

Super Twisting Control for Systems with Two Outputs

Angel Mercado-Uribe, Jaime A. Moreno

Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Coyoacán, Ciudad de México, 04510, México. (Email addresses: joseangelm814@gmail.com, JMorenoP@ii.unam.mx)

Abstract: In this work, a design of a multivariable super twisting controller for systems with two outputs is presented. This design is made despite uncertainties in the input matrix. In a similar way to the classic super twisting controller for one output, this controller can reject Lipschitz perturbations, i. e. perturbations whose derivative is bounded by a constant. The stability of the origin of the closed-loop system is proven by using a strict Lyapunov function. Likewise, the performance of the controller is shown by simulations.

Keywords: Homogeneous Control, Robust Control, Sliding Mode Control

1. INTRODUCCIÓN

Una de las principales teorías de control para la estabilización del origen de sistemas, rechazando perturbaciones acopladas son los controladores por modos deslizantes de primer orden (Utkin, 1992). Este tipo de controladores son capaces de rechazar perturbaciones acotadas mediante un controlador discontinuo. El principal problema de este tipo de controladores es el efecto conocido como *chattering*, el cual es producido por el tiempo de muestro y la discontinuidad del controlador. Este fenómeno puede ocasionar daños en los actuadores por el cambio instantáneo del signo del controlador.

Una de las principales soluciones para atenuar el efecto del *chattering* es la adición una variable dinámica, la cual es capaz de esconder la discontinuidad. El controlador dinámico de este tipo más conocido es el controlador *super twisting*, el cual fue introducido en (Levant, 1993) y es capaz de rechazar perturbaciones Lipschitz, es decir, perturbaciones cuya derivada este acotada por una constante. La estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado fue originalmente probada geoméricamente en (Levant, 1993). Posteriormente, en (Moreno y Osorio, 2008, 2012), funciones de Lyapunov que prueban la estabilidad del sistema en lazo cerrado fueron presentadas. Asimismo, en (Seeber y Horn, 2018), se presenta el conjunto de ganancias necesarias y suficientes para estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado.

Es importante mencionar que los principales resultados del controlador *super twisting* han sido presentados para el caso SISO. Sin embargo, se tienen algunos trabajos para el caso multivariable. En (Nagesh y Edwards, 2014) un controlador *super twisting* unitario para sistemas multivariable es presentado. En este trabajo se presenta también un controlador *super twisting* unitario extendido. Sin embargo, en este resultado se asume que la matriz de coeficientes de entradas es completamente conocida y es precompensada en el controlador. Por otro lado,

en (López-Caamal y Moreno, 2015, 2019) se presenta un análisis del *super twisting* multivariable unitario y generalizado. En (Kamal *et al.*, 2015), se presenta un análisis para la reducción del efecto de *chattering* para el controlador *super twisting* unitario extendido. Es importante resaltar que en los trabajos anteriores se considera el caso donde la matriz de desacoplamiento es conocida. En (Vidal *et al.*, 2016), se presenta nuevamente un controlador *super twisting* unitario extendido, asumiendo que la matriz de desacoplamiento es desconocida, pero se asume que es positiva definida.

En este trabajo se presentará un controlador *super twisting* para sistemas de dos salidas, asumiendo que la matriz de desacoplamiento desconocida. Este resultado, se presenta utilizando una función estricta de Lyapunov y puede ser extendido para un caso de m salidas. Es importante resaltar que la función de Lyapunov presentada en este trabajo es diferente a las anteriormente presentadas en (Nagesh y Edwards, 2014; Kamal *et al.*, 2015; López-Caamal y Moreno, 2015; Vidal *et al.*, 2016, 2017; López-Caamal y Moreno, 2019) y por ende las condiciones de estabilidad del sistema en lazo cerrado, son diferentes. Una de las principales ventajas de este diseño de controlador *super twisting* es que se puede diseñar aún asumiendo la incertidumbre de la matriz de entrada, la cual puede ser dependiente del tiempo y el estado.

Este artículo esta organizado de la siguiente manera: en la Sección 2, se presentan los preliminares, donde los lemas claves para las pruebas son presentados. En la Sección 3, el planteamiento del problema es descrito. En la sección 4, se presenta el resultado principal, el cual consiste en un controlador *super twisting*. En la Sección 5, se presenta la función de Lyapunov, la cual prueba el resultado principal. En la Sección 6, se presenta un ejemplo de simulación, utilizando el controlador *super twisting*. Finalmente en la Sección 7, se presentan las conclusiones del trabajo.

