

Fault Accommodation Sliding-Mode Control for Quad-Rotor Tracking Trajectory

Romeo Falcón * Héctor Ríos*,** Alejandro Dzul*

* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón Coahuila, México.*

** *Cátedras CONACYT, C.P. 03940, Ciudad de México, México.*

Abstract: This work presents the design of a fault accommodation control for trajectory tracking in a Quad-Rotor under multiple actuator faults and external disturbances. The faults are modeled as partial loss of effectiveness. The proposed scheme is composed of a fault identification module, based on a finite-time sliding mode observer, and a robust nominal controller. Such a strategy uses the fault identification to partially compensate for the effect of faults, while the robust nominal controller deals with external disturbances. The performance of the proposed scheme is validated through numerical simulations.

Keywords: Fault Tolerant Control, *Quad-Rotor*, Fault Accommodation.

1. INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones de *Quad-Rotors* han aumentado considerablemente en los últimos años debido a su bajo costo, tamaño reducido y a su capacidad de realizar despegues y aterrizajes verticales. En estas aplicaciones, la seguridad y la confiabilidad en el desempeño de la tarea son una prioridad; esto ha propiciado la investigación de controladores robustos aplicados a dichos vehículos (ver, *e.g.*, Ríos et al. (2019)). Sin embargo, estas técnicas son efectivas cuando el sistema funciona con los rotores en condiciones nominales. En presencia de fallas en los rotores, el controlador puede dejar de satisfacer el nivel de desempeño requerido, llegando incluso a la inestabilidad. Por lo tanto, con el fin de aumentar la seguridad y la robustez se debe diseñar un control tolerante a fallas (FTC, por sus siglas en inglés). Los FTCs se pueden clasificar en pasivos y activos.

En los FTCs pasivos la ley de control no cambia cuando ocurre una falla, ya que las fallas se consideran como parte de las perturbaciones y se utilizan técnicas similares a las estrategias robustas, sin embargo, la tolerancia a fallas es muy reducida (Blanke et al. (2003)). Existen varios trabajos relacionados con los FTCs pasivos. Por ejemplo, en Dydek et al. (2013), un controlador adaptable por modelo de referencia es diseñado para un *Quad-Rotor* en presencia de fallas y perturbaciones externas. En Song et al. (2019), se propone un FTC adaptable basado en redes neuronales para un *Quad-Rotor* con fallas y perturbaciones externas. En Wang and Zhang (2018), la

acción de control de un controlador por modos deslizantes adaptable se distribuye para un *Quad-Rotor* con fallas. Sin embargo, en los trabajos anteriores las fallas no se detectan y presentan estrategias con bajos niveles de desempeño. En este sentido, las fallas pueden exceder la capacidad del FTC provocando una colisión peligrosa.

Por otro lado, en los FTCs activos, el diagnóstico de fallas (FD, por sus siglas en inglés), es decir, la detección, el aislamiento y la identificación de las fallas, es indispensable. Haciendo uso del FD, se puede modificar la ley de control de acuerdo a la magnitud de la falla. De igual forma, existen varios trabajos relacionados con los FTCs activos. En Nian et al. (2020), se propone un observador adaptable robusto para estimar fallas; dichas estimaciones son utilizadas por un FTC aplicado a *Quad-Rotors*. En Wang et al. (2020), un FTC, compuesto por controladores por modos deslizantes adaptables y redes neuronales recurrentes, es diseñado para el subsistema de orientación de un *Quad-Rotor* en presencia de fallas e incertidumbres en el modelo. En Avram et al. (2017) se propone un FTC que emplea la técnica de acomodo de fallas, ajustando las ganancias del controlador, para un *Quad-Rotor* en presencia de fallas. En los trabajos anteriores, las perturbaciones externas pueden afectar el desempeño de los FTCs, ya que no tratan fallas y perturbaciones externas simultáneamente. Debido a esto, los observadores por modos deslizantes (SMOs, por sus siglas en inglés) se adoptan con frecuencia para estimar tanto perturbaciones externas como fallas, debido a su robustez y convergencia en tiempo finito. Por ejemplo, en Chandra et al. (2015), se desarrolla un método de reconstrucción de fallas para un *Quad-Rotor* usando un SMO. En Wang et al. (2019), se propone un FTC, en

* Todos los autores agradecen el apoyo financiero por parte del TecNM y el proyecto CONACYT 225291. R. Falcón y H. Ríos también agradecen el apoyo financiero de CONACYT CVU 785635 y Cátedras CONACYT CVU 270504 proyecto 922, respectivamente.

conjunto con un SMO, para un *Quad-Rotor* en presencia de fallas y perturbaciones externas. Sin embargo, en los trabajos anteriores, los SMOs identifican la incertidumbre total, sin distinguir entre fallas y perturbaciones.

En resumen, el diseño de un FTC para *Quad-Rotors* en presencia de fallas, perturbaciones externas, y considerando su dinámica no lineal, subactuada y fuertemente acoplada, es un tema desafiante. Motivado por esto, en este trabajo se propone un controlador por acomodo de fallas (FAC, por sus siglas en inglés) para lidiar con fallas en múltiples rotores, expresadas como pérdidas parciales de efectividad (LOEs, por sus siglas en inglés), en un *Quad-Rotor* en presencia de perturbaciones externas. La estrategia consiste en un módulo de identificación de fallas, el cual hace uso de un Observador por Modos Deslizantes en Tiempo Finito (FT-SMO, por sus siglas en inglés), y de un controlador nominal robusto. El controlador por acomodo de fallas utiliza la identificación de fallas para compensar parcialmente las fallas. La estrategia propuesta es independiente del lazo de control, lo que permite su implementación en un controlador nominal robusto. Dicho controlador está compuesto por una combinación de controladores PID y controladores por modos deslizantes de alto orden (HOSMCs, por sus siglas en inglés) (Ríos et al. (2019)). El FAC propuesto asegura la convergencia en tiempo finito al origen del error de orientación, y garantiza la convergencia exponencial a una vecindad del error de posición.

