

Homogeneous observers by interconnections

Jaime A. Moreno*

* *Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería,
Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad de México, México
(e-mail: JMorenoP@ii.unam.mx)*

Abstract: Recently, a realization of dimension $2n - 2$ for the High-Gain Observer has been proposed, that converges under the same conditions and has the same properties as its n -dimensional realization. Based on this idea, it has been possible to design a further realization of order $2n - 1$ for the high-gain observer, which reduces the undesirable peaking phenomenon and the noise effect. In this work we extend the basic idea of building a realization of order $2n - 2$ for a homogeneous observer, of arbitrary order and non positive homogeneity degree. It is shown that it converges under the same conditions as its n -dimensional counterpart and it also has the same dynamical properties. This work is expected to be the basis for a future development of a realization that is able to also reduce the peaking phenomenon and the noise effect, similar to the results known for the high-gain observer.

Keywords: Observer design, Homogeneous systems, Lyapunov method.

1. INTRODUCCIÓN

Considérese un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x),\end{aligned}\quad (1)$$

dónde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, mientras que $y \in \mathbb{R}$ es la salida medida, y el campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y la función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son suficientemente suaves. Asíumase que las trayectorias de estado $x(t)$ evolucionan en un conjunto invariante $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ que, por simplicidad, asumiremos que es compacto. Es bien conocido (véase por ejemplo Gauthier et al. (1992)) que cuando el mapa de observabilidad de orden n , es decir,

$$\mathcal{O}_n(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix},$$

es un difeomorfismo en $\mathcal{X}$, el sistema puede ser llevado a la forma canónica de observabilidad

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= \varphi(z), \\ y &= z_1,\end{aligned}\quad (2)$$

mediante la transformación $z = \mathcal{O}_n(x)$, y $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi = L_f^n h \circ \mathcal{O}_n^{-1}$, es una función escalar suave.

Un observador clásico para (2), y por lo tanto para (1), es el Observador de Alta Ganancia (OAG) (Gauthier et al., 1992; Khalil y Praly, 2014; Khalil, 2002), que converge

exponencialmente. Más recientemente se han propuesto observadores que convergen en tiempo finito, entre los que destacan aquellos basados en la homogeneidad (Andrieu et al., 2008; Perruquetti et al., 2008; Qian y Lin, 2006; Lopez-Ramirez et al., 2018; Bernard et al., 2017; Moreno y Besançon, 2021), y que tienen la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1 &= -\lambda_1 L [\hat{z}_1 - y]^{\frac{1-(n-2)\delta}{1-(n-1)\delta}} + \hat{z}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_i &= -\lambda_i L^i [\hat{z}_1 - y]^{\frac{1-(n-i-1)\delta}{1-(n-1)\delta}} + \hat{z}_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_n &= -\lambda_n L^n [\hat{z}_1 - y]^{\frac{1+\delta}{1-(n-1)\delta}} + \varphi_S(\hat{z}),\end{aligned}\quad (3)$$

dónde el símbolo $[x]^p = |x|^p \text{sign}(x)$ representa la potencia signada $p \in \mathbb{R}$ de $x \in \mathbb{R}$. La función $\varphi_S(\hat{z})$ es una versión modificada apropiadamente de la no linealidad $\varphi(z)$, como se detallará más adelante. El parámetro $-1 \leq \delta \leq 0$ corresponde al grado de homogeneidad y las ganancias $\lambda_i > 0$ deben ser elegidas de tal manera que el error de observación nominal, es decir, cuando $\varphi \equiv 0$, sea convergente. La selección de la ganancia $L > 0$ suficientemente grande asegura la convergencia en presencia de la no linealidad φ . Cuando se selecciona $\delta = 0$ recuperamos el Observador de Alta Ganancia. Cuando se selecciona $\delta = -1$ se obtiene un observador discontinuo, que corresponde al diferenciador de Levant (Levant, 1998, 2003, 2005; Cruz-Zavala y Moreno, 2016, 2019; Moreno y Besançon, 2021). Si $\delta < 0$, y en ausencia de ruido de

medición, se satisface que

$$\hat{z}_i(t) = z_i(t), \forall t \geq T, \quad (4)$$

para un tiempo finito $T > 0$, que depende de los errores iniciales y de las ganancias seleccionadas. En el caso $\delta = 0$, para el que los términos de inyección de salida $[\hat{z}_i - y]^{\frac{1-(n-i-1)\delta}{1-(n-1)\delta}}$ son lineales, la convergencia es exponencial.

