

Using artificial delays to approximate PID controllers for a PEM fuel cell system ^{*}

Adrián Ramírez ^{*}

^{*} Cátedras CONACYT-División de Control y Sistemas Dinámicos, IPICYT, SLP, México (e-mail: adrian.ramirez@ipicyt.edu.mx)

Abstract: In this paper, a Proportional Integral Derivative (PID) controller is proposed to regulate the dynamic response of a proton exchange membrane (PEM) fuel cell system and compensate for parametric variations and disturbances without the need of explicitly estimating or measuring them. As recognized in the literature, derivatives are difficult to measure or construct reliably in practice and hence, approximate them using finite differences is preferable. Such an approximation, if not performed carefully, may introduce undesired control activity and generate instability. In this sense, we propose to engineer the finite differences using artificial delays with the main objective of eliminating detrimental effects while guaranteeing the stability of the fuel cell system. The effectiveness of the proposed approach is testified by means of numerical simulations.

Keywords: Fuel cell systems; Time delay systems; Artificial delays

1. INTRODUCCIÓN

La creciente demanda de energía alrededor del mundo requiere el desarrollo de alternativas de generación sustentables como medida para reducir el deterioro ambiental. En efecto, la actual tasa de consumo energético ha resultado en altos niveles de emisiones de dióxido de carbono debido al uso indiscriminado de combustibles fósiles. Por lo tanto, navegar hacia el uso de fuentes de energía “amigables” con el medio ambiente es de vital importancia. En este sentido, las celdas de combustible de intercambio protónico son una alternativa prometedora al uso de fuentes de energía con base en combustibles fósiles (Wang et al., 2011).

En función de la aplicación, un nivel de voltaje adecuado se podría generar apilando múltiples celdas de combustible; sin embargo, dicho voltaje sería poco práctico ya que sufriría de variaciones severas inducidas por desviaciones de los parámetros nominales. Más aún, fluctuaciones agresivas en la carga podrían generar daño permanente en las celdas de combustible debido al fenómeno de falta de combustible (Taniguchi et al., 2004). En este contexto, los convertidores CD-CD conmutados se han vuelto un componente fundamental en grupos celdas de combustible apiladas, a tal grado que un conjunto de celdas de combustible, junto con un convertidor de potencia acoplado a una carga eléctrica, se puede entender como un sistema indivisible que llamamos comúnmente sistema de celdas de combustible (SCC). La importancia del convertidor de potencia en un SCC es su habilidad de regular el voltaje entregado a la carga. Sin embargo, combinar la dinámica de las celdas de combustible con la del convertidor de potencia ocasiona que la tarea de regulación de voltaje sea compleja y requiera de intrincados esquemas de control

(Daud et al., 2017; Rgab et al., 2010; Zúñiga-Ventura et al., 2018).

En vista del razonamiento anterior, en este artículo se propone un modelo sencillo de pequeña señal capaz de combinar las dinámicas del grupo de celdas de combustible y del convertidor, con el cual se diseña un controlador PID para resolver el problema de regulación de voltaje del SCC. Por otro lado, cabe mencionar que, con el objetivo de garantizar la implementación segura del esquema de control, la parte derivativa del controlador se aproximara por medio de una acción retardada. El controlador propuesto, conocido como controlador Proporcional Integral Retardado (PIR), se implementa en un SCC compuesto por un grupo de celdas de combustible con un convertidor reductor CD-CD que actúa como una interfaz entre las celdas de combustible y una carga resistiva pulsante. El objetivo principal es compensar variaciones en el voltaje entregado por el grupo de celdas de combustible, las cuales son generadas por escalones de potencia ocasionados a su vez por una carga pulsante.

2. MODELO DE PEQUEÑA SEÑAL Y CONTROL PIR

En esta sección obtenemos el modelo de pequeña señal para el SCC que se muestra en la Fig. 1, en donde v_s es el voltaje entregado por las celdas de combustible apiladas, i_L es la corriente en el inductor, v_o es el voltaje de salida, i_s es la corriente en las celdas de combustible, C_s y C_o son respectivamente los capacitores de entrada y salida, L es el inductor y R es la carga del SCC.

Considerando que el convertidor opera en modo continuo y que el interruptor $q \in \{0, 1\}$ es ideal, usando las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff's, y con base en técnicas estándar de promediado (Sanders and Verghese, 1990), se obtiene el modelo promedio del SCC como

^{*} Este manuscrito fue financiado en parte por cátedras CONACYT proyecto 2978.

$$\begin{aligned} C_s \frac{dv_s}{dt} &= i_s - i_L u, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_o + v_s u, \\ C_o \frac{dv_o}{dt} &= i_L - \frac{1}{R} v_o, \end{aligned} \quad (1)$$

en donde la señal $u \in [0, 1]$, también conocida como ciclo de trabajo del sistema, se obtiene a partir de la señal de conmutación como $q \rightarrow u$.

