

# Knot polynomial as a tool for fault detection

Daniel Enrique Rivas-Cisneros\* David. A. Diaz-Romero\*\*  
Efrain Alcorta Garcia\*\*\*

\* Universidad Autónoma de Nuevo León,  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,  
(e-mail: daniel.rivascs@uanl.edu.mx).

\*\* (e-mail: david.diazrr@uanl.edu.mx).

\*\*\* (e-mail: efrain.alcortagr@uanl.edu.mx).

---

## Abstract

The present work proposes a novel methodology for failure analysis using knot theory. In this particular case a LC circuit of order four is studied, where the current and voltage signals are analyzed by means of the above mentioned method, and where a topological invariant is obtained under normal conditions. This procedure is also performed when a fault occurs in the dielectric of the capacitors. As a result, it is shown how the changes in the dielectric are manifested and associated to a certain topological invariant. This provides justification for this case based on topological invariants. An advantage of the proposed approach is that no equations describing the system are required to be implemented.

## Keywords:

Fault detection, Knot theory, Topological invariants, Knot polynomial, Dynamical Systems.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la literatura, la teoría de circuitos empezó con las leyes de Kirchhoff en donde se exponen las condiciones de equilibrio de corriente y voltaje que pueden existir en el circuito. Otros pioneros en esta rama fueron: Ampère, Ohm, Faraday, entre otros. El análisis formal o matemático en circuitos fue gracias a Maxwell, quien introdujo las ecuaciones de nodos y mallas para describir los circuitos como ecuaciones lineales. Hasta el siglo XX fue cuando se da una forma distinta de analizar los circuitos, se propone el uso de números complejos y función de transferencia para representar el voltaje y la corriente. Los circuitos eléctricos y electrónicos son una parte fundamental en procesos industriales.

El incremento en la confiabilidad y calidad del producto final de los procesos industriales hace que sea inevitable el asentamiento de metodologías y procedimientos que ayuden al cumplimiento del producto final. Las herramientas del control automático y diagnóstico de fallas pueden servir para estos propósitos. Existe una amplia literatura referente al diagnóstico de fallas en sistemas dinámicos [Chen and Patton (1999), Isermann (2006), Ding (2013), Ding (2014)].

El gran desarrollo tecnológico que se ha presentado en los últimos años ha incrementado la complejidad en los procesos industriales. En algunas situaciones, se hace

complicado el disponer de modelos del proceso en forma de ecuaciones diferenciales. Los cuales por tiempo o complejidad del proceso pudieran no ser una alternativa. Existen muchos procedimientos que permiten diagnosticar sistemas (principalmente estáticos) utilizando el concepto de Análisis de Componente Principal (PCA por sus siglas en inglés) y sus variantes [Chiang et al. (2001)]. Un conjunto de herramientas asociadas con aplicaciones para sistemas dinámicos es resumida en [Ding (2014)]. Sin embargo, las técnicas hacen uso indirecto del modelo (bajo supuestos de linealidad).

La teoría de nudos es la rama de la topología que estudia el comportamiento de estructuras tridimensionales sin intersecciones y sus invariantes [Adams (1994)]. El análisis topológico de trayectorias tridimensionales mediante teoría de nudos es relativamente nuevo, a finales de los años 60 fue cuando se introduce la teoría de nudos al análisis de sistemas dinámicos y en 1976 fue cuando R.F. Williams proporciona los conceptos de teoría de nudos para analizar la complejidad topológica de las trayectorias del atractor de Lorenz [Ghrist (2011)]. Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, la teoría de nudos es la rama de la topología que se encarga de estudiar trayectorias tridimensionales anudadas. Esta teoría pretende diferenciar un sistema anudado de otro, esto quiere decir que esta herramienta hace posible saber si dos trayectorias en  $R^3$  tienen la misma estructura topológica.

El presente trabajo es una extensión de [Diaz (2019)]. En este trabajo se analiza un circuito LC de cuarto orden utilizando teoría de nudos y mediante las señales de corriente y voltaje de los inductores y capacitores del circuito se obtiene un invariante topológico. De lo anterior, se hace un análisis con parámetros normales el cual no existe ninguna falla en el circuito y después, en el mismo circuito, se induce una falla de pérdida dieléctrica haciendo unos cambios de parámetros en las propiedades del capacitor que vienen en la librería de Matlab. Una ventaja es que no se utiliza un modelo matemático para determinar el invariante topológico. Pero el análisis debe realizarse fuera de línea.

El artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se da una introducción a los conceptos que forman la base de la propuesta de este trabajo. En la sección 3, se presentan los resultados del análisis del circuito LC de orden 4. Por último, las conclusiones y trabajo a futuro en la sección 4.

## 2. PRELIMINARES

En esta sección se introducen los conceptos fundamentales que son utilizados en este trabajo.

### 2.1 Teoría de nudos.

La teoría de nudos es la rama de la topología que estudia, entre otras cosas, trayectorias cerradas en  $R^3$ . Un *nudo*  $\langle K \rangle$  es un embebimiento  $f : S^1 \rightarrow R^3$  que no presenta intersecciones en su trayectoria cerrada [Adams (1994), Cromwell (2004)]. Por definición los nudos están definidos en  $R^3$ , sin embargo para analizar los nudos y realizar operaciones en ellos se utilizan imágenes en  $R^2$ . A esta imagen del nudo en  $R^2$  se le llama *proyección del nudo* [Adams (1994), Cromwell (2004)], esta proyección se representa como:

$$K : R^3 \longrightarrow R^2,$$

$$K(x, y, z) = K(x, y, 0).$$

En la Figura 1(a) se representa un nudo en  $R^3$  y en la Figura 1(b) la proyección del nudo.

El *número de cruces* ( $nc$ ) de un nudo es el mínimo número de cruces que ocurre en todas las posibles proyecciones de un nudo [Adams (1994), Cromwell (2004)]. La proyección de un nudo consiste de vértices  $V(K)$  y aristas  $E(K)$  [Kauffman (1991)]. En la Figura 2 se presenta la proyección del nudo trébol con sus aristas  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  y vértices  $V(G) = \{1, 2, 3\}$ . Cada vértice de la Figura 2 se le conoce como un punto de cruce en la proyección del nudo en  $R^2$ . Sea el vértice 1 un punto de cruce en  $R^2$ , el cual en la proyección se intersecan pero no se intersecan en  $R^3$ , ya que en  $R^3$  se tiene los puntos de cruce 1 y  $\hat{1}$  los cuales tienen las mismas coordenadas en  $x$  y  $y$  pero la coordenada en  $z$  es diferente; con esta información se sabe que no existe ninguna intersección

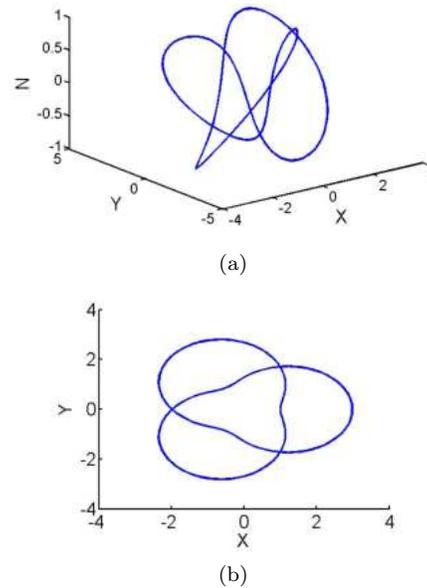


Figure 1. Representación de un nudo trébol. a) Nudo en  $R^3$ . b) Proyección del nudo en  $R^2$ .

en  $R^3$  y si es un punto de cruce por arriba o por abajo [Adams (1994)].

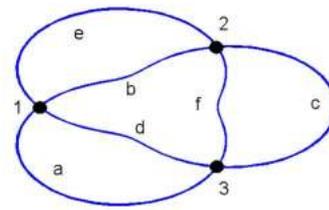


Figure 2. Proyección del nudo trébol con aristas  $E(K) = \{a, b, c, d, e, f\}$  y vértices  $V(K) = \{1, 2, 3\}$ . El nudo trébol posee 3 puntos de cruce.

### 2.2 Movimientos de Reidemeister

Los movimientos de Reidemeister ayudan a saber si existe una equivalencia topológica entre dos proyecciones de nudos diferentes. Dos nudos son equivalentes si hay una secuencia finita de movimientos de Reidemeister que nos lleven de una proyección de un nudo a una proyección del otro nudo [Adams (1994), Cromwell (2004)]. Los movimientos de Reidemeister son tres y se conocen como movimiento tipo I (agregar o remover un rizo), tipo II (agregar o remover dos cruces consecutivos por arriba o por abajo) y tipo III (movimiento triangular). En la Figura 3 se muestran los tres movimientos de Reidemeister.