2. PRELIMINARES

Sea el vector $x \in \mathbb{R}^n$, se define el operador de dilatación $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} := (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)$, $\forall \epsilon > 0$, donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ es definido como el vector de pesos. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o conjunto vectorial $F(x) \subset \mathbb{R}^n$) es llamado \mathbf{r} -homogéneo de grado $m \in \mathbb{R}$ si la identidad $V(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m V(x)$ se cumple (o $f(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} f(x)$, $F(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} F(x)$), [(Bacciotti y Rosier, 2005)], [(Moreno, 2016)]. Suponga que el vector \mathbf{r} y la dilatación $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}}$ están fijados. La norma

homogénea es definida por $\|x\|_{\mathbf{r},p} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p/r_i} \right)^{1/p}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, para cualquier $p \geq 1$. Asimismo, recordamos la siguiente propiedad de funciones homogéneas continuas

Lemma 1. ((Andrieu *et al.*, 2008),(Moreno, 2016)). Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones homogéneas continuas con pesos $\mathbf{r} = (2, \dots, r_n)$ y grados m , donde $\gamma(x) \geq 0$, tal que se cumple

$\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\}$, entonces, existe un número real λ^* tal que, para toda $\lambda > \lambda^*$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y algún $c > 0$, $\eta(x) - \lambda\gamma(x) < -c\|x\|_{\mathbf{r},p}^m$.

El lema 1 es extendido a funciones discontinuas:

Lemma 2. (Cruz-Zavala y Moreno, 2017) Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones homogéneas semicontinuas univalueadas por abajo (respectivamente, por arriba) con pesos de homogeneidad \mathbf{r} y grado $m > 0$. Suponga que $\gamma(x) \geq 0$ (resp. $\gamma(x) \leq 0$) en \mathbb{R}^n . Si $\eta(x) > 0$ (resp. $\eta(x) < 0$) para toda $x \neq 0$ tal que $\gamma(x) = 0$, entonces existe una constante $\lambda^* \in \mathbb{R}$ y una constante $c > 0$ tal que para toda $\lambda \geq \lambda^*$ y toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se cumple

$$\eta(x) + \lambda\gamma(x) \geq c\|x\|_{\mathbf{r},p}^m$$

$$\left(\text{resp. } \eta(x) + \lambda\gamma(x) \leq -c\|x\|_{\mathbf{r},p}^m \right).$$

Recordamos que para sistemas homogéneos, la estabilidad local implica estabilidad global y su grado de homogeneidad l determina el tipo de estabilidad [(Bacciotti y Rosier, 2005)]: (i) $l < 0$ implica estabilidad en tiempo finito, (ii) $l = 0$ estabilidad exponencial, (iii) $l > 0$ estabilidad racional.

2.1 Notación

A lo largo de este artículo se usará la siguiente notación. Para una variable real $z \in \mathbb{R}$ y un número real $p \in \mathbb{R}$, el símbolo $[z]^p = |z|^p \text{sign}(z)$ es la potencia signada p de z . De acuerdo a esto, se tiene que $[z]^0 = \text{sign}(z)$, $\frac{d}{dz}[z]^m = m|z|^{m-1}$ y $\frac{d}{dz}|z|^m = m[z]^{m-1}$. Note que $[z]^2 = |z|^2 \text{sign} z \neq z^2$, y si p es un número impar entonces $[z]^p = z^p$, mientras que si p es par se tiene $|z|^p = z^p$. Más aún $[z]^p [z]^q = |z|^{p+q}$, $[z]^p [z]^0 = |z|^p$ y $[z]^0 [z]^p = |z|^p$.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considérese un sistema MIMO de dos salidas en la forma

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = G[u + \rho] \quad (1)$$

donde $y \in \mathbb{R}^2$ son los estados y salidas del sistema, $u \in \mathbb{R}^2$ son las variables de control.

La matriz $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ corresponde a la matriz de desacoplamiento, cuyos elementos son funciones suaves del estado y el tiempo. Esta matriz se asume incierta y puede ser escrita como

$$G = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{bmatrix}$$

donde los valores absolutos de sus elementos están acotados por constantes, satisfaciendo las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} 0 < \underline{g}_{1,1} &\leq g_{1,1} \leq \bar{g}_{1,1}, \\ |g_{1,2}| &\leq \bar{g}_{1,2}, \\ |g_{2,1}| &\leq \bar{g}_{2,1}, \\ 0 < \underline{g}_{2,2} &\leq g_{2,2} \leq \bar{g}_{2,2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Estas restricciones son comunes en modos deslizantes para sistemas MIMO, de hecho estas restricciones aparecen en (Levant, 2010, 2014; Levant y Dvir, 2014), donde se prueba geoméricamente que la estabilidad del origen de un sistema de m salidas en lazo cerrado se puede lograr si la matriz de desacoplamiento es diagonalmente dominante por renglones, en este caso la restricción sería

$$\begin{aligned} \underline{g}_{1,1} &> \bar{g}_{1,2}, \\ \underline{g}_{2,2} &> \bar{g}_{2,1}. \end{aligned} \quad (3)$$

