)p+c-1} + \\ &+ \left(\gamma_4 \frac{C}{4} - \gamma_5 \frac{a \varpi_5}{1+a} c_3^{\frac{1+a}{a}}\right) |x|^{1+a}. \end{aligned}$$

De hecho, si  $v_i(\mathbf{z}) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , se satisfacen, entonces  $\dot{V}$  será definida negativa y esto se cumple cuando los coeficientes de  $v_i(\mathbf{z})$  no son negativos, lo cual implica <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{A}{8\varpi_1} &\geq \gamma_5, \quad \frac{B}{4\varpi_2} \geq \frac{\gamma_4}{\gamma_5} = \gamma_1 \\ \left(\frac{C[(1+b)p+c-1]}{4\varpi_3[(1+b)(p-1)+c]}\right)^{\frac{(1+b)(p-1)+c}{b}} &\frac{A[(1+b)p+c-1]}{8b\varpi_3} \geq \gamma_4 \\ \frac{A[(1+b)p+c-1]}{8\varpi_4 c} \left(\frac{4\varpi_4[(1+b)p-1]}{B[(1+b)p+c-1]}\right)^{-\frac{(1+b)p-1}{c}} &\geq \gamma_5 \\ \frac{C(1+a)}{4\varpi_5 a} \left(\frac{8\varpi_5}{A(1+a)}\right)^{-\frac{1}{a}} &\geq \frac{\gamma_5^{\frac{1}{a}}}{\gamma_1}. \end{aligned}$$

Una vez se elige  $\gamma_1$  para satisfacer la segunda desigualdad de arriba, las otras desigualdades se cumplen para valores grandes de  $\gamma_3$ . Por lo tanto, se llega a

$$\frac{\dot{V}_d}{1 + \gamma_1 + \gamma_3} \leq -\frac{A}{2}|z|^{(1+b)p+c-1} - \frac{\gamma_5 B}{2}|y|^2 - \frac{\gamma_4 C}{2}|x|^{1+a}.$$

Ya que  $d_1 xy \leq V_d^p$  y  $d_2 yz \leq V_d^p$ , se obtiene que  $\mathcal{V}_d^p \leq (2 + 2\gamma_1 + \gamma_3) \left(\frac{1}{2}|y|^2 + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a} + \frac{k_4^{-1}k_2}{1+b}|z|^{(1+b)p+c-1}\right)^p$ , para toda  $\mathbf{x} \in B_1$ . Por lo tanto, la desigualdad diferencial anterior puede acotarse como

$$\dot{V}_d \leq -\alpha \mathcal{V}_d^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \mathbf{x} \in B_1 \quad (31)$$

donde la constante  $\alpha$  se define como

$$\alpha = \frac{\min \left\{ \frac{A(1+b)(1+\gamma_1+\gamma_3)}{2k_4^{-1}k_2}, B, \gamma_1 \frac{C(1+a)}{2k_1} \right\}}{(2 + 2\gamma_1 + \gamma_3)^{\frac{1}{p}}}.$$

Eligiendo  $p$  tal que

$$\min \left\{ \frac{3+a}{2(1+a)}, \frac{3+b}{2(1+b)}, 1 + \frac{1-c}{1+b}, \frac{2+a-c}{1+b}, 1 + \frac{1}{1+b} \left(\frac{b}{a} - c\right), \frac{c+1}{1+b} \right\} \geq p > 1,$$

se tiene  $1/p < 1$  y debido al Lema 3, (31) implica estabilidad en TF. El análisis anterior da el siguiente resultado.

*Proposición 3.* Para toda  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}_{>0}$  y bajo las condiciones en los exponentes  $1 > c > b$ ,  $b > ac$ , y  $1+a > b+c$ , el origen de (1) en lazo cerrado con (7) es globalmente ETF.  $\square$

#### 4. EJEMPLOS DE SIMULACIÓN

A continuación se muestra el comportamiento de los controladores no homogéneos mediante una simulación numérica. Se usa el método de integración de Euler con tiempo de muestreo  $t_s = 0.005$  [s]. Para los controladores por RE se emplearon  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  y los exponentes

<sup>2</sup> Las últimas tres desigualdades se obtienen eliminando las constantes auxiliares  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**hc1:**  $b = 1/2$  y  $a = 1/3$ . Este controlador es homogéneo.