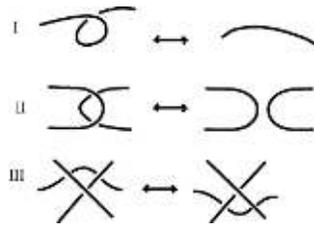


Figure 3. Movimientos de Reidemeister.

### 2.3 Invariantes polinomiales (invariante topológico)

Los movimientos de Reidemeister indica los pasos a seguir para saber si dos nudos son equivalentes, pero no determina cuantos movimientos son necesarios para realizarlo. Un avance significativo en esta dirección fue la introducción en 1928 del primer invariante polinomial, el cual fue el polinomio de Alexander. El *polinomio de un nudo* es un invariante que es el mismo para nudos equivalentes [Adams (1994), Cromwell (2004)]. Uno de los problemas fundamentales en teoría de nudos es saber si dos nudos que se visualizan diferentes son equivalentes. Basado en este problema, J.W. Alexander introdujo el primer invariante polinomial de nudos; desde la introducción del primer invariante polinomial una variedad de nuevos invariantes han sido desarrollados, tales como: el polinomio de Jones, el corchete de Kauffman, HOMFLY, entre otros [Adams (1994), Cromwell (2004), Kauffman (1991), Freyd et al. (1985)]. En este trabajo utilizaremos el *Polinomio de Alexander* el cual se define como:

**Definición 2.1.** *El polinomio de Alexander de un enlace o nudo orientado  $L$ , es el determinante  $\det(xM - x^{-1}M^T)$  donde  $M$  es cualquier matriz válida de superficie de Seifert para  $L$ . Es un polinomio de Laurent en  $Z[x^{\pm 1}]$  con coeficientes enteros y potencias positivas y negativas. Véase Cromwell (2004).*

El invariante topológico del nudo  $K$  se forma a partir de la información de los cruces que posee la trayectoria del sistema, [Adams (1994)].

### 2.4 Nudos y sistemas dinámicos

Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, un nudo se puede definir como una curva cerrada simple generada por una trayectoria tridimensional. Los nudos pueden ser generados por una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, por el conjunto de tres ecuaciones que representen a un sistema o por el conjunto de tres series de tiempo de un sistema [Ghrist (2011)]. Topológicamente, los nudos generados se pueden representar como una solución global de la trayectoria [Ghrist (2011)]. De acuerdo a la simplicidad o complejidad de la trayectoria tridimensional, R. Ghrist categoriza dos tipos de nudos [Ghrist (1998)]: nudos simples y nudos complicados. A esto también se le puede añadir, que mientras más complicada sea la trayectoria más complicado será identificar los nudos que se generan.

A continuación se presenta el sistema dinámico de Parris y Rassai [Parris (1977)], el cual dependiendo de las condiciones iniciales y el valor de los coeficientes  $m$  y  $n$ , posee trayectorias anudadas; generando así diferentes nudos.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -mx_2 + nx_1x_3 \\ \dot{x}_2 &= mx_1 + nx_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= \left(\frac{n}{2}\right)(1 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $m$  y  $n \in N$ .

Los nudos generados a partir del sistema 1 son tóricos, lo que significa que existen sobre una superficie toroidal. Con las condiciones iniciales:  $x_1(0) = -2.5$ ,  $x_2(0) = 2.5$ ,  $x_3(0) = 0.78$ . Con el valor de  $m = 2$  y  $n = 3$  genera el *nudo trébol* tal como se aprecia en la Figura 4(a); y el valor de  $m = 2$  y  $n = 5$  genera el *nudo  $5_1$*  le cual se muestra en la Figura 4(b).

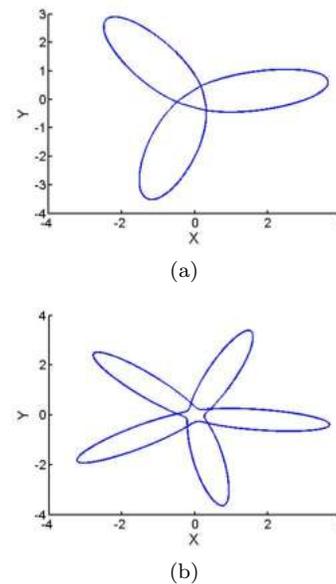


Figure 4. a) Nudo trébol. b) Nudo  $5_1$ .

