

Stability Analysis of Electrical Power Systems under Non-Linear Loads

Arthur Johan Rangel-Bautista^{*}, Juan Gabriel Avina-Cervantes^{*}, Miguel Ángel Gómez-Martínez^{*}, Carlos Rodrigo Correa-Cely^{**}

* Departamento de Ingeniería Electrónica, División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Salamanca 36885, Mexico. e-mail: {aj.rangelbautista, avina, gomezma}@ugto.mx ** Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones - Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 680002, Colombia. (e-mail: crcorrea@uis.edu.co)

Abstract: This article presents a study on the stability analysis in Electrical Power Systems (EPS) in the presence of bounded non-linear loads. EPS has received much attention due to the emerging advances in power electronics now widely applied in industrial applications, which are highly affected by nonlinear loads influencing energy quality. The stability analysis uses the linearized model, based on the equilibrium points is evaluated according to the Lyapunov stability criteria and the bifurcation theory. The numerical results were obtained using Matlab, including the principal theorems associated with nonlinear systems stability, and validated with a single study case.

Keywords: Stability, Phase diagrams, bifurcation theory, Electrical Power Systems, Lyapunov

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP) han experimentado una rápida evolución en la que se destaca la presencia de elementos o cargas altamente no lineales y el empleo de energías alternativas. Esto ha llevado a los diseños existentes de los principales SEP a operar cerca de sus límites físicos, y ha ocasionado que el estudio por mantenerlos en zonas de equilibrio predeterminadas bajo condiciones operativas normales sea cada vez más complejo y difícil [Alzate et al., 2011]. Adicionalmente, el inadecuado control o maniobra de los sistemas genera inestabilidades que causan colapsos de red y en casos extremos, los apagones dejan daños económicos, ambientales y sociales considerables. En consecuencia, dichas problemáticas han aumentado el interés en el estudio de la seguridad dinámica del sistema mediante la ejecución de análisis de estabilidad y controles discretos del sistema [Grigsby, 2012], sobre todo en aplicaciones industriales de alta envergadura. Hoy día existen distintos métodos de evaluación para medir la seguridad dinámica de los SEP que permiten mostrar qué tan robusto son ante perturbaciones. Este esquema tiene la finalidad de establecer o detectar los puntos críticos donde se pierde la estabilidad del sistema provocados por diferentes factores como: las cargas no lineales, fallas de circuito abierto, fallas de cortocircuito y fallas serie, [Guru, 2003]. En particular, se considera oportuno analizar un sistema eléctrico de potencia con un horno de arco eléctrico como carga, la cual se caracteriza por ser no lineal. Este sistema asociado a dicha carga ha sido seleccionado porque debido a su estructura física y a su modo de trabajar genera habitualmente descargas eléctricas para llegar a altas temperaturas que le permitan alcanzar niveles de fundición. Estos efectos hacen de ella una carga altamente perturbadora para cualquier sistema eléctrico de potencia si no se tienen las condiciones de operación adecuada dentro de límites confiables [Boulet et al., 2003].

2. ESTABILIDAD DE LOS SEP

Un sistema no puede ser confiable si no es seguro y no es seguro si no es estable. La confiabilidad de un sistema eléctrico de potencia es la capacidad del SEP para estar en servicio durante un tiempo prolongado sin interrupciones. Por otra parte, la seguridad se relaciona con la capacidad del SEP de soportar perturbaciones grandes, mientras que la estabilidad se asocia con la capacidad de este para llegar a puntos de equilibrio desde diferentes estados de operación, después de haber estado expuesto a perturbaciones físicas.

2.1 Clasificación de estabilidad

En la Fig. 1 se presenta la estructura de los SEP en estabilidad acorde a criterios basados en la naturaleza física, tamaño de la perturbación y tiempo de desarrollo en estabilidad según las normas internacionales establecidas por el Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) y el Consejo Internacional de Grandes Redes Eléctricas (CIGRE).