El término $\rho \in \mathbb{R}^2$ representa perturbaciones acopladas al vector de variables de control, el cual se asume que satisface

$$|\dot{\rho}_1| \leq L_1 \leq L, \quad |\dot{\rho}_2| \leq L_2 \leq L, \quad (4)$$

donde $L_1, L_2, L \in \mathbb{R}_+$ son constantes.

El objetivo de control es estabilizar el origen del sistema (1) en tiempo finito, rechazando el vector de perturbaciones ρ . Para lograr lo anterior, se busca diseñar un controlador *super twisting* multivariable.

4. CONTROLADOR SUPER TWISTING

En esta sección, se presenta el resultado principal mediante el siguiente teorema

Theorem 3. Considere el sistema (1), cuya matriz de desacoplamiento satisface (2) y el vector de perturbaciones satisface (4). Entonces la ley de control

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} -k_{u_1} [y_1]^{\frac{1}{2}} \\ -k_{u_2} [y_2]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + z, \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} -k_{I_{u_1}} [y_1]^0 \\ -k_{I_{u_2}} [y_2]^0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

estabiliza el origen del sistema (1) en tiempo finito para k_{u_1} y k_{u_2} suficientemente grandes, y para cualesquiera ganancias $k_{I_{u_1}} > L$ y $k_{I_{u_2}} > L$ si se satisface

$$\det \left(\begin{bmatrix} \underline{g}_{1,1} & \bar{g}_{1,2} \\ \bar{g}_{2,1} & \underline{g}_{2,2} \end{bmatrix} \right) > \epsilon, \quad \epsilon > 0 \quad (6)$$

La prueba de este teorema es realizada mediante una función estricta de Lyapunov, la cual es presentada en la Sección 5.

Note que la condición (6) pide que el determinante de la matriz de desacoplamiento sea estrictamente positiva, lo cual asegura que los dos controladores trabajan en la dirección correcta para lograr la estabilidad del origen del sistema. Sin embargo, la condición más importante es la matriz G nunca sea singular y dependiendo del signo de su determinante, se tendrían los signos de las ganancias del controlador. Nótese que la condición (6) en el caso escalar, implicaría que el coeficiente de control sea positivo, la cual es una suposición habitual. Asimismo, es importante notar que en contraste con el trabajo presentado en (Vidal *et al.*, 2016), la incertidumbre de esta matriz no tiene que ser simétrica y puede variar en función del estado y del tiempo.

Por otro lado, vale la pena mencionar que en contraste con un controlador por modos deslizantes clásicos para sistemas MIMO, como los presentados en (Levant, 2010, 2014; Levant y Dvir, 2014), la matriz de desacoplamiento no requiere ser diagonalmente dominante por renglones, sino que se tiene una condición menos restrictiva, ya que si satisface (3), la condición (6) también es satisfecha pero no ocurre lo mismo en sentido contrario. Esta condición menos restrictiva es posible como consecuencia de tener un controlador continuo en lugar de uno discontinuo, ya que como consecuencia de la discontinuidad todos los controladores continúan actuando en el origen.

Es importante recordar que el controlador *super twisting* es un controlador homogéneo (Levant, 2005), por lo que las propiedades de homogeneidad permiten un escalamiento de ganancias. Por lo tanto, si el controlador (5) estabiliza el origen del sistema (1) con ganancias k_{u_1} , k_{u_2} , $k_{I_{u_1}}$ y $k_{I_{u_2}}$, rechazando perturbaciones con derivadas acotadas por L , entonces el controlador (5) con ganancias $\lambda^{\frac{1}{2}}k_{u_1}$, $\lambda^{\frac{1}{2}}k_{u_2}$, $\lambda k_{I_{u_1}}$ y $\lambda k_{I_{u_2}}$ para $\lambda > 0$ estabiliza el origen del sistema (1), rechazando perturbaciones con derivadas acotadas por λL .

5. FUNCIÓN DE LYAPUNOV

En esta sección, se presenta la función de Lyapunov, la cual valida el Teorema 3.