### 2.5 Detección y aislamiento de fallas

La redundancia de información se utiliza para determinar si una falla se presenta en un sistema. Una forma de redundancia se logra mediante el duplicado y triplicado de elementos de medición, actuadores y en algunos casos de componentes de un sistema. La redundancia también puede ser analítica, cuando la información sobre las señales que se miden es obtenida mediante el uso de modelos.

Generalmente los modelos de un sistema se utiliza para estimar el valor de la salida. La diferencia entre la medición de la salida y la estimación sirve para construir una señal que dependa idealmente solo de la falla (en caso de que esta este presente), esta señal es denominada residuo, que

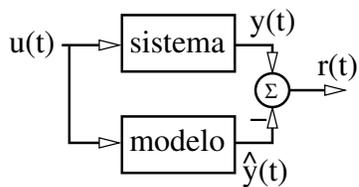


Figure 5. Esquema general para la detección de fallas

es cercana a cero en caso de que no haya fallas presentes en el sistema. Ver Figura 5.

Diferentes métodos dependen de los diferentes tipos de modelos que se pueden obtener. En ocasiones, en lugar de utilizar el modelo directamente se utiliza un observador (modelo más factor de corrección del error de estimación). En este caso se cuenta con un grado de libertad adicional en la selección de la ganancia del observador que puede servir para determinar el radio de convergencia del error de estimación a cero en ausencia de fallas. La ganancia del observador puede ser utilizada para discriminar entre fallas, para enfatizar el efecto de algunas sobre otras en el residuo, como puede ser apreciado en [Frank (1990); Alcorta Garcia and Frank (1999)]

La forma en la que la ganancia es seleccionada puede permitir en muchos casos no solo lograr la detección, sino también el aislamiento de fallas. Quedando solo un paso más para lograr el diagnóstico de fallas: mediante la identificación de la falla.

Una situación diferente se presenta cuando no se dispone inicialmente de modelos. En estos casos existe en la literatura una amplia gama de propuestas, como puede ser apreciado en [Ding (2014)]. En general los esquemas libres de modelo operan en dos pasos: con datos entrada-salida sin fallas se estima un modelo o bien un generador de residuos. Una vez que se dispone de este generador de residuos (o modelo) se utiliza en una segunda fase para realizar la detección y/o aislamiento de las fallas. Cabe mencionar que que estas técnicas presuponen un modelo en forma de ecuación en diferencias o bien diferencial.

Note que aun y cuando estos últimos métodos destacan que no necesitan de un modelo del sistema (al menos inicialmente), finalmente terminan infiriendo el modelo e implementandolo. Esto último resulta, sin embargo transparente para el usuario.

### 2.6 Capacitor

Un capacitor es un dispositivo que almacena carga eléctrica y es utilizado en diversas aplicaciones como filtros, osciladores, baterías, redes eléctricas, entre otras. Un capacitor está formado por dos conductores (laminas o placas) que transportan cargas entre sí. Estos conductores están separados por un material dieléctrico. La cantidad de carga que puede almacenar un capacitor depende del material dieléctrico. El tipo de material dieléctrico más común que se puede usar en los capacitores es la mica, el papel parafinado, la cerámica y plástico.

El capacitor puede presentar diversas fallas por diferentes motivos, aquí solo nos enfocaremos a una falla dieléctrica, la cual es, cuando el material dieléctrico por diversas causas se va degradando y esto repercute en el almacenamiento de carga del capacitor

### 3. CASO DE ESTUDIO: ANÁLISIS DE UN CIRCUITO LC DE ORDEN CUATRO.

Un circuito LC, el cual también se le conoce como un circuito resonante u oscilador, tiene una bobina y un capacitor conectados entre sí. Este circuito se escogió para el presente trabajo por la riqueza que tiene en las oscilaciones y en la frecuencia y así usar la teoría de nudos para el análisis de fallas.

Mediante teoría de nudos se hace un análisis de las trayectorias de voltaje y corriente del circuito en condiciones normales y al inducirse una falla dieléctrica en los capacitores, así obteniendo un invariante topológico para cada condición del circuito.