El indeseable fenómeno de pico es bien conocido para el Observador de Alta Ganancia (Khalil, 2002; Khalil y Praly, 2014) y es causado (parcialmente) por la presencia de las potencias hasta orden n de L en el observador (3). Estas son también responsables de la gran sensibilidad del OAG al ruido de medición. Para tratar de remediar esta situación para el observador de alta ganancia, Astolfi y Marconi (2015) proponen la construcción de un observador, con términos de inyección de salida lineales, y que consiste en la interconexión de $n - 1$ subsistemas de segundo orden, es decir, el observador obtenido es de orden $2n - 2$. Estos subsistemas, que corresponden a observadores de orden dos, están interconectados de tal manera, que el observador obtenido posee las mismas propiedades del observador de alta ganancia original, pero el parámetro de alta ganancia solo aparece con potencia máxima igual a dos, i.e. L^2 . En Astolfi y Marconi (2015) se muestra una reducción en la sensibilidad al ruido del nuevo observador, aunque no se mejora el fenómeno de pico. Posteriormente, una modificación del observador propuesto en Astolfi y Marconi (2015) conduce en Astolfi et al. (2018) a un observador con sensibilidad al ruido reducida y la eliminación del fenómeno de pico.

El objetivo de este trabajo es extender la idea propuesta en Astolfi y Marconi (2015), para el caso del observador de alta ganancia, a la clase de observadores homogéneos dada por (3), para cualquier valor del parámetro de homogeneidad $-1 \leq \delta \leq 0$. Para probar la convergencia del observador obtenido, utilizamos Funciones de Lyapunov suaves y homogéneas para los $n - 1$ subsistemas de segundo orden que componen el observador propuesto de orden total $2n - 2$. Esta situación es técnicamente más compleja que el caso tratado por Astolfi y Marconi (2015), para la cual funciones de Lyapunov cuadráticas son suficientes. El caso especial del diferenciador de Levant (cuando $\delta = -1$) ha sido tratado recientemente en Moreno (2021), por lo que en este trabajo nos concentraremos en los casos con $\delta > -1$. Es notable que el caso tratado en Moreno (2021) permite una interpretación interesante de la construcción del observador propuesto.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. Después de recordar algunos resultados preliminares en la siguiente Sección 2, el observador interconectado propuesto se presenta en la Sección 3 y se discuten sus propiedades principales. Un ejemplo de simulación en la Sección 4 ilustra el resultado. La prueba de los resultados está contenida en la Sección 5. Las conclusiones finalizan el artículo.

2. RESULTADOS PRELIMINARES

Recordaremos la homogeneidad, que es una propiedad importante para los resultados de este artículo.

Para un vector $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ dado el operador de dilatación está definido como $\Delta_\epsilon^r x := (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)$, $\forall \epsilon > 0$, donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas. Sea $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ el vector de pesos. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o un campo vectorial multivaluado $F(x) \subset \mathbb{R}^n$) se denomina $\mathbf{r}$ -homogéneo de grado $m \in \mathbb{R}$ si se satisface la identidad $V(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m V(x)$ (resp., $f(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r f(x)$, ó $F(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r F(x)$), (Bacciotti y Rosier, 2005; Levant, 2005). Considérese que el vector $\mathbf{r}$ y la dilatación $\Delta_\epsilon^r x$ se han fijado. La norma homogénea está definida por $\|x\|_{\mathbf{r},p} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, para cualquier $p \geq 1$. El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{\mathbf{r},p} = 1\}$ es la correspondiente esfera unitaria.

Funciones y campos vectoriales homogéneos tienen propiedades importantes. Por ejemplo, para una familia de dilataciones $\Delta_\epsilon^r x$ dada y cualesquiera funciones $\mathbf{r}$ -homogéneas continuas V_1, V_2 (respectivamente, un campo vectorial f_1 continuo) de grados m_1, m_2 (resp., l_1), se cumple (Bacciotti y Rosier, 2005): (i) $V_1 V_2$ es $\mathbf{r}$ -homogénea de grado $m_1 + m_2$. (ii) Existe una constante $c_1 > 0$ tal que $V_1 \leq c_1 \|x\|_{\mathbf{r},p}^{m_1}$. Adicionalmente, si V_1 es positiva definida, existe $c_2 > 0$ tal que $V_1 \geq c_2 \|x\|_{\mathbf{r},p}^{m_1}$. (iii) $\partial V_1(x) / \partial x_i$ es $\mathbf{r}$ -homogénea de grado $m_1 - r_i$, donde r_i es el peso de x_i . (iv) $L_f V_1(x)$ es $\mathbf{r}$ -homogénea de grado $m_1 + l_1$.