Usando una descomposición canónica de las variables del sistema (1), en sus componentes de CA y CD, se obtiene el modelo de pequeña señal para el SCC alrededor de un punto de operación de interés; es decir,

$$\begin{aligned} C_s \frac{d\hat{v}_s}{dt} &= \hat{i}_s - U\hat{i}_L - I_L \hat{u}, \\ L \frac{d\hat{i}_L}{dt} &= -\hat{v}_o + U\hat{v}_s + V_s \hat{u}, \\ C_o \frac{d\hat{v}_o}{dt} &= \hat{i}_L - \frac{1}{R} \hat{v}_o, \end{aligned} \quad (2)$$

en donde las letras mayúsculas y con gorro representan respectivamente las componentes de CD y de CA de las variables. Mas aún, a partir de las condiciones de equilibrio, los valores nominales son

$$I_s = I_L U, \quad V_o = V_s U \quad \text{y} \quad I_L = V_o/R, \quad (3)$$

en donde V_o y R son fijos. Por otro lado, V_s , U y \hat{i}_s se determinan usando el modelo estático de la pila de celdas de combustible reportado en (Shahin et al., 2010)

$$V_s = \frac{E_o I^\mu}{I^\mu + i_s^\mu}, \quad (4)$$

en donde E_o e i_s son, respectivamente, el voltaje a circuito abierto y la corriente de la pila de celdas de combustible, e I y μ son parámetros por determinar. Sustituyendo (3) en (4) encontramos que el valor nominal V_s esta dado por

$$V_s = \{V_s^* \in \mathbb{R}^+ : F(V_s^*) = 0\}, \quad (5)$$

en donde $F(V_s) = (V_s - E_o)(IRV_s)^\mu + V_s(V_o^2)^\mu$. Note que con V_s dada, la señal nominal de control U se puede resolver de (3) como $U = V_o/V_s \in [0, 1]$.

Para obtener \hat{i}_s , note que $v_s = V_s + \hat{v}_s$. Como pequeñas variaciones de v_s alrededor de V_s se generan debido a pequeñas variaciones de i_s , tenemos que $\hat{i}_s = \hat{v}_s/m$ en donde

$$m = -\frac{\mu E_o I^\mu I_s^\mu}{(I^\mu + I_s^\mu)^2 I_s}. \quad (6)$$

Con las consideraciones descritas arriba, el modelo de pequeña señal del SCC toma la siguiente forma

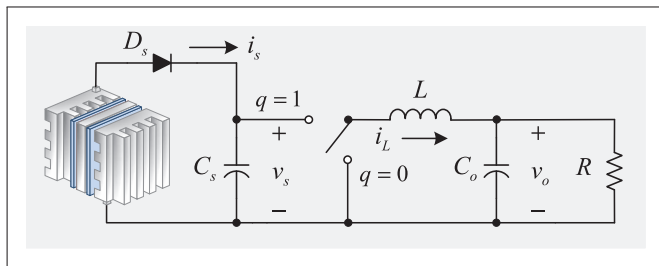


Fig. 1. SCC compuesto por celdas de combustible apiladas, un convertido CD-CD reductor y una carga resistiva.

$$\begin{aligned} C_s \frac{d\hat{v}_s}{dt} &= \frac{1}{m} \hat{v}_s - U\hat{i}_L - \frac{V_o}{R} \hat{u}, \\ L \frac{d\hat{i}_L}{dt} &= -\hat{v}_o + U\hat{v}_s + V_s \hat{u}, \\ C_o \frac{d\hat{v}_o}{dt} &= \hat{i}_L - \frac{1}{R} \hat{v}_o. \end{aligned} \quad (7)$$

Considerando que \hat{u} y \hat{v}_o son, respectivamente, las señales de entrada y salida del SCC, la función de transferencia del sistema está dada por

$$\frac{\hat{v}_o(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (8)$$

en donde los coeficientes a_i y b_i son función de los parámetros del SCC y se definen como $a_0 = U^2/R - 1/m$, $a_1 = C_s + U^2 C_o - L/(mR)$, $a_2 = LC_s/R - LC_o/m$, $a_3 = LC_o C_s$, $b_0 = -V_s/m - UV_o/R$ y $b_1 = C_s V_s$.

Por otro lado, se sabe que un controlador realimentado de la forma

$$\hat{u} = k_1 \hat{e} + k_2 \frac{d\hat{e}}{dt} + \dots + k_p \frac{d^{p-1} \hat{e}}{dt^{p-1}}, \quad (9)$$

es capaz de estabilizar un sistema lineal de grado relativo ρ (Selivanov and Fridman, 2018), aquí $\hat{e} = r - \hat{v}_o$ se define como el error de salida. Cabe mencionar que el grado relativo del sistema (8) con salida \hat{v}_o es $\rho = 2$. De (9), tenemos que un controlador estabilizante para el SCC está dado por el controlador clásico tipo PD:

$$\hat{u} = k_1 \hat{e} + k_2 \frac{d\hat{e}}{dt}. \quad (10)$$

Observe que (10) requiere la derivada de la salida, la cual es difícil de medir en general. Sin embargo, puede ser aproximada usando diferencias finitas como

$$\frac{d\hat{e}(t)}{dt} \approx \frac{\hat{e}(t) - \hat{e}(t-h)}{h}, \quad h > 0,$$

en donde h es un retardo artificial. Si dicha aproximación no se diseña adecuadamente podría causar un mal desempeño del lazo de control e incluso inestabilidad.