Notación: Denote $s(\cdot) := \sin(\cdot)$ y $c(\cdot) := \cos(\cdot)$; \wedge denota el operador lógico AND; I_n denota la matriz identidad de orden n , 0_n la matriz cuadrada nula de orden n , mientras que $0_{n \times m}$ la matriz nula de $n \times m$; denote $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, donde \mathbb{R} es el conjunto de todos los números reales; $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana en \mathbb{R}^n ; para una función medible de Lebesgue $d : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, definiendo la norma $\|d\|_{[t_0, t_1]} = \text{esssup}_{t \in [t_0, t_1]} \|d(t)\|$, entonces $\|d\|_f = \|d\|_{[t_f, +\infty)}$ y $\|d\|_\infty = \|d\|_{[0, +\infty)}$; el conjunto de $d(t)$ con la propiedad de $\|d\|_\infty < +\infty$ se denota como \mathcal{L}_∞ ; y $\mathcal{L}_D = \{d \in \mathcal{L}_\infty : \|d\|_\infty \leq D\}$, para cualquier $D > 0$. La secuencia de enteros $1, \dots, n$ está denotada como $\overline{1, n}$, la función $[a]^\gamma := |a|^\gamma \text{sign}(a)$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y $[s]^\gamma := ([s_1]^\gamma, \dots, [s_n]^\gamma)^T$, para cualquier $s = (s_1, \dots, s_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La dinámica simplificada del *Quad-Rotor* (ver Fig. 1, para detalles del modelado ver García-Carrillo et al. (2013)), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, & \dot{\xi}_2 &= g_\xi(\eta_1)u_m - G - \Lambda_\xi \xi_2 + d_\xi(t), & (1a) \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= J\tau + \Xi w_\eta(\eta_2) - \Lambda_\eta \eta_2 + d_\eta(t), & (1b) \end{aligned}$$

donde $\xi_1 := (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, $\xi_2 := (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \in \mathbb{R}^3$, $\eta_1 := (\phi, \theta, \psi)^T \in \mathbb{R}^3$, $\eta_2 := (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T \in \mathbb{R}^3$, $d_\xi := (d_x, d_y, d_z)^T \in \mathbb{R}^3$ y $d_\eta := (d_\phi, d_\theta, d_\psi)^T \in \mathbb{R}^3$. Las variables $x, y \in \mathbb{R}$ son las coordenadas en el plano horizontal, $z \in \mathbb{R}$ es la posición vertical, mientras que ϕ, θ y $\psi \in \mathbb{R}$ son el ángulo de *roll* alrededor del eje X , el ángulo de *pitch* alrededor del eje Y , y el ángulo de *yaw* alrededor del eje Z , respectivamente. Los términos $d_x, d_y,$

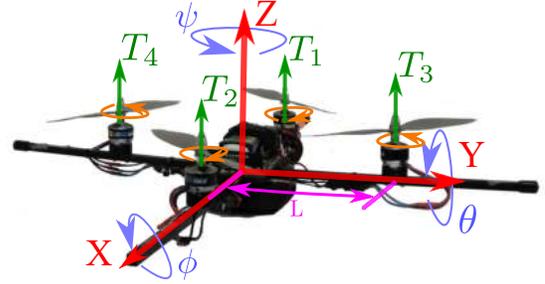


Figura 1. Representación esquemática del *Quad-Rotor*.

d_z, d_ϕ, d_θ y $d_\psi \in \mathbb{R}$ representan perturbaciones externas, e.g., ráfagas de viento. Los términos $G := (0, 0, g)^T \in \mathbb{R}^3$, $J := \text{diag}(J_x^{-1}, J_y^{-1}, J_z^{-1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\tau = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T \in \mathbb{R}^3$ son el vector de gravedad, la matriz de inercias y el vector de momentos angulares, con g como la aceleración gravitacional, J_x, J_y y J_z como los momentos inerciales a lo largo de los ejes x, y y z , mientras que τ_ϕ, τ_θ y $\tau_\psi \in \mathbb{R}$ representan los momentos de *roll*, de *pitch* y de *yaw*, respectivamente; el término $u_m := u_z/m$, con $u_z \in \mathbb{R}$ representando el empuje principal y $m \in \mathbb{R}_+$ la masa del *Quad-Rotor*. Los términos $\Lambda_\xi := \text{diag}(a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\Lambda_\eta := \text{diag}(a_\phi/J_x, a_\theta/J_y, a_\psi/J_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\Xi := \text{diag}(b_\phi, b_\theta, b_\psi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ están dados por los coeficientes de arrastre aerodinámicos a_x, a_y y a_z , los coeficientes de resistencia al momento angular a_ϕ, a_θ y a_ψ , y los coeficientes inerciales $b_\phi := (J_y - J_z)/J_x$, $b_\theta := (J_z - J_x)/J_y$ y $b_\psi := (J_x - J_y)/J_z$. Las funciones $g_\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $w_\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ están dadas como $g_\xi(\eta_1) := (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi, c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi, c\phi c\theta)^T$ y $w_\eta(\eta_2) := (\dot{\theta}\dot{\psi}, \dot{\phi}\dot{\psi}, \dot{\phi}\dot{\theta})^T$.