Los sistemas homogéneos poseen propiedades importantes, como por ejemplo, que la estabilidad local es equivalente a la estabilidad global y que si el grado de homogeneidad es negativo, estabilidad asintótica equivale a estabilidad en tiempo finito (Bacciotti y Rosier, 2005; Levant, 2005): Asíumase que el origen de la Inclusión Diferencial de Filippov, $\dot{x} \in F(x)$, es fuerte, local y asintóticamente estable y que el campo vectorial multivaluado F es $\mathbf{r}$ -homogéneo de grado $l < 0$; entonces, $x = 0$ es fuerte y globalmente estable en tiempo finito y el tiempo de asentamiento $T(x_0)$ es continuo en cero y localmente acotado.

3. EL OBSERVADOR INTERCONECTADO PROPUESTO

La convergencia del observador homogéneo (3) requiere una condición de crecimiento de la no linealidad φ , que deberá ser satisfecha también para el observador interconectado que se propondrá en esta sección. Defínase como $\mathcal{Z} = \mathcal{O}_n(\mathcal{X})$ al conjunto imagen de $\mathcal{X}$ bajo el mapa de observabilidad. La condición requerida por φ está dada por

Hipótesis 1. Asuma que existe un $-1 \leq \delta \leq 0$ y una constante $c > 0$ tales que, para toda pareja $(z, e) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, se satisface

$$|\varphi(z+e) - \varphi(z)| \leq c \sum_{j=1}^n |e_j|^{\frac{1-(n-j-1)\delta}{1-(n-j)\delta}}. \quad \square \quad (5)$$

En el caso del observador de alta ganancia, i.e. con $\delta = 0$, la condición (5) corresponde a la bien conocida hipótesis de que la no linealidad debe ser (globalmente) Lipschitz. Para valores de $\delta < 0$ la condición es menos restrictiva (localmente) y corresponde a que φ sea Hölder continua.

El observador interconectado propuesto es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= -\alpha_1 \kappa_1 [\hat{z}_1 - y]^{p_1} + \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= -\beta_1 \kappa_1^2 [\hat{z}_1 - y]^{2p_1-1} + \zeta_3 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_i &= -\alpha_i \kappa_i [\hat{z}_i - \zeta_i]^{p_i} + \zeta_{i+1} \\ \dot{\zeta}_{i+1} &= -\beta_i \kappa_i^2 [\hat{z}_i - \zeta_i]^{2p_i-1} + \zeta_{i+2} \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_{n-1} &= -\alpha_{n-1} \kappa_{n-1} [\hat{z}_{n-1} - \zeta_{n-1}]^{p_{n-1}} + \zeta_n \\ \dot{\zeta}_n &= -\beta_{n-1} \kappa_{n-1}^2 [\hat{z}_{n-1} - \zeta_{n-1}]^{2p_{n-1}-1} + \varphi_S(\hat{z}), \end{aligned} \quad (6)$$

dónde las potencias están dadas por

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1 - (n-i-1)\delta}{1 - (n-i)\delta}, \\ 2p_i - 1 &= \frac{1 - (n-i-2)\delta}{1 - (n-i)\delta}, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (7)$$

y $-1 \leq \delta \leq 0$ corresponde al grado de homogeneidad. La función $\varphi_S(\hat{z})$ es una versión modificada de $\varphi(\hat{z})$, tal que en $\mathcal{Z} = \mathcal{O}_n(\mathcal{X})$ las dos funciones coinciden, i.e. $\varphi_S(\hat{z}) = \varphi(\hat{z})$ para toda $\hat{z} \in \mathcal{Z}$, y fuera de $\mathcal{Z}$ la función modificada $\varphi_S(\hat{z})$ satisface la condición (5) globalmente. Si φ satisface la Hipótesis 1, entonces es posible construir $\varphi_S(\cdot)$ tal que satisfaga la misma hipótesis globalmente.