Sustituyendo la aproximación anterior, podemos considerar al controlador PD en (10) como un controlador que depende de retardos, también conocido como controlador Proporcional Retardado (PR); es decir,

$$\hat{u}(t) = \left(k_1 + \frac{k_2}{h}\right) \hat{e}(t) - \frac{k_2}{h} \hat{e}(t-h), \quad (11)$$

Por lo tanto, si se diseñan los parámetros k_1 , k_2 y h de manera adecuada, se puede evitar el uso de derivadas puras en el controlador, eliminar la necesidad de diseñar filtros adicionales y al mismo tiempo preservar las propiedades de la acción derivativa mediante su aproximación con diferencias finitas sin comprometer el desempeño del sistema de control (Suh and Bien, 1979).

Finalmente, complementamos (11) con una acción integral para brindar robustez al lazo de control. Entonces, definiendo $k_p = k_1 + k_2/h$ y $k_r = k_2/h$, el controlador PIR que se obtiene a partir de (10) es

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{e}(s)} = \frac{s(k_p - k_r e^{-sh}) + k_i}{s}, \quad (12)$$

en donde k_p , k_i y k_r son respectivamente las ganancias proporcional, integral y retardada, y el problema en consideración se plantea como sigue:

Problem 1. Encuentre una sintonización para los parámetros (h, k_p, k_i, k_r) que creen una respuesta estable para la salida del sistema (8) en lazo cerrado con (12) con base en sus raíces características.

Con este problema en mente, primero encontramos la función característica de (8) con (12) como:

$$F(s, h, k_r) = D(s) + N(s)k_re^{-sh} = 0, \quad (13)$$

en donde D y N son polinomios en s dados por

$$\begin{aligned} D &= s^4 + as^3 + (k_p e + b)s^2 + (fk_p + ek_i + c)s + fk_i, \\ N &= -(s + d)se, \end{aligned} \quad (14)$$

y $a = a_2/a_3$, $b = a_1/a_3$, $c = a_0/a_3$, $d = b_0/b_1$, $e = b_1/a_3$ y $f = b_0/a_3$.

Desplazando el plano- s con el cambio de variable $s \rightarrow \hat{s} - \gamma$, con $\gamma \geq 0$, resulta en la ecuación característica desplazada

$$\hat{F}(\gamma, \hat{s}, h, k_r) = \hat{H}(\gamma, \hat{s}) + k_re^{\gamma h}e^{-\hat{s}h} = 0, \quad (15)$$

en donde $\hat{H} = \hat{D}/\hat{N}$ y \hat{D} y \hat{N} se obtienen a partir de (14). Para concluir esta sección, a continuación se presenta una descomposición en partes real e imaginaria de $\hat{H}(\gamma, \hat{s})$ sobre el eje imaginario $\hat{s} = j\omega$, esto es,

$$\hat{H} = -(R_{\hat{H}} + jI_{\hat{H}}) \text{ y } \hat{H}' = -(R_{\hat{H}'} + jI_{\hat{H}'}), \quad (16)$$

en donde $\hat{H}' = \partial\hat{H}/\partial\omega$.

3. DESCOMPOSICIÓN DEL PLANO (h, k_r)

Gracias a las propiedades de continuidad de las raíces características con respecto a los parámetros del sistema, un cambio de estabilidad solo puede ocurrir sobre el eje imaginario (Datko, 1978). Es decir, una raíz característica puede migrar de \mathbb{C}^- a \mathbb{C}^+ solamente a través de \mathbb{C}^0 . Suponiendo que (13) es una función continua de h y k_r , podemos usar el método de \mathcal{D} -subdivisión (Neimark, 1949) para encontrar al conjunto de parámetros que generan una raíz imaginaria pura $s \in \mathbb{C}^0$. Más aún, nuestro interés se centra en encontrar cambios de estabilidad sobre el eje imaginario desplazado, por lo tanto, a continuación, se buscará al conjunto de parámetros que originen raíces sobre $-\gamma + j\omega$. Recordando que las raíces características son simétricas respecto al eje real, sin pérdida de la generalidad, se puede considerar solo el caso $\omega \geq 0$.