La relación entre las señales de control $u_z, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$ y los empujes T_i , generados por el i -ésimo rotor, está dada por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_z \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & L & -L \\ L & -L & 0 & 0 \\ K_\tau & K_\tau & -K_\tau & -K_\tau \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}}_T, \quad (2)$$

donde u representa el vector de entradas de control, T el vector de empujes y M la matriz que relaciona las señales de control con los empujes. La constante L representa la distancia entre los motores y el centro de masa del *Quad-Rotor*, mientras que K_τ representa el factor de empuje.

Así como en Dydek et al. (2013), Song et al. (2019) y Avram et al. (2017), las fallas en los actuadores son representadas por LOEs en los rotores. Por ejemplo, un daño en la hélice o un cambio en los parámetros físicos del rotor, daría lugar a una LOE en el rotor.

En presencia de fallas, el empuje actual de los rotores \bar{T} satisface la siguiente igualdad

$$\bar{T}(t) = (I_4 - \Gamma(t))T(t) = T(t) - f(t), \quad (3)$$

donde $\Gamma(t) := \text{diag}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t)) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es la matriz de LOE y $f = \Gamma(t)T(t) := (f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t))^T \in \mathbb{R}^4$ corresponde al vector de fallas. $\gamma_i(t) \in (0, 1)$ representa una LOE en el i -ésimo rotor, $\gamma_i(t) = 0$ indica un rotor en estado nominal, mientras que $\gamma_i(t) = 1$ indica un rotor totalmente dañado. Note que el empuje actual \bar{T} no es medible y por lo tanto es desconocido.

El objetivo es diseñar un FAC que permita el seguimiento de trayectorias en un *Quad-Rotor*, en presencia de LOEs en los rotores y perturbaciones externas. Se desea proporcionar una estrategia que sea independiente al lazo de control con el fin de implementarlo en un controlador nominal robusto.

Se introducen las siguientes suposiciones.

Suposición 1. Las perturbaciones están uniformemente acotadas y son Lipschitz, i.e., $d_x \in \mathcal{L}_{D_1}$, $d_y \in \mathcal{L}_{D_2}$, $d_z \in \mathcal{L}_{D_3}$, $d_\phi \in \mathcal{L}_{D_4}$, $d_\theta \in \mathcal{L}_{D_5}$, $d_\psi \in \mathcal{L}_{D_6}$, $\dot{d}_x \in \mathcal{L}_{\bar{D}_1}$, $\dot{d}_y \in \mathcal{L}_{\bar{D}_2}$, $\dot{d}_z \in \mathcal{L}_{\bar{D}_3}$, $\dot{d}_\phi \in \mathcal{L}_{\bar{D}_4}$, $\dot{d}_\theta \in \mathcal{L}_{\bar{D}_5}$, $\dot{d}_\psi \in \mathcal{L}_{\bar{D}_6}$; con constantes conocidas y positivas D_j y \bar{D}_j , con $j = \overline{1,6}$.

Suposición 2. Las fallas están uniformemente acotadas y son Lipschitz, i.e., $f \in \mathcal{L}_F$, $\dot{f} \in \mathcal{L}_{\bar{F}}$, con constantes conocidas y positivas F y \bar{F} .

Las suposiciones 1 y 2 caracterizan la clase de perturbaciones externas y fallas con las que el controlador propuesto puede lidiar. Sin embargo, vale la pena mencionar que las perturbaciones externas, como las ráfagas de viento, son generalmente modeladas como señales sinusoidales las cuales están claramente acotadas y son Lipschitz.

3. ESQUEMA DE IDENTIFICACIÓN DE FALLAS

Defina $\chi_1 := (z, \phi, \theta, \psi)^T \in \mathbb{R}^4$ y $\chi_2 := (\dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T \in \mathbb{R}^4$. Entonces, considerando (2) y (3), la dinámica de χ_1 y χ_2 está dada como

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2, \quad (4a)$$

$$\dot{\chi}_2 = \zeta(\chi_1) M (I_4 - \Gamma(t)) T(t) + \varphi(\chi_2) + d(t), \quad (4b)$$

donde $\zeta(\chi_1) := \text{diag}(c\phi c\theta/m, J_x^{-1}, J_y^{-1}, J_z^{-1}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $\varphi(\chi_2) := (-a_z \dot{z} - g, (\Xi w_\eta(\eta_2) - \Lambda_\eta \eta_2)^T)^T \in \mathbb{R}^4$ y el vector de perturbaciones externas $d := (d_z, d_\eta^T)^T \in \mathbb{R}^4$.

Note que la incertidumbre total en el sistema está dada por

$$\Delta(t) = d(t) - \zeta(\chi_1) M f(t).$$

Debido a las Suposiciones 1 y 2, la incertidumbre total está acotada y es Lipschitz, i.e., $\Delta \in \mathcal{L}_\delta$ y $\dot{\Delta} \in \mathcal{L}_{\bar{\delta}}$ con constantes conocidas δ y $\bar{\delta}$, respectivamente.

3.1 Observador por Modos Deslizantes en Tiempo Finito

Para la generación de las señales residuales, se propone un FT-SMO. Para este propósito, se introduce la siguiente suposición.

Suposición 3. El término $\varphi(\chi_2)$ es Lipschitz, i.e. $\|\varphi(\chi_2) - \varphi(\hat{\chi}_2)\| \leq L_\varphi \|\chi_2 - \hat{\chi}_2\|$, para cualquier χ_2 y $\hat{\chi}_2$.

La suposición anterior se cumple siempre y cuando el *Quad-Rotor* no realice maniobras agresivas.