Definiendo las variables integrales $\zeta_1 = \frac{1}{k_{u_1}}(z_1 + \rho_1)$ y $\zeta_2 = \frac{1}{k_{u_2}}(z_2 + \rho_2)$; así como las siguientes variables escaladas para las perturbaciones acopladas $\bar{\rho}_1 = \frac{1}{k_{I_{u_1}}}\rho_1$ y $\bar{\rho}_2 = \frac{1}{k_{I_{u_2}}}\rho_2$, el sistema en lazo cerrado puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -g_{1,1}k_{u_1} \left[|y_1|^{\frac{1}{2}} - \zeta_1 \right] - g_{1,2}k_{u_2} \left[|y_2|^{\frac{1}{2}} - \zeta_2 \right], \\ \dot{y}_2 &= -g_{2,1}k_{u_1} \left[|y_1|^{\frac{1}{2}} - \zeta_1 \right] - g_{2,2}k_{u_2} \left[|y_2|^{\frac{1}{2}} - \zeta_2 \right], \\ \dot{\zeta}_1 &= -\bar{k}_{I_{u_1}} \left[|y_1|^0 + \dot{\rho}_1 \right], \quad \bar{k}_{I_{u_1}} = k_{u_1}^{-1}k_{I_{u_1}} \\ \dot{\zeta}_2 &= -\bar{k}_{I_{u_2}} \left[|y_2|^0 + \dot{\rho}_2 \right], \quad \bar{k}_{I_{u_2}} = k_{u_2}^{-1}k_{I_{u_2}} \end{aligned} \quad (7)$$

De esta forma, se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V = \gamma_1 \left[\frac{2}{p} |y_1 - [\zeta_1]^2|^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{p} \gamma_{z_1} |\zeta_1|^p \right] + \gamma_2 \left[\frac{2}{p} |y_2 - [\zeta_2]^2|^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{p} \gamma_{z_2} |\zeta_2|^p \right]$$

con $p \geq 2$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}_+$. Nótese que cada término es positivo semidefinido y la suma de los mismos es positiva definida en $y \in \mathbb{R}^2$, $\zeta \in \mathbb{R}^2$.

La derivada de la candidata a función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (7) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\gamma_1 g_{1,1} k_{u_1} \left[|y_1 - [\zeta_1]^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \left[|y_1|^{\frac{1}{2}} - \zeta_1 \right] - \\ &\quad \gamma_1 g_{1,2} k_{u_2} \left[|y_1 - [\zeta_1]^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \left[|y_2|^{\frac{1}{2}} - \zeta_2 \right] - \\ &\quad \gamma_2 g_{2,1} k_{u_1} \left[|y_2 - [\zeta_2]^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \left[|y_1|^{\frac{1}{2}} - \zeta_1 \right] - \\ &\quad \gamma_2 g_{2,2} k_{u_2} \left[|y_2 - [\zeta_2]^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \left[|y_2|^{\frac{1}{2}} - \zeta_2 \right] - \\ &\quad \gamma_1 \bar{k}_{I_{u_1}} \left[2 \left[|[\zeta_1]^2 - y_1 \right]^{\frac{p-2}{2}} + \gamma_{z_1} [\zeta_1]^{p-2} \right] \bar{\phi}_{z_1} - \\ &\quad \gamma_2 \bar{k}_{I_{u_2}} \left[2 \left[|[\zeta_2]^2 - y_2 \right]^{\frac{p-2}{2}} + \gamma_{z_2} [\zeta_2]^{p-2} \right] \bar{\phi}_{z_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{z_1} &= |\zeta_1| \left[|y_1|^0 + \dot{\rho}_1 \right], \\ \bar{\phi}_{z_2} &= |\zeta_2| \left[|y_2|^0 + \dot{\rho}_2 \right], \end{aligned}$$

seleccionando $p = 2$, la derivada de la candidata a función de Lyapunov puede ser acotada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -[\gamma_1 g_{1,1} - \gamma_2 |g_{2,1}|] k_{u_1} \left[|y_1 - [\zeta_1]^2 \right]^0 \left[|y_1|^{\frac{1}{2}} - \zeta_1 \right] - \\ &\quad [\gamma_2 g_{2,2} - \gamma_1 |g_{1,2}|] k_{u_2} \left[|y_2 - [\zeta_2]^2 \right]^0 \left[|y_2|^{\frac{1}{2}} - \zeta_2 \right] - \\ &\quad \gamma_1 \bar{k}_{I_{u_1}} \left[2 \left[|[\zeta_1]^2 - y_1 \right]^0 + \gamma_{z_1} [\zeta_1]^0 \right] \bar{\phi}_{z_1} - \\ &\quad \gamma_2 \bar{k}_{I_{u_2}} \left[2 \left[|[\zeta_2]^2 - y_2 \right]^0 + \gamma_{z_2} [\zeta_2]^0 \right] \bar{\phi}_{z_2}, \end{aligned}$$

donde el primer término es negativo semidefinido si

$$\gamma_1 g_{1,1} - \gamma_2 |g_{2,1}| > 0,$$

lo cual se logra si γ_1 se define como

$$\gamma_1 = \gamma_2 \frac{1}{g_{1,1}} \left[|g_{2,1}| + \frac{\epsilon}{|g_{1,2}|} \right], \quad \epsilon > 0.$$