Fig. 1. Clasificación de estabilidad según el Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IEEE) y el Consejo Internacional de Grandes Redes Eléctricas (CIGRE).

En relación con los tipos de estabilidad más representativos mostradas en la Fig. 1, se puede establecer que la estabilidad angular representa la capacidad de un SEP para permanecer en sincronismo después de ser expuesto a altas perturbaciones. Por lo tanto, depende de la robustez del sistema de mantener o recuperar el equilibrio entre los pares mecánico y electromagnético de todas las máquinas síncronas del SEP, [Van-Cutsem and Vournas, 1998].

Por el contrario, la estabilidad de frecuencia representa la capacidad de un SEP para mantener el valor de la frecuencia dentro de un rango permisible después de estar sometido a perturbaciones, que puede o no haber resultado en la separación del sistema de potencia interconectado en subsistemas aislados. Este ultimo criterio depende de que tan robusto es para recuperar el balance entre las potencias totales de generación y carga [Van-Cutsem and Vournas, 1998]. Por ultimo, la estabilidad de Voltaje representa la capacidad de los subsistemas de generación y transmisión para restaurar las potencias de las cargas y alcanzar valores aceptables de voltaje en los nodos del sistema después de una perturbación [Van-Cutsem and Vournas, 1998].

Establecidos los diferentes tipos de estabilidad que se pueden presentar en un sistema eléctrico de potencia, este trabajo se basa en criterios para detectar zonas de estabilidad de voltaje apreciando la dinámica de la corriente eléctrica por medio de técnicas de bifurcación y criterios de Lyapunov, [Boulet et al., 2003; Medina et al., 2005].

3. ESTABILIDAD DE VOLTAJE EN LOS SEP

Teniendo en cuenta que la presente investigación tiene como fin detectar zonas de estabilidad de voltaje, es relevante comprender la dinámica de un SEP y para esto se debe conocer con bastante precisión el modelado del sistema dinámico referente al SEP. Los sistemas dinámicos se han encargado de hacer una descripción matemática de la realidad dependiendo de condiciones iniciales y representada mediante las ecuaciones diferenciales que proporcionan una solución única con cada condición inicial. La recuperación de voltaje después de una perturbación en un SEP se retrasa por la dinámica de carga (como la dinámica de carga de los motores de inducción) [Zuo et al., 2017].

Para el SEP se consideran las variables de ángulo o fase, voltaje y corriente como estados del sistema dinámico no lineal. En un sistema lineal se tendrá normalmente un solo punto de equilibrio (si se encuentra en la zona de estabilidad) en cambio para un sistema no lineal se tendrán distintos puntos de equilibrio. Esto hace que los sistemas no lineales sean sensibles a condiciones iniciales y ante cualquier perturbación pequeña que pueda llevar a ocasionar grandes cambios en la dinámica de la red. Es siempre útil representar el sistema no lineal en uno lineal alrededor de un punto de equilibrio [Van-Cutsem and Vournas, 1998]. Posterior a la linealización, se mostrará en breve el proceso para encontrar las zonas de estabilidad a partir de los puntos de equilibrio.

3.1 Proceso de Linealización

Para el proceso de linealización, se calculan las ecuaciones de estados del SEP mostrado en la Fig. 2. Para analizar



Fig. 2. Modelo unifilar del sistema eléctrico de potencia.

este modelo se debe tener en cuenta, la pérdida de voltaje, la falla de energía, así como el enfrentamiento entre la transmisión y la generación. Esto conduce a un sistema desequilibrado y desprotegido [Singh et al., 2020]. Consecuente las siguientes consideraciones en su estructura y composición:

El generador síncrono: es una máquina síncrona también llamada alternador que se utiliza para convertir potencia mecánica en potencia eléctrica de CA. Este generador se encuentra acoplado al sistema de transmisión, del lado primario del transformador con el fin de suministrar potencia al sistema y llevarlo a los niveles de tensiones deseados [Arrillaga et al., 2013]. Para el análisis, se asume que el generador es robusto o que el sistema está conectado a una barra PV infinita.