El FT-SMO está dado por

$$\dot{\hat{\chi}}_1 = \hat{\chi}_2 + L_1 \varphi_1(e_\chi), \quad (5a)$$

$$\dot{\hat{\chi}}_2 = \zeta(\chi_1) M T + \varphi(\hat{\chi}_2) + \hat{\chi}_3 + L_2 \varphi_2(e_\chi), \quad (5b)$$

$$\dot{\hat{\chi}}_3 = L_3 \varphi_3(e_\chi), \quad (5c)$$

donde $e_\chi := \chi_1 - \hat{\chi}_1 \in \mathbb{R}^4$ es el error de estimación de salida, las inyecciones de salida no lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

están dadas por $\varphi_1(e_\chi) := [e_\chi]_z^{\frac{2}{3}}$, $\varphi_2(e_\chi) := [e_\chi]_\phi^{\frac{1}{3}}$ y $\varphi_3(e_\chi) := [e_\chi]_\theta^0$, y matrices $L_j = \text{diag}(\ell_{i1}, \ell_{i2}, \ell_{i3}, \ell_{i4}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, con $i = \overline{1,3}$.

Se define el error de estimación como $e := (e_\chi, \varepsilon_\chi) \in \mathbb{R}^8$, donde $\varepsilon_\chi := \chi_2 - \hat{\chi}_2 \in \mathbb{R}^4$ es el error de estimación de las velocidades. El siguiente teorema describe las propiedades de convergencia en tiempo-finito del FT-SMO.

Teorema 1. (Levant (2003)) Aplique el observador (5) al sistema (4), asuma que las Suposiciones 1, 2 y 3 se cumplen, y suponga que los parámetros del observador son seleccionados como $L_1 = 2\bar{\delta}^{\frac{1}{3}} I_4$, $L_2 = 1.5\bar{\delta}^{\frac{1}{2}} I_4$ y $L_3 = 1.1\bar{\delta} I_4$; entonces, $e = 0$ es Uniformemente Estable en Tiempo Finito (UFTS, por sus siglas en inglés).

Observación 1. Considere la ocurrencia de una falla en un tiempo $t_f > T_o > 0$, donde T_o es el tiempo de convergencia del observador sin falla. Entonces, dado el diseño del observador y debido a la naturaleza de las fallas, el observador convergerá nuevamente en un tiempo $T_1 > t_f > T_0$.

Defina $\epsilon_\chi(t) := \Delta(t) - \hat{\chi}_3(t) \in \mathbb{R}^4$. Entonces, la dinámica correspondiente es $\dot{\epsilon}_\chi = \dot{\Delta}(t) - L_3 \varphi_3(e_\chi)$. De acuerdo al Teorema 1, se tiene que $\hat{\chi}_1(t) = \chi_1(t)$, $\hat{\chi}_2(t) = \chi_2(t)$ y $\hat{\chi}_3(t) = \Delta(t)$, para todo $t \geq T_1$. Por lo tanto, si las Suposiciones 1, 2 y 3 se cumplen, entonces el FT-SMO (5) proporciona los siguiente residuos para todo $t \geq T_1$

$$\hat{\chi}_3(t) = (\hat{\chi}_z(t), \hat{\chi}_\phi(t), \hat{\chi}_\theta(t), \hat{\chi}_\psi(t))^T = \Delta(t). \quad (6)$$

3.2 Módulo de Identificación de Fallas

Para el acomodo de fallas es necesaria una identificación para compensar parcialmente el efecto de estas. Debido a la Suposición 1 y a las propiedades de estimación del FT-SMO, se puede suponer que

$$\underline{d}_z \leq d_z(t), \quad \forall t \geq 0,$$

$$\underline{d}_\phi \leq d_\phi(t) \leq \bar{d}_\phi, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\underline{d}_\theta \leq d_\theta(t) \leq \bar{d}_\theta, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\underline{d}_\psi \leq d_\psi(t) \leq \bar{d}_\psi, \quad \forall t \geq 0,$$

donde las constantes $\underline{d}_z, \underline{d}_\phi, \bar{d}_\phi, \underline{d}_\theta, \bar{d}_\theta, \underline{d}_\psi, \bar{d}_\psi \in \mathbb{R}$ son conocidas. Estas constantes se pueden obtener por medio de pruebas experimentales libres de fallas. Se introducen las variables

$$\sigma_z(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\hat{\chi}_z\|_\infty \leq D_3, \\ \underline{d}_z, & \text{si } \|\hat{\chi}_z\|_\infty > D_3, \end{cases} \quad (7a)$$

$$\sigma_\phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\hat{\chi}_\phi\|_\infty \leq D_4, \\ \bar{d}_\phi, & \text{si } \|\hat{\chi}_\phi\|_\infty > D_4 \wedge \hat{\chi}_\phi(t) > 0, \\ \underline{d}_\phi, & \text{si } \|\hat{\chi}_\phi\|_\infty > D_4 \wedge \hat{\chi}_\phi(t) < 0, \end{cases} \quad (7b)$$

$$\sigma_\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\hat{\chi}_\theta\|_\infty \leq D_5, \\ \bar{d}_\theta, & \text{si } \|\hat{\chi}_\theta\|_\infty > D_5 \wedge \hat{\chi}_\theta(t) > 0, \\ \underline{d}_\theta, & \text{si } \|\hat{\chi}_\theta\|_\infty > D_5 \wedge \hat{\chi}_\theta(t) < 0, \end{cases} \quad (7c)$$

$$\sigma_\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\hat{\chi}_\psi\|_\infty \leq D_6, \\ \bar{d}_\psi, & \text{si } \|\hat{\chi}_\psi\|_\infty > D_6 \wedge \hat{\chi}_\psi(t) > 0, \\ \underline{d}_\psi, & \text{si } \|\hat{\chi}_\psi\|_\infty > D_6 \wedge \hat{\chi}_\psi(t) < 0. \end{cases} \quad (7d)$$

Las funciones dadas en (7) proporcionan una aproximación de las perturbaciones externas tomando en cuenta el

signo y la magnitud de las señales residuales. La siguiente proposición establece el módulo de identificación de fallas.