Asimismo, el segundo término también es negativo semidefinido si se satisface

$$\gamma_2 g_{2,2} - \gamma_1 |g_{1,2}| > 0,$$

sustituyendo γ_1 , se tiene

$$g_{2,2} - \frac{|g_{2,1}| |g_{1,2}|}{g_{1,1}} + \frac{\epsilon}{g_{1,1}} > 0,$$

la cual se cumple si

$$g_{2,2} g_{1,1} - \bar{g}_{2,1} \bar{g}_{1,2} > \epsilon,$$

que implica la condición (6).

Utilizando el Lema 1, los primeros dos términos, los cuales son positivos semidefinidos, pueden dominar para k_{u_1} y

k_{u_2} suficientemente grandes, si en la región en donde ambos términos son cero, la derivada de V es negativa definida.

El primer término es cero sólo en el conjunto

$$S_1 = \left\{ (y, \zeta) \mid y_1 = [\zeta_1]^2 \right\},$$

mientras que el segundo término es cero sólo en el conjunto

$$S_2 = \left\{ (y, \zeta) \mid y_2 = [\zeta_2]^2 \right\},$$

en la intersección de los conjuntos S_1 y S_2 , la cual es representada por $S_{1,2}$, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} \Big|_{S_{1,2}} &\leq -\gamma_1 \bar{k}_{I_{u_1}} \left[2 + \gamma_{z_1} [\zeta_1]^0 \right] \bar{\phi}_{z_1} \Big|_{S_{1,2}} - \\ &\quad \gamma_2 \bar{k}_{I_{u_2}} \left[2 + \gamma_{z_2} [\zeta_2]^0 \right] \bar{\phi}_{z_2} \Big|_{S_{1,2}}, \\ &\leq -\gamma_1 \bar{k}_{I_{u_1}} \left[2 + \gamma_{z_1} [\zeta_1]^0 \right] \left[[\zeta_1]^0 - \frac{L}{k_{I_{u_1}}} \right] |\zeta_1| - \\ &\quad \gamma_2 \bar{k}_{I_{u_2}} \left[2 + \gamma_{z_2} [\zeta_2]^0 \right] \left[[\zeta_2]^0 - \frac{L}{k_{I_{u_2}}} \right] |\zeta_2|, \end{aligned}$$

la cual es negativa definida si se satisface

$$\gamma_{z_1} > 2, \quad \gamma_{z_2} > 2, \quad k_{I_{u_1}} > L, \quad k_{I_{u_2}} > L.$$

Por lo tanto, es posible hacer \dot{V} negativa definida para k_{u_1} y k_{u_2} suficientemente grandes. Es importante mencionar que la función de Lyapunov no es diferenciable en los conjuntos S_1 y S_2 , por lo que la función de Lyapunov presentada no puede asegurar la estabilidad del origen en esas superficies. Sin embargo, nótese que la dinámica de ζ_1 y ζ_2 valuada en esas superficies corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -\bar{k}_{I_{u_1}} \left[[\zeta_1]^0 + \dot{\rho}_1 \right], \\ \dot{\zeta}_2 &= -\bar{k}_{I_{u_2}} \left[[\zeta_2]^0 + \dot{\rho}_2 \right], \end{aligned}$$

cuyo origen es estable en tiempo finito para ganancias $k_{I_{u_1}} > L$ y $k_{I_{u_2}} > L$. Por lo tanto, $y_1 = [\zeta_1]^2$ y $y_2 = [\zeta_2]^2$ tienden a cero en esas superficies y por ende el origen del sistema en lazo cerrado es estable en tiempo finito.

6. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Considérese un robot manipulador de dos eslabones con movimiento en un plano perpendicular a la gravedad, cuya dinámica puede ser escrita como (Utkin, 1992)

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \rho = M(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + N(q, \dot{q})$$

donde τ_1 y τ_2 son las variables de entrada y corresponden a los pares de fuerza aplicados en las articulaciones de los eslabones. Las variables q_1 , q_2 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 son los estados del sistema correspondientes a las posiciones y velocidades angulares de cada eslabón. La matriz $M(q)$ representa la matriz de masas, cuyo elementos están definidos por

$$\begin{aligned} m_{22} &= L_2^2 M_2, \\ m_{12} &= m_{21} = m_{22} + L_1 L_2 M_2 \cos(q_2), \\ m_{11} &= L_1^2 (M_1 + M_2) + 2m_{12} - m_{22}, \end{aligned}$$

donde M_1 y M_2 son las masas de los eslabones, L_1 y L_2 son las longitudes de los eslabones. La matriz

$N(q, \dot{q})$ representa a la fuerza de Coriolis y sus términos corresponden a

$$\begin{aligned} n_1 &= -L_1 L_2 M_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_2^2) \sin(q_2), \\ n_2 &= L_1 L_2 M_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2). \end{aligned}$$

Asimismo, ρ representa el vector de perturbaciones no desvanecientes. Los elementos de ρ se definen como $\rho_1(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$ y $\rho_2(t) = \cos(t)$, cuyas derivadas están acotadas por 1.

Nótese que el determinante de la matriz $M(q)$ está definido como

$$\begin{aligned} \det(M) &= m_{11} m_{22} - m_{12}^2 \\ &= m_{22} L_1^2 (M_1 + M_2) - (L_1 L_2 M_2 \cos(q_2))^2 \\ &\geq L_2^2 L_1^2 M_2 (M_1 + M_2) - (L_1 L_2 M_2)^2 \\ &\geq L_2^2 L_1^2 M_1 M_2, \end{aligned}$$

el cual es estrictamente positivo. Por lo tanto, el controlador presentado en el Teorema 3 puede ser utilizado. Para lograr la aplicar de este controlador *super twisting* (5), se considera la superficie de deslizamiento

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + a_1 q_1 \\ \dot{q}_2 + a_2 q_2 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2 > 0$$

cuya dinámica puede ser escrita como

$$\dot{s} = M^{-1}(q) \left(\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \rho - N(q, \dot{q}) + M(q) \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1 \\ a_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right).$$

Nótese que el término $N(q, \dot{q})$ puede ser fácilmente compensado por el controlador. Sin embargo, dado que la matriz de desacoplamiento $M(q)$ se asume incierta, el último término no puede ser cancelado. Para lidiar con este término, considérese que la incertidumbre de la matriz desacoplamiento aparece sólo en los parámetros, es decir se conoce la estructura y se tienen los parámetros nominales \bar{L}_1 , \bar{L}_2 , \bar{M}_1 y \bar{M}_2 , los cuales son una aproximación de los parámetros reales. De esta forma, se propone la ley de control

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = u + N(q, \dot{q}) - \bar{M}(q) \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1 \\ a_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

donde $\bar{M}(q)$ representa la matriz de masas nominal, es decir utilizando los parámetros nominales en los término. De esta forma, la dinámica de la superficie de deslizamiento se convierte en

$$\dot{s} = M^{-1}(q) \left(u + \rho + \tilde{M}(q) \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1 \\ a_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{M}(q) &= \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} \end{bmatrix}, \\ \tilde{m}_{22} &= L_2^2 M_2 - \bar{L}_2^2 \bar{M}_2, \\ \tilde{m}_{12} &= \tilde{m}_{21} = \tilde{m}_{22} + (L_1 L_2 M_2 - \bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{M}_2) \cos(q_2), \\ \tilde{m}_{11} &= L_1^2 (M_1 + M_2) - \bar{L}_1^2 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) + 2\tilde{m}_{12} - \tilde{m}_{22}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la perturbación acoplada final es escrita como

$$\rho_f(t, q, \dot{q}) = \rho + \begin{bmatrix} a_1 \tilde{m}_{11} \dot{q}_1 + a_2 \tilde{m}_{12} \dot{q}_2 \\ a_1 \tilde{m}_{21} \dot{q}_1 + a_2 \tilde{m}_{22} \dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

cuya derivada resulta en

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_f(t, q, \dot{q}) &= \dot{\rho} + \tilde{M}(q) \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} M^{-1}(q) u + \\ &\quad \dot{m}_{12} \begin{bmatrix} 2a_1 \dot{q}_1 + a_2 \dot{q}_2 \\ a_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \\ \dot{m}_{12} &= - (L_1 L_2 M_2 - \bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{M}_2) \dot{q}_2 \sin(q_2). \end{aligned}$$

De esta forma, la norma infinito, la cual es definida como $\|\dot{\rho}\|_\infty = \max(|\dot{\rho}_1|, |\dot{\rho}_2|)$, de la derivada del vector de perturbaciones está acotada por

$$\begin{aligned} \|\dot{\rho}_f\|_\infty &\leq 1 + \bar{\lambda}(\tilde{M}M^{-1}) \max(a_1, a_2) \|u\|_2 + \\ &\quad (L_1 L_2 M_2 - \bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{M}_2) \max(2a_1, a_2) \|\dot{q}\|_2^2, \end{aligned}$$

donde $\bar{\lambda}(M)$ representa el máximo valor propio de la matriz M . Es importante notar que los elementos de $\dot{\rho}_f$ son únicamente Lipschitz localmente.