Proposition 2. Dado un $\gamma > 0$ y un $\omega > 0$, los puntos de cruce dados por

$$h = -\frac{1}{\omega} \operatorname{arccot} \left(\frac{R_{\hat{H}}}{I_{\hat{H}}} \right) \mp \frac{n\pi}{\omega}, \quad (17)$$

$$k_r = \frac{R_{\hat{H}}}{e^{\gamma h} \cos(\omega h)}, \quad (18)$$

generan raíces sobre el eje imaginario desplazado $-\gamma \pm j\omega$, en donde $n = 0, 1, 2, \dots$

Proof. Siguiendo el método de \mathcal{D} -subdivisión, se comienza buscando los parámetros h y k_r que satisfacen

$$\hat{F}(\gamma, j\omega, h, k_r) = 0, \quad (19)$$

en donde \hat{F} se define en (15). Recolectando parte real e imaginaria de (19) resulta en

$$0 = -R_{\hat{H}} + k_re^{\gamma h} \cos(\omega h), \quad (20)$$

$$0 = -I_{\hat{H}} - k_re^{\gamma h} \sin(\omega h). \quad (21)$$

Las ecuaciones (20) y (21) implican que

$$\cot(\omega h \pm n\pi) = -R_{\hat{H}}/I_{\hat{H}}. \quad (22)$$

Después de manipulaciones algebraicas sencillas en (22) se obtiene (17). Con h a la mano, k_r se puede resolver de (20), lo que resulta en (18). \square

De acuerdo al algoritmo de \mathcal{D} -subdivisión, con $\omega = 0$, tenemos de (19) que

$$k_r = -\hat{H}(\gamma, 0)e^{-\gamma h} \quad (23)$$

es un punto de cruce para cualquier $h > 0$ y $\gamma \geq 0$.

Para un entero n dado, la colección de puntos (h, k_r) que se obtiene de (17) y (18) se conoce como frontera de estabilidad. De aquellas n -fronteras, algunas de ellas delimitan el dominio de estabilidad, representado como \mathcal{D}_0 , el cual corresponde a una región en el plano (h, k_r) para la cual el SCC presenta un comportamiento estable. Cabe destacar que la Proposición 2 no brinda información acerca de las propiedades de estabilidad del SCC y por lo tanto \mathcal{D}_0 aún tiene que determinarse. Un método efectivo para lo anterior es el criterio de estabilidad con base en la matriz de Lyapunov desarrollado en (Gomez et al., 2019). El método consiste en verificar la positividad de la matriz

$$\mathcal{K}_r = \left[U \left(\frac{j-i}{r-1} h \right) \right]_{i,j=1}^r \in \mathbb{R}^{mr \times mr}, \quad (24)$$

para un entero $r > 0$ suficientemente grande. Aquí $U : [-h, h] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de Lyapunov de un sistema con retardos con coeficientes matriciales en $\mathbb{R}^{m \times m}$. Por ejemplo, con $r = 3$ la matriz \mathcal{K}_r es

$$\mathcal{K}_3 = \begin{pmatrix} U(0) & U(h/2) & U(h) \\ U^T(h/2) & U(0) & U(h/2) \\ U^T(h) & U^T(h/2) & U(0) \end{pmatrix}.$$

Este enfoque requiere de la representación en espacio de estado del sistema en lazo cerrado; a saber,

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad (25)$$

en donde $x = (\hat{v}_s, \hat{v}_L, \hat{v}_o, \eta)^T$, η es un estado extendido, con dinámica dada por $\dot{\eta} = \hat{e}$, empleado para introducir la acción integral en (12) y las matrices del sistema A_0 y A_1 están dadas por

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{mC_s} & -\frac{U}{C_s} & \frac{k_p V_o}{RC_s} & -k_i \frac{V_o}{RC_s} \\ \frac{U}{L} & 0 & -\frac{1}{L} - \frac{k_p V_s}{L} & \frac{k_i V_s}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_o} & -\frac{1}{RC_o} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_r V_o}{RC_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_r V_s}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Más aún, en línea con el cambio de variable en el dominio de la frecuencia $s \rightarrow \hat{s} - \gamma$, se introduce su contraparte en el dominio del tiempo $y(t) = e^{\gamma t} x(t)$ con el cual el sistema (25) se transforma en

$$\frac{dy(t)}{dt} = (A_0 + \gamma I_4)y(t) + A_1 e^{\gamma h} y(t-h), \quad (26)$$

en donde I_4 es la matriz identidad de dimensiones 4×4 , permitiendo el análisis de γ -estabilidad usando (24).

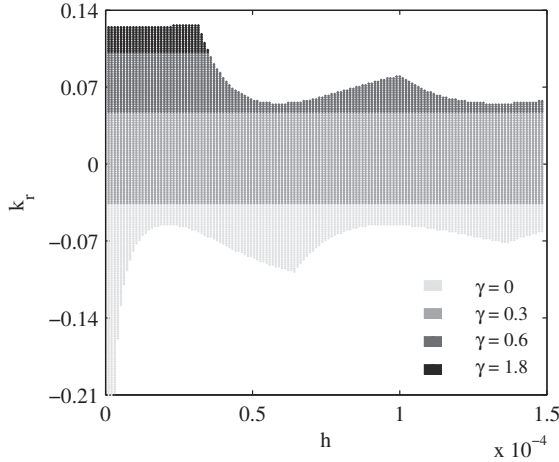


Fig. 2. Regiones de estabilidad relativa en el plano (h, k_r) obtenidas con \mathcal{K}_{30} para varios valores de γ .