Proposición 1. *Asuma que las Suposiciones 1, 2 y 3 se cumplen. Entonces, la identificación del vector de fallas está dada por*

$$\hat{f}(t) = \mathcal{A}(t)M^{-1}\zeta^{-1}(\chi_1)(\sigma(t) - \hat{\chi}_3(t)). \quad (8)$$

con $\sigma(t) := (\sigma_z(t), \sigma_\phi(t), \sigma_\theta(t), \sigma_\psi(t))^T \in \mathbb{R}^4$, y donde los errores de identificación satisfacen

$$Q_1(\chi_1) \left[\|I_\theta D\| - \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \right\| \right] \leq \|\tilde{f}_1\|_{f_1} \leq Q_1(\chi_1) \|I_\theta D\|, \quad (9a)$$

$$Q_2(\chi_1) \left[\|I_\theta D\| - \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \right\| \right] \leq \|\tilde{f}_2\|_{f_2} \leq Q_2(\chi_1) \|I_\theta D\|, \quad (9b)$$

$$Q_3(\chi_1) \left[\|I_\phi D\| - \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \right\| \right] \leq \|\tilde{f}_3\|_{f_3} \leq Q_3(\chi_1) \|I_\phi D\|, \quad (9c)$$

$$Q_4(\chi_1) \left[\|I_\phi D\| - \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \right\| \right] \leq \|\tilde{f}_4\|_{f_4} \leq Q_4(\chi_1) \|I_\phi D\|. \quad (9d)$$

donde $\tilde{f}_i = f_i - \hat{f}_i$, con $i = \overline{1, 4}$, $D := (D_3, D_4, D_5, D_6)^T$, $Q_1(\eta_1) = \|I_\theta M^{-1}\zeta^{-1}(\eta_1)\|_{f_1}$, $Q_2(\eta_1) = \|I_\theta M^{-1}\zeta^{-1}(\eta_1)\|_{f_2}$, $Q_3(\eta_1) = \|I_\phi M^{-1}\zeta^{-1}(\eta_1)\|_{f_3}$ y $Q_4(\eta_1) = \|I_\phi M^{-1}\zeta^{-1}(\eta_1)\|_{f_4}$ con $I_\theta := \text{diag}(1, 0, 1, 1)$ y $I_\phi := \text{diag}(1, 1, 0, 1)$.

Observación 2. *Debido al efecto de las perturbaciones externas no es posible dar una identificación exacta de la falla.*

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR POR ACOMODO DE FALLAS

El acomodo de fallas compensa parcialmente el efecto de la falla utilizando (8), *i.e.*,

$$T(t) = M^{-1}u(t) + f(t), \quad (10)$$

donde u es el vector de entradas de control nominales. Por lo tanto, el empuje actual de los rotores, dado en (3), se reescribe como $\bar{T}(t) = T(t) - \tilde{f}(t)$.

Observación 3. *El FAC propuesto permite el uso de controladores robustos nominales que se encarguen de las perturbaciones externas en el caso libre de fallas. Por lo tanto, puede aplicarse en cualquier controlador robusto previamente diseñado, aumentando su tolerancia a fallas.*

Con el fin de implementar la estrategia por acomodo de fallas, se diseña un controlador nominal robusto.

4.1 Diseño del Controlador Nominal Robusto

Se propone un controlador nominal robusto basado en una combinación entre controladores PID (para el subsistema de posición) y HOSMCs (para el subsistema de orientación) (Ríos et al. (2019)).

Definiendo los errores de seguimiento como

$$e_\xi := (e_x, e_y, e_z)^T = \xi_1 - \xi_d,$$

$$\varepsilon_\xi := (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^T = \xi_2 - \dot{\xi}_d,$$

$$e_\eta := (e_\phi, e_\theta, e_\psi)^T = \eta_1 - \eta_d,$$

$$\varepsilon_\eta := (\varepsilon_\phi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\psi)^T = \eta_2 - \dot{\eta}_d,$$

donde $\xi_d := (x_d, y_d, z_d)^T \in \mathbb{R}^3$ y $\eta_d := (\phi_\star, \theta_\star, \psi_d)^T \in \mathbb{R}^3$ son los vectores de posición y orientación deseadas, respectivamente; con ϕ_\star y θ_\star como señales de referencia que son diseñadas como

$$u = m\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + (\nu_z + g)^2}, \quad (11a)$$

$$\phi_\star = \arcsin[u_m^{-1}(\nu_x s\psi_d - \nu_y c\psi_d)], \quad (11b)$$

$$\theta_\star = \arctan[(\nu_z + g)^{-1}(\nu_x c\psi_d + \nu_y s\psi_d)]. \quad (11c)$$

donde el control virtual $\nu := (\nu_x, \nu_y, \nu_z)^T$ y el vector de momentos angulares τ son diseñados como

$$\nu_\star = \bar{\nu} + \Lambda_\xi \xi_2 + \ddot{\xi}_d, \quad (12a)$$

$$\tau_\star = J^{-1}(\bar{\tau} - \Xi w_\eta(\eta_2) + \Lambda_\eta \eta_2 + \ddot{\eta}_d), \quad (12b)$$