Las simulaciones fueron realizadas utilizando el programa de Matlab Simulink con el solucionador de Euler de primer orden con tiempo de muestreo de 10^{-4} [s]. Los parámetros utilizados están presentados en la Tabla 1. Asimismo, se consideran las condiciones iniciales $q(0) = [0.5, 0.5]^T$ y $\dot{q}(0) = [0, 0]^T$.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
\bar{L}_1	1[m]	L_1	1.1[m]
\bar{L}_2	1[m]	L_2	1.05[m]
\bar{M}_1	10[kg]	M_1	9.9[kg]
\bar{M}_2	1[kg]	M_2	0.95[kg]

Tabla 1. Parámetros físicos.

Seleccionando $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = 1$, la norma infinito de la derivada del vector de perturbaciones es acotada por

$$\|\dot{\rho}_f\|_\infty \leq 1 + 0.1665 \|u\|_2 + 0.0973 \|\dot{q}\|_2^2,$$

La ley de control es definida como

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} -7 [s_1]^{\frac{1}{2}} \\ -7 [s_2]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + z \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} -3 [s_1]^0 \\ -3 [s_2]^0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde las ganancias de las acciones integrales son mayores a 1, siendo este la cota máxima de las perturbaciones externas $\rho(t)$. Asimismo, es importante mencionar que las ganancias son independientes, aunque en esta ocasión se han escogido de la misma magnitud, de tal forma que la precisión y el efecto de *chattering* sean similares en ambas salidas.

En la figura 1, se presenta el comportamiento de los estados del sistema, los cuales son definidos como $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$, $x_3 = \dot{q}_1$ y $x_4 = \dot{q}_2$. En esta figura es posible observar que todos los estados convergen a cero. Es importante mencionar que esta convergencia se logra de forma exponencial.

En la figura 1, se presentan las superficies de deslizamiento. En ella es posible que ambas superficies de deslizamiento convergen a cero con un error de 10^{-7} . Note que este caso la convergencia es en tiempo finito.

En la figura 3, se presentan las señales de control. Nótese que aunque la ley control tiene una discontinuidad en

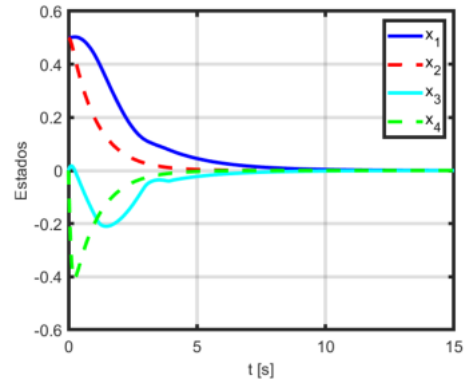


Fig. 1. Estados del sistema.

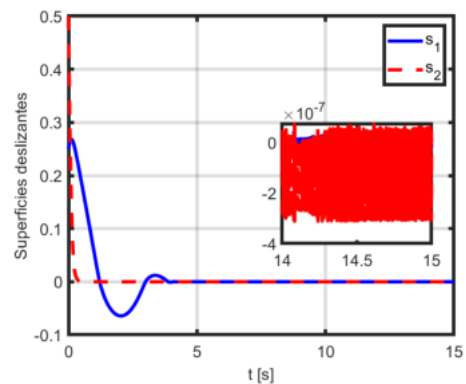


Fig. 2. Superficies de deslizamiento.

la dinámica de la acción integral, la señal resultante de control es continua. Este resultado se debe a que el integrador esconde la discontinuidad. Asimismo, es posible ver que ambas señales tienden al negativo de su respectiva perturbación no desvaneciente, lo que permite cancelarlas.

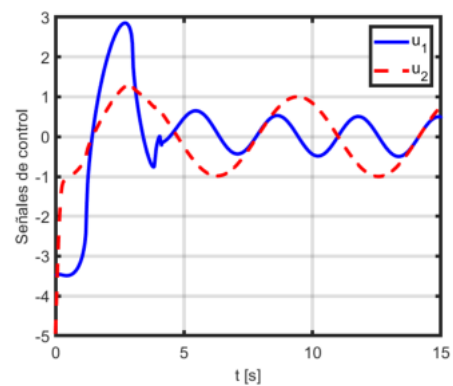


Fig. 3. Señales de control u_1 y u_2 .