Equipados con (24), se escanea a continuación el plano (h, k_r) en la búsqueda de regiones γ -estables del sistema (26) verificando que $\mathcal{K}_r > 0$ con $r = 30$. El resultado que se muestra en la Fig. 2 se obtiene usando $k_p = 0.1$ y $k_i = 0.05$. Los valores nominales del SCC se enlistan en la Tabla 1 y se usan para encontrar $V_s = 39.1309$ V a partir de (5) considerando un voltaje de salida deseado $V_o = 12$ V, con $I = 84.8$ y $\mu = 0.46$. Los valores nominales de CD $U = 0.3066$ V, $I_L = 8$ A y $I_s = 2.4533$ A se obtienen a partir de (3) y $m = -1.2023$ se calcula con (6). Note en la Fig. 2 que la región estable se reduce cuando γ incrementa. Como γ se relaciona con raíces con parte real en $-\gamma$, se puede concluir que empujar las raíces dentro de \mathbb{C}^- podría resultar muy restrictivo al elegir valores estabilizantes para (h, k_r) , lo cual es el objetivo principal de este trabajo. Por otro lado, si continuamos incrementado el valor de γ , algunas regiones interesantes comienzan a surgir dentro del dominio de estabilidad como se discute a continuación.

La Fig. 3 reproduce las regiones de estabilidad relativa obtenidas en la Fig. 2 en donde las líneas en color verde son fronteras de estabilidad obtenidas con (17), (18) y (23) para varios valores de γ . De manera interesante, al inspeccionar dichas curvas, se puede distinguir un conjunto de regiones acotadas por las fronteras de estabilidad. Estas regiones se denotan como \mathcal{D}_γ y se muestran en la Fig. 4 para una mejor visualización. En la última figura, para un γ dado, las fronteras de cruce correspondientes se recortan para formar las regiones \mathcal{D}_γ descritas anteriormente. En las fronteras de estas regiones existiera entonces al menos una raíz –no necesariamente dominante– con parte real igual a $-\gamma$. Observe que cuando el valor de γ incrementa, las regiones \mathcal{D}_γ se contraen y eventualmente colapsan en un punto dentro del dominio de estabilidad, como muestra el punto en color azul en la figura, para un valor crítico $\bar{\gamma}$. Se tiene que para este valor crítico $\bar{\gamma}$, las fronteras obtenidas con (17), (18) y (23) se encuentran unas con otras en $\mathcal{D}_{\bar{\gamma}}$ y generan una triple raíz en $-\bar{\gamma}$; es decir,

$$\hat{F}_0 = 0, \quad \hat{F}'_0 = 0, \quad \text{y} \quad \hat{F}''_0 = 0. \quad (27)$$

Aquí, el subíndice cero indica que la función \hat{F} y su primera y segunda derivada parcial con respecto a \hat{s} , \hat{F}' y \hat{F}'' , se evalúan en $(\gamma, \hat{s}) = (\bar{\gamma}, 0)$.

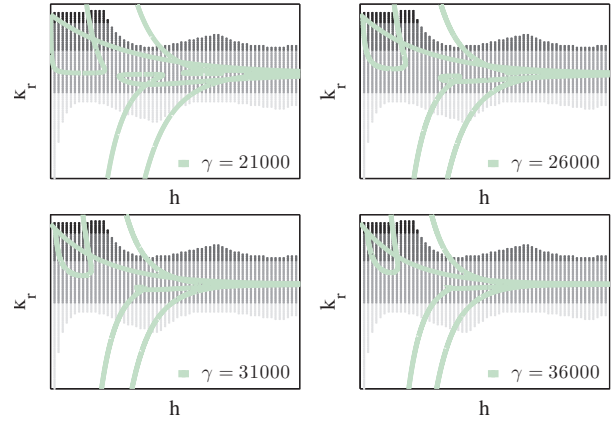


Fig. 3. Fronteras de cruce en color verde obtenidas con (17), (18) y (23) para varios valores de γ .

Table 1. Valores nominales del SCC.

Descripción	valor	unidad
Carga nominal, R	1.5	Ω
Capacitor, C_o	16.6	μF
Capacitor, C_s	5600	μF
Inductor, L	37.5	μH
Voltaje a circuito abierto de la celda, E_o	46.8	V

4. DISEÑO DEL REGULADOR CONMUTADO

Una interrogante natural que nace a partir de las discusiones anteriores es si es posible caracterizar de manera analítica el valor crítico $\bar{\gamma}$. Si la respuesta es afirmativa, entonces ¿Como se deben sintonizar las ganancias del controlador PIR tal que el sistema en lazo cerrado opere de manera estable en este valor crítico? Para dar una respuesta a este cuestionamiento, primero introducimos el siguiente lema.