El control $\bar{\nu}$ es diseñado con un controlador PID, *i.e.*,

$$\bar{\nu} = K_{i\xi} \bar{e}_\xi + K_{p\xi} e_\xi + K_{d\xi} \dot{e}_\xi, \quad (13)$$

donde $K_{i\xi} = \text{diag}(k_{x1}, k_{y1}, k_{z1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $K_{p\xi} = \text{diag}(k_{x2}, k_{y2}, k_{z2}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $K_{d\xi} = \text{diag}(k_{x3}, k_{y3}, k_{z3}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\bar{e}_\xi := (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)^T \in \mathbb{R}^3$ con $\bar{e}_x := \int_0^t e_x(\tau) d\tau$, $\bar{e}_y := \int_0^t e_y(\tau) d\tau$ y $\bar{e}_z := \int_0^t e_z(\tau) d\tau$. Por otro lado, cada término de $\bar{\tau} := (\bar{\tau}_\phi, \bar{\tau}_\theta, \bar{\tau}_\psi) \in \mathbb{R}^3$ es diseñado por el Controlador Twisting Continuo (CTC, por sus siglas en inglés), *i.e.*,

$$\bar{\tau}_j = v_j - k_{j1}[e_j]^{\frac{1}{3}} - k_{j2}[\varepsilon_j]^{\frac{1}{2}} \quad (14a)$$

$$\dot{v}_j = -k_{j3}[e_j]^0 - k_{j4}[\varepsilon_j]^0, \quad \forall j = \phi, \theta, \psi \quad (14b)$$

donde una posible selección de ganancias está dada por Torres-González et al. (2017) como $k_{j1} = 25\zeta^{\frac{2}{3}}$, $k_{j2} = 15\zeta^{\frac{1}{2}}$, $k_{j3} = 2.3\zeta$ y $k_{j4} = 1.1\zeta$ con cualquier $\zeta > 0$. El controlador nominal robusto propuesto tiene una tolerancia a fallas pasiva debido a sus propiedades robustas (Ríos et al. (2019)).

Entonces, considerando el acomodo de fallas (10), las entradas de control están dadas como

$$\nu = \nu_\star + \frac{g_\xi(\eta_1)}{m} \sum_{i=1}^4 \hat{f}_i(t) \quad (15a)$$

$$\tau = \tau_\star + I_\eta M \hat{f}(t), \quad (15b)$$

donde $I_\eta := (0_{3 \times 1}, I_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. Entonces, se establece el siguiente resultado.

Teorema 2. *Asuma que las Suposiciones 1, 2 y 3 se cumplen. Diseñando los controladores como (12)-(14), considerando el acomodo de fallas (15), y aplicándolos al sistema (1); entonces, la dinámica del error de posición (e_ξ, ε_ξ) es Entrada Estado Estable con respecto a d_ξ y \tilde{f} ; mientras que la dinámica del error de orientación $(e_\eta, \varepsilon_\eta) = 0$ es UFTS.*

Para resumir, la estrategia propuesta permite el seguimiento de trayectorias de un *Quad-Rotor* bajo los efectos de perturbaciones externas y LOEs en los rotores. Un diagrama de flujo del FAC propuesto se muestra en la Fig. 2.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Para mostrar el desempeño de la estrategia propuesta se presentan simulaciones numéricas usando MATLAB

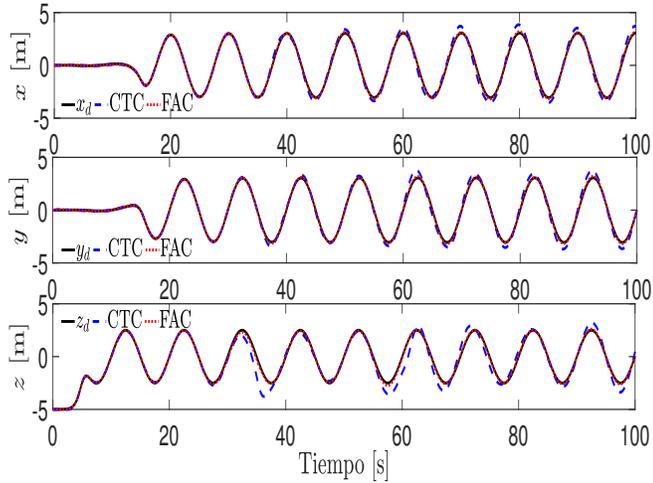


Figura 2. Trayectorias del *Quad-Rotor*. Posición.

Simulink. Para esto, se muestra una comparación entre el controlador nominal robusto, dado por el CTC, y el FAC propuesto. Ambos controladores están sujetos ante las mismas perturbaciones externas, fallas y ganancias. Los parámetros del *Quad-Rotor* son tomados del prototipo de Quanser QBall2 dados por: $m = 1.78[\text{kg}]$, $g = 9.81[\text{m/s}^2]$, $J_x = J_y = 0.03[\text{Ns}^2/\text{rad}]$, $J_z = 0.04[\text{Ns}^2/\text{rad}]$, $a_x = a_y = a_z = 0.01[\text{Ns/m}]$, $a_\phi = a_\theta = a_\psi = 0.3[\text{Ns/rad}]$, $L = 0.2[\text{m}]$ y $[K_\tau = 0.0057\text{Nm/rad}^2]$.