El sistema de transmisión: incluye transformador y línea de transmisión que tiene como objetivo trasportar la energía al consumidor que es estos casos es el horno de arco eléctrico.

El banco de capacitores: es un conjunto de dispositivos pasivos que actúan como filtros con el fin de compensar potencia reactiva instalada en el punto de conexión del nodo de carga.

Horno de arco eléctrico: es considerada una carga altamente no lineal encargada de la fundición de metales. Las ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento dinámico del SEP [Acha et al., 1990] se obtienen aplicando las leyes de Kirchhoff a mallas y nodos del circuito mostrado en la Fig. 2, concluyendo matemáticamente en las Ecs. (1)-(3).

$$\frac{d}{dt}i = \frac{1}{L} \left(\frac{PX_g}{E_i sen(\delta)} - R_i - V_c \right), \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}V_c = \frac{1}{C}\left(i - i_h\right),\tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}i_h = \frac{1}{L_h} \left(V_c - K_3 i_h r^{-(m+2)} \right), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}r = \frac{K_3}{K_2}r^{-(m+3)}i_h^2 - \frac{K_1}{K_2}r^{n-1}.$$
(4)

Además, la ecuación de estado (4) representa el comportamiento del horno de arco eléctrico mediante el radio r. El modelo matemático del SEP corresponde a un banco de capacitores denotado por C, la representación de la reactancia y resistencia de suministro que corresponde a R y L, devanado del transformador del horno de arco eléctrico L_h , *n* corresponde al efecto de enfriamiento. En particular, n tiene varias connotaciones, así, n = 0representa un sistema independiente de la temperatura, n = 1 representa entorno no caliente y n = 2 si el modo de enfriamiento es proporcional de los electrodos. Las constantes K_1, K_2, K_3 representan el enfriamiento en el horno de arco eléctrico, r es el radio del horno, y m la longitud de horno. La ecuación que puntualiza el comportamiento dinámico del generador [Guru, 2003] está descrita por

$$V_g = \frac{PX_g}{E_i sen(\delta)},\tag{5}$$

donde P representa la potencia media, X_g representa la reactancia del devanado del generador, E_i el voltaje generado por el campo magnético y δ es la diferencia del ángulo de fase entre el voltaje de la máquina y el voltaje generado.

Para el proceso de linealización, se proyectó la realización de los siguientes pasos:

- (1) Búsqueda de puntos de equilibrio mediante la solución del sistema de ecuaciones f(x, y) = 0, y g(x, y) = 0, donde se encuentra los puntos de equilibrio X_O y Y_O .
- (2) Desarrollo y expansión de la serie de Taylor alrededor de dichos puntos de equilibrio.

$$f_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial y} (y - y_0) + \dots$$
(6)

$$g_{(x,y)} = g_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial g_{(x_0,y_0)}}{\partial x}(x - x_0) \frac{\partial g_{(x_0,y_0)}}{\partial y}(y - y_0) + \dots$$
(7)

Debido a que las funciones se expanden alrededor del punto de equilibrio, se considera el caso donde la función f(x0, y0) = 0 y los términos de mayor orden son despreciados. El sistema linealizado viene dado por:

$$\frac{dx}{dt} = X \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + Y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = X \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + Y \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$
(9)

(3) Definición de matriz Jacobiana y evaluación de sus derivadas parciales en el punto de equilibrio del sistema linealizado. Lo cual da origen a la matriz de estados A,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0). \end{pmatrix}$$
(10)

Con la obtención de las derivadas parciales, se puede determinar si el sistema tiene el siguiente tipo de soluciones:

$$X(t) = X_0 e^{\lambda t} \tag{11}$$

$$Y(t) = Y_0 e^{\lambda t} \tag{12}$$

Donde λ es el parámetro relacionado con las frecuencias naturales del sistema por determinar.