Lemma 3. El colapso de las regiones \mathcal{D}_γ genera una triple raíz real en $-\bar{\gamma}$ en donde

$$\bar{\gamma} \in \{\gamma_i \in \mathbb{R}^+ : \Delta(\gamma_i) = 0\}.$$

Aquí, $\Delta(\gamma) = \alpha_2 k_p^2 + \alpha_1 k_p + \alpha_0$ y

$$\alpha_2 = 2e(f - ed)\gamma^5 + (e^2 d^2 - f^2)\gamma^4,$$

$$\alpha_1 = -2\gamma^8 e + 8\gamma^7 f + 4(eda - 3fd - af)\gamma^6$$

$$+ 2(ce - ad^2 e + e^2 k_i + fb + 2adf - 2bde + 3d^2 f)\gamma^5$$

$$+ 2(bd^2 e - 4fek_i - fc - ad^2 f)\gamma^4 + 4(f^2 k_i + 2fk_i ed)\gamma^3$$

$$- 4fd(fk_i + k_i de)\gamma^2 + 2f^2 k_i d^2 \gamma,$$

$$\alpha_0 = 2\gamma^{10} - 2(a + 3d)\gamma^9 + (8ad + a^2 - 2b + 3d^2)\gamma^8$$

$$+ 4(2ek_i + 2c - ad^2 - a^2 d)\gamma^7 + 2(2bda - 2ca - 6ek_i d$$

$$+ a^2 d^2 - 8fk_i - 6dc - 2ek_i a)\gamma^6 + 2(3d^2 ek_i + cb + 5k_i fa$$

$$+ 2dac - d^2 ba + 2dk_i ea - db^2 + 14fk_i d + k_i be + 3d^2 c)\gamma^5$$

$$+ (b^2 d^2 - 6fk_i b - 2ad^2 c - k_i^2 e^2 - 16adf k_i - 14fk_i d^2 - 2ek_i c$$

$$- 2ad^2 ek_i - c^2)\gamma^4 + 4(2bdf k_i + ek_i^2 f + 2ad^2 f k_i + fk_i c)\gamma^3$$

$$- 2fk_i(2bd^2 + 2dc + fk_i + 2ek_i d)\gamma^2$$

$$+ 2fk_i d(k_i de + dc + fk_i)\gamma - f^2 k_i^2 d^2.$$

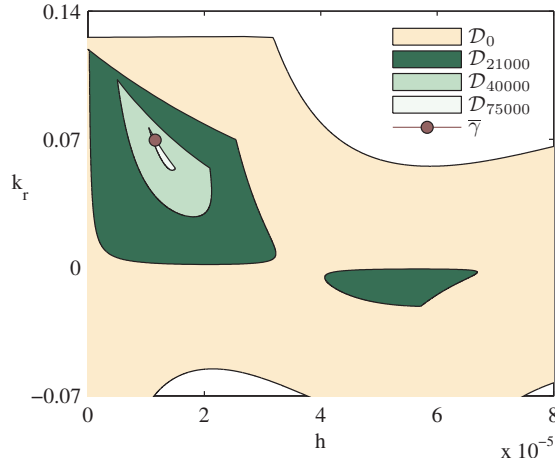


Fig. 4. Dominio de estabilidad \mathcal{D}_0 y regiones \mathcal{D}_γ en el plano (h, k_r) . El punto azul se asocia al valor crítico $\bar{\gamma}$.

Proof. En el valor crítico $\bar{\gamma}$, se satisfacen las condiciones en (27), por lo tanto,

$$\hat{H}_0 + k_r e^{\hat{\gamma}h} = 0, \quad (28)$$

$$\hat{H}'_0 - h k_r e^{\hat{\gamma}h} = 0, \quad (29)$$

$$\hat{H}''_0 + h^2 k_r e^{\hat{\gamma}h} = 0. \quad (30)$$

Usando (28) y (29) se obtiene

$$h = -\frac{\hat{H}'_0}{\hat{H}_0}. \quad (31)$$

A partir de (29) y (30) tenemos que

$$h = -\frac{\hat{H}''_0}{\hat{H}'_0}. \quad (32)$$

Eliminando h de (31) y (32) resulta en

$$\hat{H}'_0 \hat{H}'_0 - \hat{H}''_0 \hat{H}_0 = 0.$$

Expandiendo el lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene

$$\hat{H}'_0 \hat{H}'_0 - \hat{H}''_0 \hat{H}_0 = \alpha_2 k_p^2 + \alpha_1 k_p + \alpha_0. \quad (33)$$

Note que $\alpha_2 k_p^2 + \alpha_1 k_p + \alpha_0 = \Delta(\bar{\gamma})$. La observación anterior concluye la prueba. \square

El Lema 3 permite caracterizar el punto crítico $\bar{\gamma}$, el cual se usa a continuación para obtener una regla de sintonización analítica para el controlador PIR.

Proposition 4. Dado un $k_i > 0$ fijo y un valor deseado para $\gamma_d > 0$, se asigna una triple raíz real en $-\gamma_d$ en el plano complejo bajo la siguiente sintonización

$$(k_p, h, k_r) = -\left(\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}, \frac{\hat{H}'_0}{\hat{H}_0}, \frac{\hat{H}_0}{e^{\gamma_d h}} \right), \quad (34)$$

en donde \hat{H}_0 y \hat{H}'_0 se obtienen de \hat{H} en (16) y en donde el subíndice 0 indica que las funciones se evalúan en $\omega = 0$.