En la figura 4, se presentan los errores integrales, los cuales son definidos por la suma de la variable integral y la perturbación no desvaneciente. En esta figura, es aprecia que el vector de perturbaciones es cancelado por la acción integral.

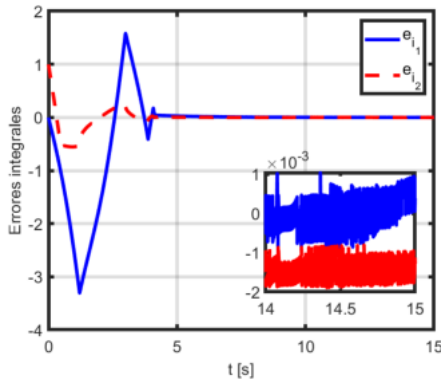


Fig. 4. Errores integrales $e_{i1} = z_1 + \rho_1$ y $e_{i2} = z_2 + \rho_2$.

7. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta un controlador *super twisting* multivariable para sistemas de dos salidas. Sin embargo, este resultado puede ser extendido para un sistema de m salidas. Un aspecto importante en el diseño del controlador es que no requiere el conocimiento exacto de la matriz de desacoplamiento. Sin embargo, se asume que conocen cotas inferiores y superiores de sus coeficientes.

Las estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado es probada mediante una función de Lyapunov. Asimismo, el funcionamiento del controlador es mostrado con simulaciones.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico de PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica), proyecto IN102121; CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), CVU 705765.

REFERENCIAS

Andrieu, V., L. Praly y A. Astolfi (2008). Homogeneous Aproximation, Recursive Observer Design and Output Feedback. *SIAM J. Control Optim.* **47**(4), 1814–1850.

Bacciotti, A. y L. Rosier (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer-Verlag, 2nd ed. New York.

Cruz-Zavala, E. y J. A. Moreno (2017). Homogeneous High Order Sliding Mode Design: a Lyapunov Approach. *Automatica* **80**, 232–238.

Kamal, Shyam, Asif Chalanga, Ramesh Kumar P. y B. Bandyopadhyay (2015). Multivariable continuous integral sliding mode control. In: *2015 International Workshop on Recent Advances in Sliding Modes (RASM)*. pp. 1–5.

Levant, A. (1993). Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control. *International J. Control* **58**(6), 1247–1263.

Levant, A. (2005). Homogeneity Approach to High-Order Sliding Mode. *Automatica* **41**, 823–830.

Levant, A. (2010). Gain-scheduled high-order mimo sliding mode control. In: *49th Conference on Decision and Control (CDC)* (IEEE, Ed.). pp. 5150–5155.

Levant, A. (2014). Finite-Time Stabilization of Uncertain MIMO Systems. In: *53rd Conference on Decision and Control* (IEEE, Ed.). pp. 4753–4758.

Levant, A. y Y. Dvir (2014). Accelerated High-Order MIMO Sliding Mode control. In: *13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)* (IEEE, Ed.). pp. 1–6.

López-Caamal, Fernando y Jaime A. Moreno (2015). Qualitative differences of two classes of multivariable super-twisting algorithms. In: *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. pp. 5414–5419.

López-Caamal, Fernando y Jaime A. Moreno (2019). Generalised multivariable supertwisting algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **29**(3), 634–660.

Moreno, J. A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. In: *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. pp. 142–147.

Moreno, J.A. y M. Osorio (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* (IEEE, Ed.). pp. 2856–2861.

Moreno, J.A. y M. Osorio (2012). Strict Lyapunov functions for the Super-Twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(4), 1035–1040. cited By 391.

Nagesh, Indira y Christopher Edwards (2014). A multivariable super-twisting sliding mode approach. *Automatica* **50**(3), 984–988.

Seeber, Richard y Martin Horn (2018). Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm. In: *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. pp. 120–125.

Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Verlag.

Vidal, Paulo V. N. M., Eduardo V. L. Nunes y Liu Hsu (2016). Multivariable super-twisting algorithm for a class of systems with uncertain input matrix. In: *2016 American Control Conference (ACC)*. pp. 7201–7206.

Vidal, Paulo V. N. M., Eduardo V. L. Nunes y Liu Hsu (2017). Output-feedback multivariable global variable gain super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(6), 2999–3005.