Nótese que cada uno de los $n-1$ subsistemas $(\hat{z}_i, \zeta_{i+1})$ de segundo orden, dados por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_i &= -\alpha_i \kappa_i [\hat{z}_i - \zeta_i]^{p_i} + \zeta_{i+1} \\ \dot{\zeta}_{i+1} &= -\beta_i \kappa_i^2 [\hat{z}_i - \zeta_i]^{2p_i-1} + \zeta_{i+2}, \end{aligned}$$

corresponde a un observador homogéneo de segundo orden, que busca estimar la variable ζ_i del subsistema anterior, y que tiene una retroalimentación ζ_{i+2} del subsistema siguiente.

En el caso $\delta = 0$ se recupera el observador interconectado propuesto en Astolfi y Marconi (2015), mientras que cuando $\delta = -1$ y $\varphi(\hat{z}) \equiv 0$, se obtiene el diferenciador de Levant propuesto en Moreno (2021). El siguiente teorema muestra que estos sub-observadores cooperan de tal forma que el observador (6) estima en tiempo finito (si $\delta < 0$) el estado del sistema (2), tal como lo hace el observador (3).

Teorema 2. Asuma que la no linealidad $\varphi_S(\cdot)$ satisface la Hipótesis 1 en forma global para alguna $-1 < \delta < 0$. Elíjanse las ganancias $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$, para $i = 1, \dots, n-1$, del observador (6). Entonces existen ganancias positivas $\kappa_i > 0$, para $i = 1, \dots, n-1$, tales que los errores de

observación se anulan después de un tiempo finito T , es decir, para todo $t \geq T$

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i(t) - z_i(t)| &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ |\zeta_i(t) - z_i(t)| &= 0, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

T depende de las condiciones iniciales y de las ganancias seleccionadas. $\square$

La prueba de este Teorema, que usa Funciones de Lyapunov homogéneas suaves, se presentará en la Sección 5.

Nótese que, para evitar confusión en el enunciado, hemos excluido los casos extremos cuando $\delta = 0$ y $\delta = -1$, que ya han sido considerados en Astolfi y Marconi (2015) y Moreno (2021), respectivamente. Cuando $\delta = 0$ la convergencia es exponencial, y no en tiempo finito.

Es fácil ver que cuando existe ruido de medición, el error de observación es Entrada-a-Estados-Estable (ISS por sus siglas en inglés) con respecto al ruido. De igual manera el error de observación es ISS frente a perturbaciones aditivas en cada uno de los canales si $\delta > -1$.

Nótese que el observador propuesto (6) tiene exactamente las mismas propiedades de convergencia que su contraparte clásica (3), y converge bajo las mismas hipótesis. Una diferencia interesante es que el observador propuesto (6) es de dimensión mayor que el observador clásico (3) y, por lo tanto, que la planta. Como consecuencia, para la mayor parte de las variables de estado existen dos estimaciones convergentes.

Aunque la selección de las ganancias $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ en (6) es simple, ya que solo deben ser positivas, las ganancias κ_i tienen que ser seleccionadas de forma apropiada para asegurar la convergencia. De la prueba del Teorema se sabe que deben elegirse suficientemente grandes.

Obsérvese que las potencias a las que aparecen las ganancias κ_i son solo 1 y 2, en contraste con las potencias de la ganancia L en el observador clásico (3), para el cual tales potencias van de 1 hasta n . Tal como ocurre en el Observador de Alta ganancia interconectado, propuesto en Astolfi y Marconi (2015), es de esperarse que estos dos hechos permitan una reducción en la sensibilidad ante el ruido del observador (6) comparado con su contraparte clásica (3).

4. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Para ilustrar el comportamiento de los diferentes observadores, considere un sistema de orden $n = 3$ dado (en la forma de observabilidad) por (2), con $\varphi(z) = -\frac{1}{4}z_2$. Las trayectorias de este sistema evolucionan en un compacto $\mathcal{Z}$. Fuera de tal compacto podemos usar una versión saturada $\varphi_S(z)$ de $\varphi(z)$ en el observador. Por lo tanto la Hipótesis 1 se satisface para cualquier $-1 < \delta \leq 0$.