**nc1:**  $b = 1/2$  y  $a = 1/4$ . Este controlador no es homogéneo y no satisface las condiciones de Haimo.

Para los controladores por RS se seleccionaron las ganancias  $k_1 = k_2 = k_4 = 1$ ,  $k_3 = 2$  y los siguientes exponentes

**hoc1:**  $c = 2/3$ ,  $b = 1/3$  y  $a = 1/3$ . Este controlador es homogéneo.

**noc1:**  $c = 2/3$ ,  $b = 1/3$  y  $a = 1/4$ . Este controlador no es homogéneo.

La Fig. 1 muestra el desempeño de los controladores. Las simulaciones verifican los resultados, los controladores no homogéneos proporcionan convergencia a  $x = y = 0$  en TF. Además, el comportamiento de los esquemas no homogéneos es similar que el de su contraparte homogénea.

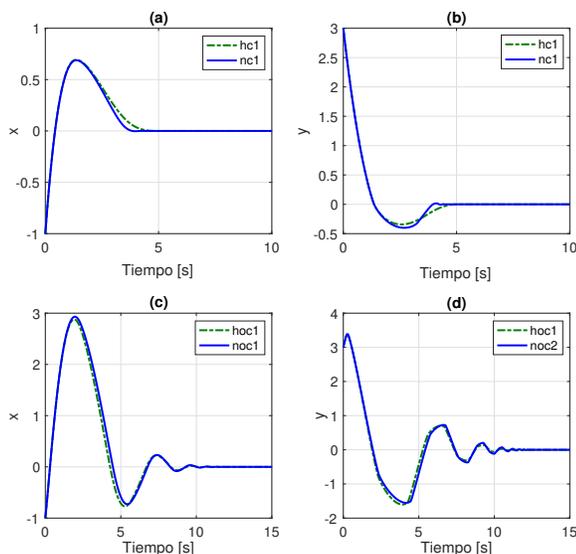


Fig. 1. La primera fila muestra los estados  $x$  y  $y$  con los controladores **hc1** y **nc1**. La segunda fila muestra los estados  $x$  y  $y$  con los controladores **hoc1** y **noc1**.

## 5. CONCLUSIONES

Se han propuesto controladores por retroalimentación de estados y por retroalimentación de salida para la estabilización en tiempo finito del doble integrador. La principal diferencia con otros esquemas reportados es que el sistema de lazo cerrado no es homogéneo. Utilizando funciones de Lyapunov estrictas se han derivado las condiciones para asegurar la convergencia en tiempo finito sin necesidad de invocar ninguna propiedad de homogeneidad. Una futura línea de investigación será el diseño de controladores no homogéneos para sistemas dinámicos de mayor orden.

## BIBLIOGRAFÍA

Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design and

output feedback. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4), 1814–1850.

Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.

Bernuau, E., Perruquetti, W., Efimov, D., and Moulay, E. (2012). Finite-time output stabilization of the double integrator. In *Proceedings of the IEEE Conf. Decision and Control*, 5906–5911.

Bhat, S. and Bernstein, D. (1997). Finite-time stability of homogeneous systems. In *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 2513–2514. Albuquerque, NM.

Bhat, S. and Bernstein, D. (1998). Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43, 678–682.

Cruz-Zavala, E., Sanchez, T., Moreno, J.A., and Nuño, E. (2018). Strict Lyapunov functions for homogeneous finite-time second-order systems. In *2018 56th IEEE Conf. Decision and Control (CDC)*, 1530–1535.

Haimo, V.T. (1986). Finite time controllers. *SIAM J. Contr. Optim.*, 24, 760–77.

Hong, Y., Huang, J., and Xu, Y. (2001). On an output feedback finite-time stabilization problem. *SIAM J. Contr. Optim.*, 46(2), 305–309.

Mercado-Uribe, A. and Moreno, J.A. (2017). Discontinuous integral control for systems in controller form. In *Congreso Nacional de Control Automático 2017*, 630–635.

Michel, A., Hou, L., and Liu, D. (2008). *Stability of Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser, Boston.

Moreno, J.A. (2014). On strict Lyapunov functions for some non-homogeneous super-twisting algorithms. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4), 1902–1919. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms.

Moulay, E. and Perruquetti, W. (2006). *Finite-Time Stability and Stabilization: State of the Art*, 23–41. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

Orlov, Y. (2009). *Discontinuous Systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer.

Polyakov, A., Orlov, Y., Oza, H., and Spurgeon, S. (2015). Robust finite-time stabilization and observation of a planar system revisited. In *2015 54th IEEE Conf. Decision and Control (CDC)*, 5689–5694.

Su, Y. and Zheng, C. (2015). Robust finite-time output feedback control of perturbed double integrator. *Automatica*, 60, 86–91.

Venkataraman, S. and Gulati, S. (1993). Terminal slider control of robot systems. *J. of Intelligent and Robotic Systems*, 5, 31–55.

Zavala-Rio, A. and Fantoni, I. (2014). Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(2), 471–477.