Por tanto, el sistema tendrá una solución si se cumple la siguiente relación,

$$det(A - \lambda I)| = 0 \tag{13}$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb = 0, \qquad (14)$$

donde λ representa los valores propios del sistema teniendo diferentes tipos de puntos de equilibrio [Arrillaga et al., 2013]. Además, dependiendo de estos valores se puede tener un diferente comportamiento del sistema,

- (1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reales
 - (a) Sus valores propios son reales y tienen diferente signo, a este punto de equilibrio se le conoce como punto silla.
 - (b) Sus valores propios son reales y ambos positivos, a este punto de equilibrio se le conoce como nodo no estable.

- (c) Sus valores propios son reales y ambos negativos, a este punto de equilibrio se le conoce como nodo estable.
- (2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son complejos conjugados
 - (a) Sus valores propios del sistema son puramente imaginarios el punto de equilibrio es llamado centro.
 - (b) Sus valores propios son $\lambda = \alpha \pm i\beta$ siendo $\alpha < 0$ tendemos un punto de equilibrio llamado espiral estable.
 - (c) Sus valores propios son $\lambda = \alpha \pm i\beta$ siendo $\alpha > 0$ tendemos un punto de equilibrio llamado espiral no estable.

Con el propósito de establecer de forma exhaustiva las zonas de estabilidad, se requiere la aplicación de la teoría de bifurcaciones. Dicha teoría tiene la finalidad de encontrar puntos límites en donde dicha estabilidad se pierde variando cada uno de los parámetros del sistema. En nuestro caso particular, el parámetro más relevante sería la inductancia del horno de arco eléctrico L_H establecido como el principal parámetro de bifurcación, este componente es responsable del comportamiento dinámico del sistema dada su naturaleza no lineal causante principal de la inestabilidad en el SEP.

4. PRINCIPIOS DE BIFURCACIONES

El estudio de cómo el carácter de los puntos de equilibrio cambia cuando los parámetros del sistema se alteran se llama teoría de bifurcaciones. Es de vital importancia usar este termino para describir un cambio inesperado en la dinámica del sistema. El análisis de la estabilidad en específico para el SEP se basa en el análisis de teoría de bifurcaciones, en donde el conjunto de ecuaciones diferenciales contiene distintas variables, estados y parámetros que se deben explorar en base a sus sensibilidades en sus variaciones. En el modelo propuesto en la Fig. 2 se implementa un parámetro de bifurcación oportuno para establecer las zonas de estabilidad del SEP. Cuando un punto de equilibrio se modifica debido a la variación de un parámetro, el comportamiento de las trayectorias en una vecindad del punto de equilibrio se altera en consecuencia. La capacidad de clasificar y entender las diferentes posibles bifurcaciones es una parte importante de la dinámica no lineal, como se describe en [Anzurez-Marin et al., 2008].

4.1 Tipos de Bifurcaciones

A continuación, se presenta algunos tipos de bifurcaciones más representativas en los sistemas dinámicos:

Bifurcación silla-nodo: La bifurcación silla-nodo es un mecanismo básico representado por los puntos de equilibrio que pueden ser creados o destruidos. Para este estudio, se supone conocida una ecuación diferencial de primer orden con un parámetro de bifurcación β .

$$y' = f(y,\beta). \tag{15}$$

Ahora sabiendo que para cada β hay un punto de equilibrio diferente, se tiene los siguientes comportamientos:

- (1) si $\frac{\partial}{\partial y} f(y, \beta_0) = 0$, entonces se tiene un punto estacionario con respecto a y en $f(y, \beta_0)$.
- (2) si $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y, \beta_0) \neq 0$, entonces se considera un extremo de $f(y, \beta_0)$.
- (3) si $\frac{\partial}{\partial y} f(y, \beta_0) \neq 0$, $f(y, \beta_0)$ es no estacionario con respecto a β en (y, β_0) .