Proof. El resultado es una consecuencia directa del Lema 3 usando $\gamma = \gamma_d$. La ganancia proporcional k_p en (34) se obtiene resolviendo $\alpha_2 k_p^2 + \alpha_1 k_p + \alpha_0$ y despreciando la raíz negativa. El retardo h y la ganancia retardada k_r en (34) se obtienen de (31) y (28), respectivamente. \square

5. SIMULACIONES

Con la estrategia de sintonización para los parámetros del controlador PIR disponible, a continuación, verificamos los resultados a través de simulaciones numéricas. Los parámetros nominales del SCC se muestran en la Tabla 1. Las ganancias del controlador PIR se obtienen a partir de la Proposición 4. Con $\gamma = 107 \times 10^3$ y $k_i = 1$, se obtiene $h = 11.5183 \mu\text{s}$, $k_p = 0.1$ y $k_r = 0.07$. El controlador PIR y el SCC se implementan en el programa MATLAB/Simulink usando un paso de integración variable con tolerancia relativa 1×10^{-5} . El SCC emplea un banco de celdas de combustible con una potencia nominal de 1.26 kW.

La respuesta transitoria y la respuesta en estado estable usando el controlador PIR se muestran en la Fig. 5, paneles a la izquierda. La señal de control u producida por el controlador se usa para operar el convertidor reductor CD-CD conmutado a través de modulación por ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés) considerando una frecuencia de conmutación de 100 kHz. Note en la figura que el controlador PIR es capaz de mantener el voltaje de salida del SCC regulado de manera adecuada al rededor del punto de operación deseado a pesar de cambios de carga desconocidos. Más aún, la señal de control presenta bajos niveles de ruido previniendo así que el sistema exhiba oscilaciones no deseadas alrededor del punto de operación. Cabe mencionar, que se sintonizó un controlador PID usando $\hat{k}_p = k_p - \hat{k}_d/h = 0.0307$, $\hat{k}_i = 1$ y $\hat{k}_d = h k_r = 8.0633 \times 10^{-7}$. Dicho esquema produce actividad de control no deseada y $u \in [0, 1]$ no se satisface para todo $t \geq 0$ saturando repetidamente el PWM y generando inestabilidad a la frecuencia del reloj (Giaouris et al., 2008) como se muestra también en la Fig. 5, paneles a la derecha.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una implementación segura de un controlador PID que regula el voltaje de salida de un SCC. El método empleado aproxima la parte derivativa del controlador usando diferencias finitas resultando en un controlador con retardos intencionales llamado controlador PIR. Se estudian las propiedades de estabilidad del lazo de control y se deriva una técnica de sintonización analítica como una función explícita de un desplazamiento deseado γ_d y de los parámetros del sistema. Resultados de simulación muestran la efectividad del método e indican que el controlador obtenido es capaz de imitar la naturaleza predictiva de acciones de control derivativas evitando problemas de implementación.

REFERENCES

- Datko, R. (1978). A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations. *Quart. Appl. Math.*, 36(3), 279–292.
- Daud, W., Rosli, R., Majlan, E., Hamid, S., Mohamed, R., and Husaini, T. (2017). Pem fuel cell system control: A review. *Renewable Energy*, 113, 620–638.
- Giaouris, D., Banerjee, S., Zahawi, B., and Pickert, V. (2008). Stability analysis of the continuous-conduction-mode buck converter via Filippov's method. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 55(4), 1084–1096.