La trayectoria deseada está dada por

$$\begin{aligned} x_d(t) &= (\arctan(15) + \arctan(t - 15)) \cos(\pi t/5), \\ y_d(t) &= (\arctan(15) + \arctan(t - 15)) \sin(\pi t/5), \\ z_d(t) &= (0.5 + 0.25 \sin(\pi t/5))(1 + \tanh(t - 5)), \\ \psi_d(t) &= \sin(\pi t/5), \end{aligned}$$

y las perturbaciones externas están dadas como

$$\begin{aligned} d_x(t) &= 0.3 \sin(\omega_1 t), & d_y(t) &= 0.3 \cos(\omega_1 t), \\ d_z(t) &= -0.5 + 0.1(\sin(\omega_1 t) - \sin(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t)), \\ d_\phi(t) &= -0.5 + 0.2(\sin(\omega_1 t) - \sin(\omega_2 t) + \cos(\omega_2 t)), \\ d_\theta(t) &= -0.5 + 0.2(\cos(\omega_3 t) - \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_3 t)), \\ d_\psi(t) &= -0.5 + 0.2(\cos(\omega_3 t) - \sin(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t)), \end{aligned}$$

con $\omega_1 = 0.4[\text{rad/s}]$, $\omega_2 = 0.6[\text{rad/s}]$ y $\omega_3 = 0.8[\text{rad/s}]$.

Las fallas, dadas por LOEs en los rotores, son introducidas como

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 25, \\ 0.8, & \forall t \geq 25, \end{cases} \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 50, \\ 0.8, & \forall t \geq 50, \end{cases}$$

mientras que los rotores 3 y 4 están libres de fallas; las condiciones iniciales están dadas como $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0 = \eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$, y las simulaciones son implementadas utilizando el método de integración de Euler con un paso de muestreo de $0.001[\text{s}]$.

La tarea de seguimiento, en el plano tridimensional y en el ángulo de *yaw*, son ilustradas en la Fig. 2 y 3, respectivamente, donde, a pesar del efecto de las fallas, ambos controladores logran el cumplimiento de la tarea. Sin embargo, haciendo uso del FAC en el controlador nominal robusto, el desempeño del seguimiento de trayectorias es mejorado notablemente.

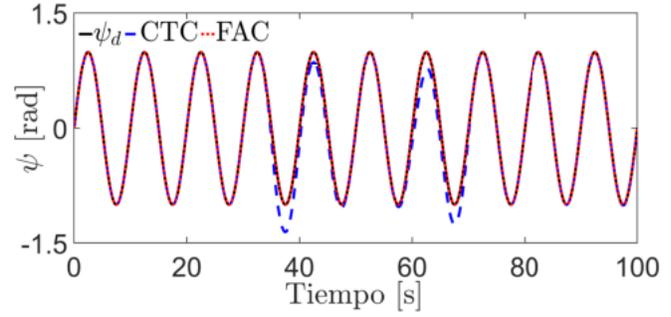


Figura 3. Trayectorias del *Quad-Rotor*. Ángulo de *yaw*.

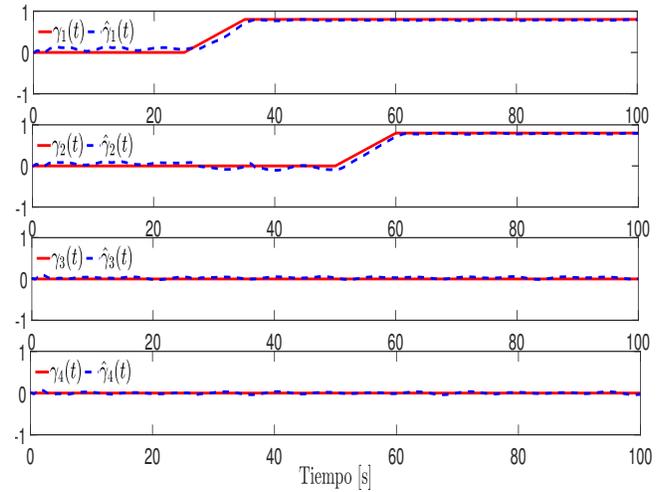


Figura 4. Identificación de las fallas.

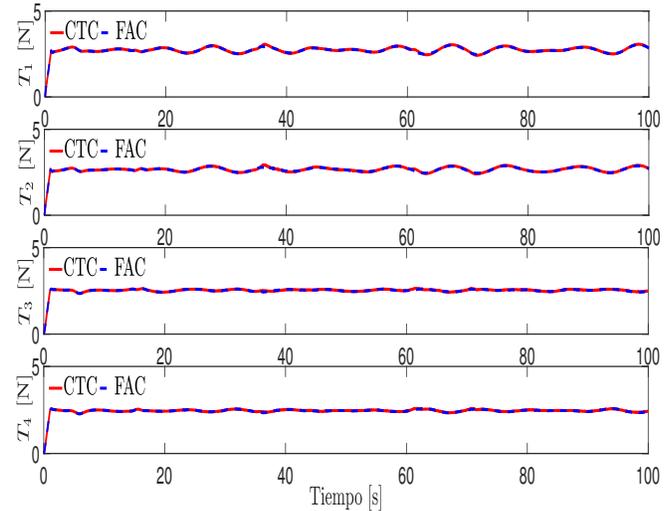


Figura 5. Empuje de los rotores.