En base en las ecuaciones y condiciones anteriormente descritas, se tiene la siguiente clasificación del equilibrio:

- (1) No existe equilibrio cerca de (y, β_0) cuando $\beta < \beta_0$.
- (2) Existen dos equilibrios cerca de (y, β_0) para cada valor del parámetro $\beta > \beta_0$. Estos equilibrios son hiperbólicos uno es estable y el otro es inestable.

Bifurcación de Hopf: Sea un sistema bidimensional dependiente de un parámetro con un punto de equilibrio, a medida que se hace variar dicho parámetro, este punto puede perder su estabilidad. La clave está en los valores propios de la matriz Jacobina, la bifurcación correspondiente depende de la naturaleza de la presencia de valores propios [Anzurez-Marin et al., 2008]. Medina et al. [2005] presenta un trabajo preliminar que fue empleado como referencia para la aplicación de los criterios de estabilidad y teoría de bifurcación en SEP teniendo como carga un horno de arco eléctrico. Es decir, la bifurcación se da cuando tenemos dos valores propios complejos conjugados que cruzan el eje imaginario a medida que el parámetro de bifurcación varía.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados del estudio en estabilidad de SEP se presentan mediante un algoritmo implementado en el software Matlab[®] que a su vez permitió concluir satisfactoriamente el análisis respectivo. Dado que el modelo planteado anteriormente y mostrado en la Fig. 2 representa un generador, transformador, banco de capacitores y horno de arco eléctrico, se utilizó para su estudio los parámetros mostrados en la Tabla 1 los cuales están representados en valor por unidad [p.u.], es decir, en cantidades medidas bajo un valor de referencia. Estos parámetros

Tabla 1. Las Condiciones iniciales de los parámetros del modelo en [p.u.] (per unit).

Parámetros	Valores	Parámetros	Valores
L	0.2	С	0.2
m	1	K_1	0.019
E_i	0.58	δ	0.41
X_g	0.19	K_2	0.005
R	0.3	n	2
L_h	0.1	d_t	0.01
K_3	3	r	10

corresponden a un punto de equilibrio de estabilidad obtenidos para el voltaje y la corriente como se observan en las Figs. 3 y 4, respectivamente, cabe resaltar que los resultados están en valor por unidad. En estas figuras



Fig. 3. Respuesta transitoria voltaje para el caso de estudio estable.



Fig. 4. Respuesta transitoria corriente para el caso de estudio estable.

se muestra un comportamiento transitorio donde alcanza un estado estacionario cercano a los 8 segundos. Como se puede evidenciar en los resultados, es posible afirmar que el SEP tiene una buena respuesta en su transitorio en relación con su estabilidad, puesto que se estabiliza rápido. Aunque se aprecia el requerimiento de una acción de control para reducir el sobrepico. La Fig. 5 muestra el comportamiento dinámico según las condiciones iniciales establecidas en la Tabla 1, donde se puede observar un punto de equilibrio espiral estable. Basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov, se dice que un estado de equilibrio es un sistema asintóticamente estable si la solución que se inicie desde el sub-espacio emitido por los valores iniciales converge hacia el punto de equilibrio en el espa-



Fig. 5. Punto de equilibrio convergente.

cio. En general el sistema tiene un dominio de atracción originando trayectorias asintóticamente estables.

Posteriormente, se varió el parámetro de bifurcación para poder encontrar los puntos límites en donde se pierde la estabilidad. La Fig. 6 muestra que la corriente del sistema no se estabiliza en el tiempo de análisis. De



Fig. 6. Corriente del sistema en punto de equilibrio no estable.

igual manera, en la Fig. 7 se observa qué puntos de equilibrio de la espiral no convergen. Sin embargo, se requiere un estudio matemático formal para determinar con precisión las regiones de estabilidad en un estudio posterior. Ahora, analíticamente se dice que un estado de equilibrio es inestable si existe para algún valor real tal que la trayectoria que se inicie salga del espacio de soluciones estables. Para encontrar el valor critico se aplica la teoría de bifurcaciones para así encontrar la región estable desde una condición inicial del SEP.