#### 3.1 Resultados

El circuito analizado se muestra en la Figura 6. En donde  $L1=0.5H$ ,  $C1= 1/6F$ ,  $L2= 12/5H$ ,  $C2= 5/18F$ . El circuito fue realizado y simulado en Simulink/Matlab, las señales que se utilizaron para obtener los resultados fue la corriente de  $L2$ , y los voltajes de  $C1$  y  $C2$ . Las señales obtenidas en condiciones normales se presentan en la Figura 7

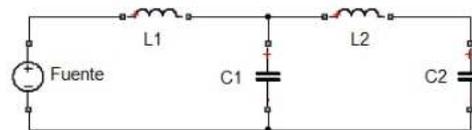


Figure 6. Circuito LC de orden 4.

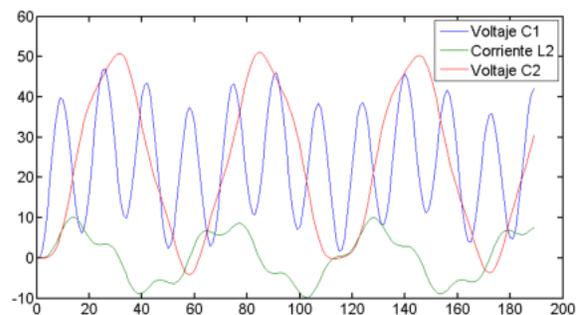


Figure 7. Señales Vs. tiempo.

La Figura 8 muestra la representación tridimensional de las señales de la Figura 7. Esta información tridimen-

Table 1. Resultados de falla dieléctrica en el capacitor 2 del circuito de la figura 6.

Valores de CP	Invariante arrojado
CP= 0.001	$t^2 - t + 1$ ( $3_1$ )
CP= 0.005	$t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$ ( $6_3$ )
CP= 0.01	$t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$ ( $6_3$ )
CP= 0.02	$t^2 - t + 1$ ( $3_1$ )

sional se introduce al programa *Kebap*<sup>1</sup> (el cual ayuda a obtener el invariante de Alexander de una trayectoria tridimensional) y el invariante arrojado en estas condiciones normales es  $2t^2 - 3t + 2$  el cual representa al nudo  $5_2$

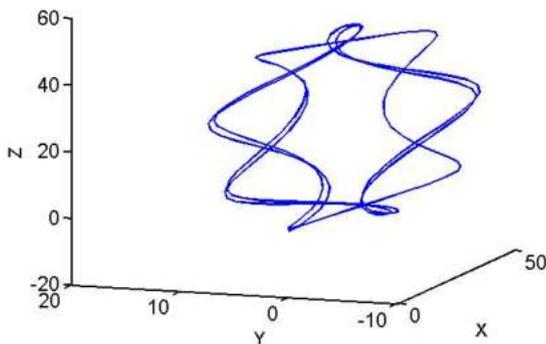


Figure 8. Representación tridimensional de la figura 7.

A continuación, presentamos los resultados obtenidos induciendo una falla dieléctrica en los capacitores del circuito de la Figura 6, de las propiedades del capacitor que se encuentra en el bloque de parámetros (Simulink/Matlab) se hace un cambio de valor en la conductancia paralela (CP), la cual ayuda a modelar pérdidas dieléctricas.

En el cuadro 1 mostramos los resultados obtenidos de ciertos valores de CP del capacitor 2 y los invariantes arrojados. En la Figura 9 se muestran las señales de L2, C1 y C2 con el valor de CP= 0.02 en el capacitor 2 y en la Figura 10 se muestra la representación tridimensional el cual arroja el invariante  $t^2 - t + 1$ . Se puede observar en la Figura 9 que hay unos cambios en la onda del Capacitor 2 lo cual implicó que arrojara un invariante diferente al de condiciones normales.

De los resultados arrojados se ve que para los distintos valores de CP se tuvo el invariante  $t^2 - t + 1$  y  $t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$ , y no fue distinto para cada valor, esto nos puede inferir que para este caso una falla en pérdida dieléctrica en el capacitor 2 solo vamos a tener estos invariantes y nos podría decir que el capacitor 2 está teniendo una falla.

<sup>1</sup> Paquete KEBAP, Software-Praktikums II group y Uni Hannover.