Para obtener la identificación de la i -ésima LOE, se usa la relación $\hat{\gamma}_i(t) = \hat{f}_i(t)/T_i(t)$. La identificación de la falla en cada rotor es mostrada en la Fig. 4. En ausencia de fallas, la identificación de fallas permanece en valores cercanos a cero, esto debido al efecto de las perturbaciones. Una vez ocurrida la falla, el módulo de identificación aproxima el la magnitud de cada falla. Por otro lado, el empuje generado por cada rotor es mostrado en la Fig. 5, donde el esfuerzo de control en ambos esquemas es similar. Con

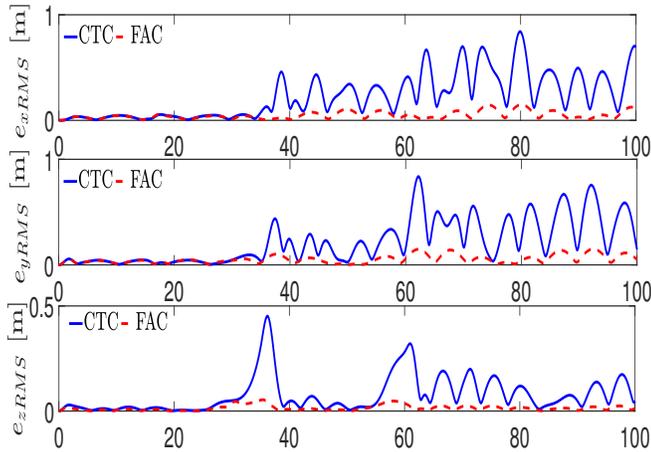


Figura 6. Índices del error de posición.

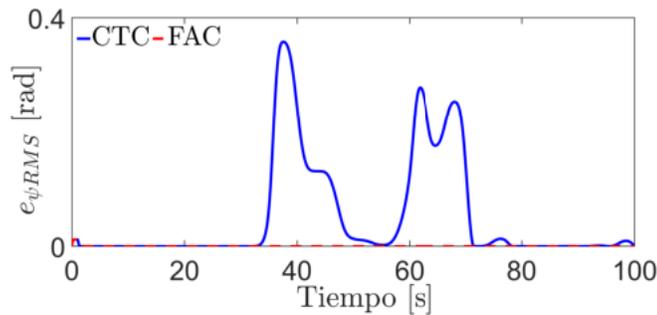


Figura 7. Índice del error del ángulo de *yaw*.

el fin de ilustrar mejor el desempeño de los controladores, el siguiente índice de desempeño es propuesto

$$e_{RMS}(t) = \left(\frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T}^T \|e(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad (16)$$

donde $e_{RMS} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ representa el valor cuadrático medio de la función $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Los índices de desempeño para las coordenadas de posición y del ángulo de *yaw*, con $\Delta T = 1$, son ilustrados en las Figs. 6 y 7, respectivamente. Note que usando el mismo controlador, con las mismas ganancias, y ante las mismas fallas y perturbaciones externas, el controlador por acomodo de fallas mejora el desempeño en cada coordenada. Particularmente, en el caso del ángulo de *yaw* el desempeño del seguimiento permanece prácticamente en cero.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se diseña un controlador por acomodo de fallas para el seguimiento de trayectoria en un *Quad-Rotor* bajo los efectos de múltiples fallas y perturbaciones externas. Las fallas consideradas están dadas por LOEs en los rotores. Dicha estrategia se compone de un módulo de identificación de fallas y un controlador nominal robusto. El módulo de identificación de fallas se basa en un FT-SMO que proporciona un conjunto de señales residuales. El FAC propuesto utiliza la identificación de fallas para compensar parcialmente el efecto de las fallas. Esta estrategia se aplica en un controlador nominal robusto, basado

en una combinación de controladores PID y CTCs. El FAC propuesto asegura la convergencia de tiempo finito a cero del error de orientación, y una convergencia exponencial a una vecindad del error de posición. Las simulaciones numéricas muestran el incremento de la tolerancia a fallas en un controlador nominal robusto aplicando este método.

REFERENCIAS

- Avram, R.C., Zhang, X., and Muse, J. (2017). Quadrotor actuator fault diagnosis and accommodation using nonlinear adaptive estimators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(6), 2219–2226.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., and Staroswiecki, M. (2003). *Diagnosis and fault tolerant control*. Springer, New York.
- Chandra, K.P.B., Alwi, H., and Edwards, C. (2015). Fault reconstruction for a quadrotor using an lpv sliding mode observer1. *IFAC-PapersOnLine*, 48(21), 374–379.
- Dydek, Z., Annaswamy, A., and Lavretsky, E. (2013). Adaptive control of quadrotor UAVs: A design trade study with flight evaluations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(4), 1400–1406.
- García-Carrillo, L.R., Dzul-López, A., Lozano, R., and Pégard, C. (2013). *Quad Rotorcraft Control*. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag London Heidelberg New York Dordrecht, London.
- Levant, A. (2003). High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), 924–941.
- Nian, X., Chen, W., Chu, X., and Xu, Z. (2020). Robust adaptive fault estimation and fault tolerant control for quadrotor attitude systems. *International Journal of Control*, 93(3), 725–737.
- Ríos, H., Falcón, R., González, O., and Dzul, A. (2019). Continuous sliding-modes control strategies for quadrotor robust tracking: Real-time application. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66, 1264–1272.
- Song, Y., He, L., Zhang, D., Qian, J., and Fu, J. (2019). Neuroadaptive fault-tolerant control of quadrotor uavs: A more affordable solution. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 30(7), 1975–1983.
- Torres-González, V., Sanchez, T., Fridman, L.M., and Moreno, J.A. (2017). Design of continuous twisting algorithm. *Automatica*, 80, 119–126.
- Wang, B. and Zhang, Y. (2018). An adaptive fault-tolerant sliding mode control allocation scheme for multirotor helicopter subject to simultaneous actuator faults. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(5), 4227–4236.
- Wang, B., Shen, Y., and Zhang, Y. (2020). Active fault-tolerant control for a quadrotor helicopter against actuator faults and model uncertainties. *Aerospace Science and Technology*, 99, 105745.
- Wang, X., Sun, S., van Kampen, E.J., and Chu, Q. (2019). Quadrotor fault tolerant incremental sliding mode control driven by sliding mode disturbance observers. *Aerospace Science and Technology*, 87, 417–430.