Fig. 7. Punto de equilibrio, espiral inestable.

Finalmente, la Fig. 8 muestra el diagrama de bifurcación donde se evidencia un punto crítico donde ocurre la pérdida de estabilidad dado por el parámetro de bifurcación, mientras éste en la región dada por L < 0.798.



Fig. 8. Diagrama de Bifurcación del modelo

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado el análisis de estabilidad de un SEP con una carga altamente no lineal que mediante criterios de estabilidad Lyapunov y la teoría de bifurcaciones. Además, fue posible identificar zonas de estabilidad y zonas no estables. Al analizar el estado transitorio del SEP, se observó que al presentarse una variación del parámetro de bifurcación, aparece una bifurcación Hopf cuyo punto límite está dado por L = 0.798 P.U. dando una región estable basadas en trayectorias desde condiciones iniciales L < 0.798. El software Matlab[®] brindo las herramientas

confiables para realizar un algoritmo que ejecute la simulación numérico; teniendo un control algorítmico completo en la aplicación de teorías y criterios para encontrar las zonas de estabilidad del modelo planteado.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio fue apoyado por el Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad de Guanajuato, NUA 825717 y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT (Mexico), beca No. 1047330/763897.

REFERENCIAS

- Acha, E., Semlyen, A., and Rajakovic, N. (1990). A harmonic domain computational package for nonlinear problems and its application to electric arcs. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 5(3), 1390–1397. doi: 10.1109/61.57981.
- Alzate, A., Escobar, A., and Marulanda, J.J. (2011). Application of a d-statcom to mitigate arc furnaces power quality problems. In 2011 IEEE Trondheim PowerTech, 1–6. doi:10.1109/PTC.2011.6019382.
- Anzurez-Marin, J., Padilla-Garcia, J.A., and Cuevas-Sila, O. (2008). Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados. *RIEE, Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación*, PAS-97(1).
- Arrillaga, J., Barros-Campos, J.G., and Al-Khashali, H.J. (2013). Analysis of Nonlinear Oscillations for AC-Fed Electric Arc Furnaces in Context of Bifurcation Dynamics. *Elektronika Ir Elektrotechnika*,, 5(19). doi: 10.5755/j01.eee.19.5.1556.
- Boulet, B., Lalli, G., and Ajersch, M. (2003). Modeling and Control of an Electric Arc Furnace. In IEEE (ed.), *Proceedings of the American Control Conference*, 3060– 3064.
- Grigsby, L.L. (2012). *Power System Stability and Control.* CRC Press, Boca Raton, USA, 3rd edition.
- Guru, B.S. (2003). Máquinas Eléctricas y Transformadores. University Press, Oxford, UK, 3rd edition.
- Medina, A., Gomez-Martinez, M., and Fuerte-Esquivel, C. (2005). Application of bifurcations theory to assess nonlinear oscillations produced by AC electric arc furnaces. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 20(2), 801–806. doi:10.1109/TPWRD.2005.844289.
- Singh, P., Parida, S.K., Chauhan, B., and Choudhary, N. (2020). Online voltage stability assessment using artificial neural network considering voltage stability indices. In 2020 21st National Power Systems Conference (NPSC), 1–5. doi:10.1109/NPSC49263.2020.9331954.
- Van-Cutsem, T. and Vournas, C. (1998). Estabilidad de voltaje de los sistemas de energía eléctrica. Springer Science, USA, 1rd edition.
- Zuo, J., Zhang, B., Xiang, M., Shen, Y., and Chen, Y. (2017). Study of transient voltage stability with transient stability probing method in hunan power grid. In 2017 4th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI), 252–256. doi: 10.1109/ICSAI.2017.8248299.