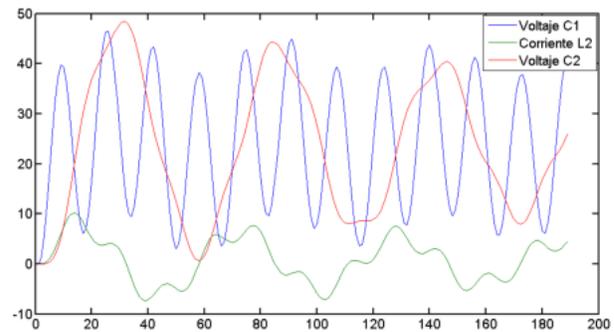


Figure 9. Señales Vs. tiempo.

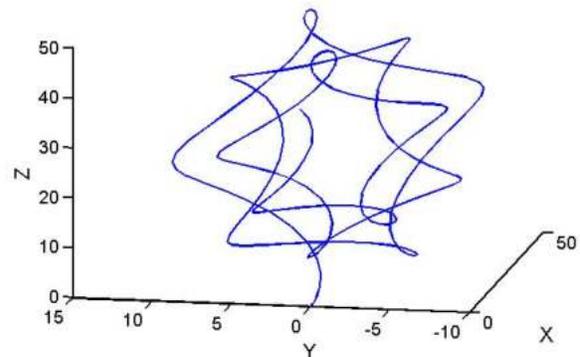


Figure 10. Representación tridimensional de la figura 9.

En el capacitor 1, al inducirlo a falla dieléctrica, el invariante arrojado fue el mismo que el de condiciones normales, en este caso no hubo diferencia en el invariante topológico en condición normal Vs. Falla en el capacitor 1. En las señales del circuito si hay un cambio en las ondas al inducir la falla en el capacitor 1 pero como se mencionó no hubo diferencia en el invariante topológico. Esto nos lleva a estudiar ciertas condiciones o consideraciones que mencionamos en la sección de trabajo a futuro para esta metodología propuesta.

#### 4. CONCLUSIÓN

El cambio de invariante topológico puede ser una herramienta alternativa a las ya existentes que nos ayude a detectar fallas de un sistema cuando no esté operando correctamente, tal como se presentó en el capacitor 2 del circuito analizado. Posiblemente no haya un cambio en el invariante topológico como en el caso del capacitor 1 y esto abre el panorama de estudio para saber en qué condiciones puede ser usada esta metodología propuesta.

##### 4.1 Trabajos futuros

Análisis de distintas configuraciones y casos prácticos que se puedan usar con esta metodología. Tener en cuenta el

acomodo de los componentes del circuito y en que rango de cambio de parámetros puede asociarse a un cambio en el invariante topológico para saber que tanta información podemos obtener de esta metodología propuesta.

## REFERENCES

- Adams, C.C. (1994). *The knot book an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. W. H. Freeman and Company, New York.
- Alcorta Garcia, E. and Frank, P.M. (1999). A novel design of structured observer-based residuals for fdi. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1341–1345. San Diego, Cal. USA.
- Chen, J. and Patton, R.J. (1999). *Robust model based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers Group.
- Chiang, L., Russell, E., and Braatz, R. (2001). *Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems*. Springer, Great Britain.
- Cromwell, P.R. (2004). *Knots and Links*. Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511809767.
- Ding, S.X. (2013). *Model-based fault diagnosis techniques 2nd edition*. Springer, 2nd edition.
- Ding, S.X. (2014). *Data-driven Design of Fault Diagnosis and Fault-tolerant Control Systems*. Advances in Industrial Control. Springer, London.
- Frank, P.M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey. *Automatica*, 26, 459–474.
- Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K., and Ocneanu, A. (1985). A new polynomial invariant of knots and links. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (12), 239–246. doi: 10.1090/s0273-0979-1985-15361-3.
- Isermann, R. (2006). *Fault-diagnosis systems: An introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer, 1 edition.
- Kauffman, L.H. (1991). *Knots and physics*, volume 1 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ. doi:10.1142/9789812796226. URL <http://dx.doi.org/10.1142/9789812796226>.
- Parris, R. (1977). A three-dimensional system with knotted trajectories. *The American Mathematical Monthly*, 84(6), 468–469.
- David A. Diaz-Romero, Efrain Alcorta Garcia and Daniel Enrique Rivas-Cisneros. *Aislamiento de fallas en sistemas dinámicos: un enfoque topológico*, (Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, 2019).
- R. Ghrist, P.J. Holmes and M.C. Sullivan, *Knots and Links in the Three-Dimensional Flows*, (Springer, 2011).
- R. Ghrist, *Chaos, Solitons & Fractals* 9(1998) 583.