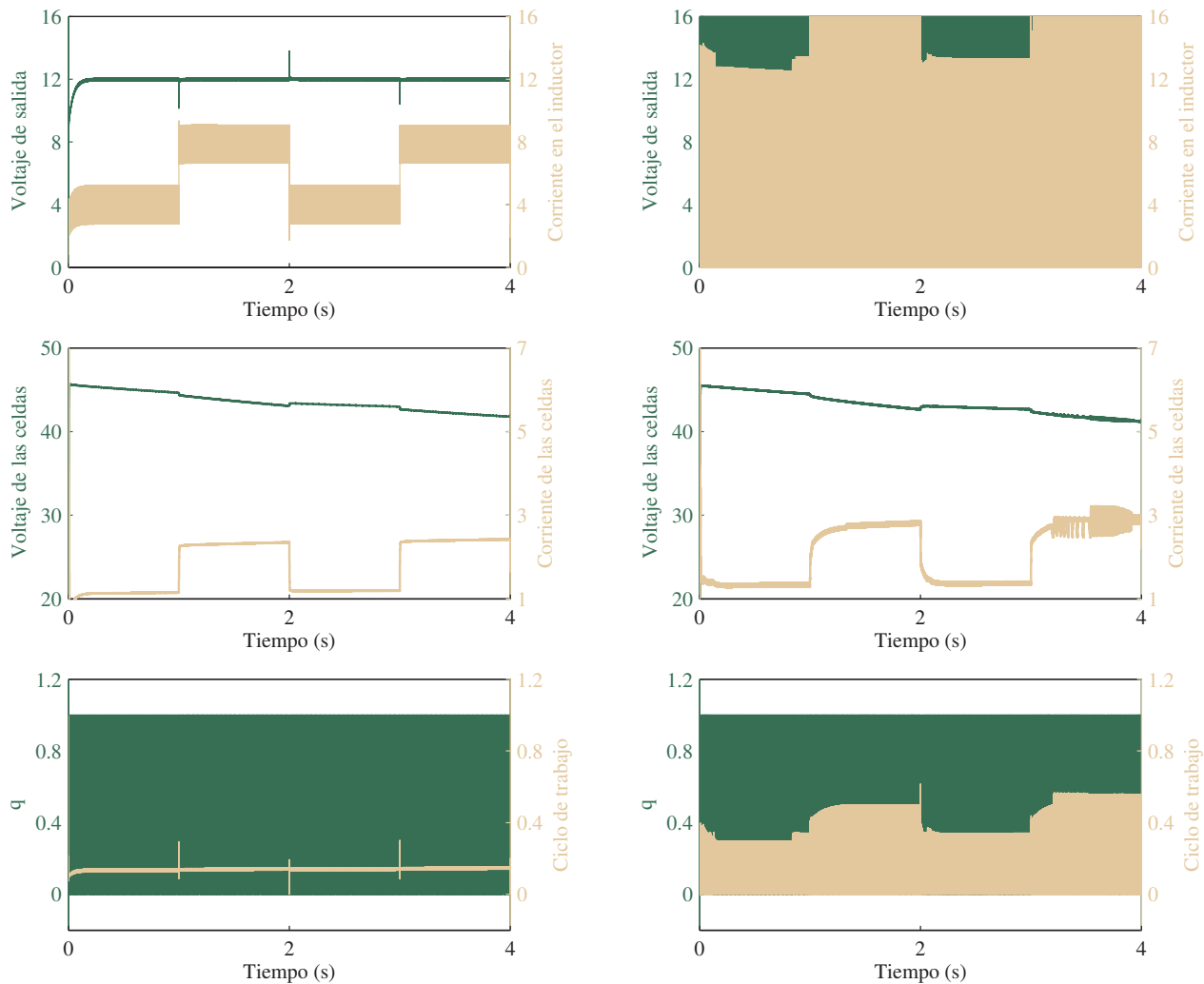


Fig. 5. Respuesta del SCC en lazo cerrado con un controlador PIR (a la izquierda) y por un controlador PID (a la derecha). El voltaje de salida deseado es $V_o = 12$ V. Un tren de cambios de carga del valor nominal $R = 1.5 \Omega$ hasta $R = 3 \Omega$ comienza en $t = 1$ s con una frecuencia de 1 Hz. La señal de salida que producen los controladores corresponde al ciclo de trabajo u , el cual se usa para generar la señal de conmutación q a través de PWM. La estabilidad de la asignación de una triple raíz real se verificó usando la prueba de estabilidad de Lyapunov presentada en (Gomez et al., 2019).

Gomez, M.A., Egorov, A.V., and Mondié, S. (2019). Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems. *Automatica*, 108, 108475.

Neimark, J. (1949). D-subdivisions and spaces of quasipolynomials. *Prikl. Mat. Mekh.*, 13(5), 349–380.

Rgab, O., Yu, D., and Gomm, J. (2010). Polymer electrolyte membrane fuel cell control with feed-forward and feedback strategy. *Int. J. Eng. Sci. Tech.*, 2(10).

Sanders, S.R. and Verghese, G.C. (1990). Synthesis of averaged circuit models for switched power converters. In *ISCAS*, 679–683.

Selivanov, A. and Fridman, E. (2018). Sampled-data implementation of derivative-dependent control using artificial delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 63(10), 3594–3600.

Shahin, A., Hinaje, M., Martin, J.P., Pierfederici, S., Raël, S., and Davat, B. (2010). High voltage ratio

dc-dc converter for fuel-cell applications. *IEEE Trans. Industrial Electron.*, 57(12), 3944–3955.

Suh, I.H. and Bien, Z. (1979). Proportional minus delay controller. *IEEE Trans. Autom. Control*, 24(2), 370–372.

Taniguchi, A., Akita, T., Yasuda, K., and Miyazaki, Y. (2004). Analysis of electrocatalyst degradation in pemfc caused by cell reversal during fuel starvation. *J. Power Sources*, 130(1), 42–49.

Wang, Y., Chen, K.S., Mishler, J., Cho, S.C., and Adroher, X.C. (2011). A review of polymer electrolyte membrane fuel cells: Technology, applications, and needs on fundamental research. *Appl. energy*, 88(4), 981–1007.

Zúñiga-Ventura, Y.A., Langarica-Córdoba, D., Leyva-Ramos, J., Díaz-Saldierna, L.H., and Ramírez-Rivera, V.M. (2018). Adaptive backstepping control for a fuel cell/boost converter system. *IEEE J. Emerg. Sel. Topics Power Electron.*, 6(2), 686–695.