Consideraremos el diseño de dos observadores clásicos (3): uno homogéneo con $\delta = -\frac{1}{2}$ y otro Observador de Alta Ganancia con $\delta = 0$, y sus correspondientes versiones interconectadas (6), que en este caso toman la forma

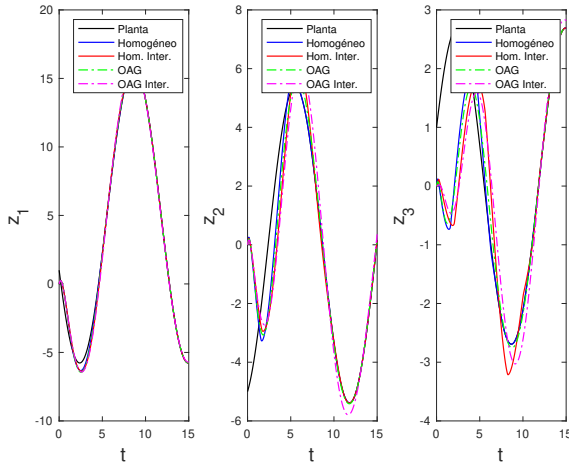


Fig. 1. Variables de estado y sus estimados para los diferentes observadores (sin ruido de medición).

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1 &= -\alpha_1 \kappa_1 [\hat{z}_1 - y]^{p_1} + \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= -\beta_1 \kappa_1^2 [\hat{z}_1 - y]^{2p_1-1} + \zeta_3 \\ \dot{\hat{z}}_2 &= -\alpha_2 \kappa_2 [\hat{z}_2 - \zeta_2]^{p_2} + \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 &= -\beta_2 \kappa_2^2 [\hat{z}_2 - \zeta_2]^{2p_2-1} + \varphi_S(\hat{z}).\end{aligned}$$

Para las simulaciones se seleccionaron las ganancias de la siguiente manera: $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) = (2, 1)$, $(\kappa_1, \kappa_2) = (1.5, 1)$ para los dos observadores interconectados, mientras que para el observador homogéneo y el OAG se utilizaron $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, 1.5\sqrt{3}, 1.1)$ y $L = 1$. Se usó el método explícito de integración de Euler con un paso fijo de integración de tamaño $\tau = 3 \times 10^{-4}$.

Los resultados de las simulaciones se presentan en las Figuras 1-2. En la Figura 1 se presentan los valores de las tres variables de estado z_1, z_2, z_3 (en color negro) y las estimaciones proporcionadas por los diversos observadores. Se puede observar que todos ellos estiman adecuadamente los estados de la planta asintóticamente.

La Figura 2 muestra los errores de estimación de todos los observadores. Aquí se nota claramente que los observadores homogéneos, con $\delta = -\frac{1}{2}$, convergen en tiempo finito, mientras que los OAG, con $\delta = 0$, lo hacen en forma exponencial. Nótese en los recuadros de ampliación, particularmente para e_3 , que con un ruido aditivo de medición $\eta(t) = 0.1 \sin(100t)$, el error de estimación es más pequeño para el observador interconectado que para el original.

5. PRUEBA DEL TEOREMA 2

Definiendo los errores de observación (o estimación) como $e_i = \hat{z}_i - z_i$ para $i = 1, \dots, n-1$, y $\epsilon_i = \zeta_i - z_i$ para $i = 2, \dots, n$, la dinámica del error de estimación está dada por

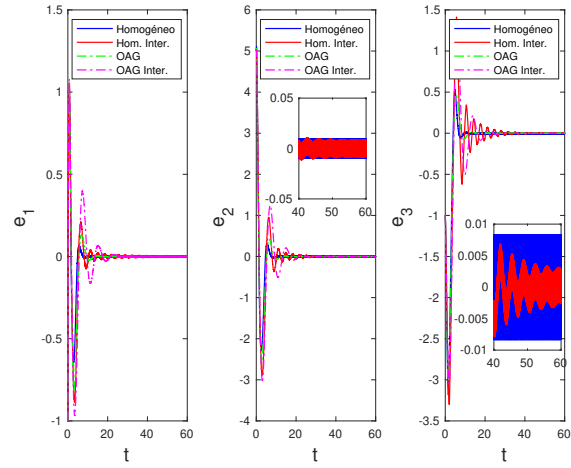


Fig. 2. Errores de observación de los diferentes observadores con ruido de medición $\eta(t) = 0.1 \sin(100t)$.

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -\alpha_1 \kappa_1 [e_1]^{p_1} + \epsilon_2 \\ \dot{e}_2 &= -\beta_1 \kappa_1^2 [e_1]^{2p_1-1} + \epsilon_3 \\ &\vdots \\ \dot{e}_i &= -\alpha_i \kappa_i [e_i - \epsilon_i]^{p_i} + \epsilon_{i+1} \\ \dot{e}_{i+1} &= -\beta_i \kappa_i^2 [e_i - \epsilon_i]^{2p_i-1} + \epsilon_{i+2} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= -\alpha_{n-1} \kappa_{n-1} [e_{n-1} - \epsilon_{n-1}]^{p_{n-1}} + \epsilon_n \\ \dot{\epsilon}_n &= -\beta_{n-1} \kappa_{n-1}^2 [e_{n-1} - \epsilon_{n-1}]^{2p_{n-1}-1} + \phi(e, z),\end{aligned}\tag{8}$$

dónde las potencias p_i están dadas por (7), y la no linealidad $\phi(e, z)$ se define como

$$\phi(e, z) \triangleq \varphi_S(z + e) - \varphi_S(z),$$

que es una forma incremental de la no linealidad φ_S . Cuando $\delta = -1$ la última ecuación de (8) tiene un lado derecho discontinuo, por lo que es necesario considerar las soluciones en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). En la prueba no consideraremos el caso $\delta \neq -1$, ya que requiere algunas consideraciones especiales y ya ha sido considerado en Moreno (2021).

Es fácil mostrar que el sistema (8) es homogéneo, con pesos $r_{e,i}$ para e_i y $r_{\epsilon,i}$ para ϵ_i dados por

$$r_{e,i} = r_{\epsilon,i} = 1 - (n-i)\delta,$$

y grado de homogeneidad δ .

Como es usual para el observador de alta ganancia, realizamos el siguiente cambio de variables

$$\varepsilon_i = l_i e_i, \kappa_i = l_i^{p_i},$$

de tal forma que el sistema (8) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i &= -l_i \alpha_i [\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{p_i} + l_i \epsilon_{i+1} \\ \dot{\epsilon}_{i+1} &= -l_i \beta_i [\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{2p_i-1} + \epsilon_{i+2},\end{aligned}\tag{9}$$

dónde $\epsilon_1 \equiv 0$ y $\epsilon_{n+1} \equiv \phi(e, z)$.

Construimos una función de Lyapunov homogénea y suave para el sistema (8), que nos permitirá mostrar que el origen $(e, \epsilon) = 0$ es estable globalmente en tiempo finito, cuando $-1 < \delta < 0$, o exponencialmente estable si $\delta = 0$. Considere la función homogénea de grado de homogeneidad m

$$V(\varepsilon, \epsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}),$$

dónde

$$V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) = \frac{\gamma_i}{\left(\frac{m_i}{2p_i}\right)} W_i^{\frac{m_i}{2p_i}}(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) - \alpha_h \varepsilon_i [\epsilon_{i+1}]^{\frac{m_i-1}{p_i}},$$

$$W_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) = \frac{1}{2p_i} \beta_i |\varepsilon_i|^{2p_i} + \frac{1}{2} \epsilon_{i+1}^2, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Cada función $V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})$ es homogénea de grado $m_i r_{e,i} = m$, continuamente diferenciable si $m_i \geq p_i + 1$, y positiva definida para $\gamma_i > 0$ suficientemente grande.

Las derivadas parciales de $V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})$ están dadas por

$$\frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \varepsilon_i} = \gamma_i W_i^{\frac{m_i-2p_i}{2p_i}} \beta_i [\varepsilon_i]^{2p_i-1} - \alpha_h [\epsilon_{i+1}]^{\frac{m_i-1}{p_i}}$$

$$\frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \epsilon_{i+1}} = \gamma_i W_i^{\frac{m_i-2p_i}{2p_i}} \epsilon_{i+1} - \alpha_h \frac{m_i-1}{p_i} \varepsilon_i |\epsilon_{i+1}|^{\frac{m_i-1-p_i}{p_i}}$$

que son homogéneas de grados $(m_i - 1) r_{e,i}$ y $(m_i - p_i) r_{e,i}$, respectivamente.

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema de error (9) está dada por

$$\dot{V}(\varepsilon, \epsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{V}_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}; \epsilon_i, \epsilon_{i+2}),$$

dónde

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -l_i \mathcal{W}_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) \\ &\quad - l_i \alpha_i \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \varepsilon_i} ([\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{p_i} - [\varepsilon_i]^{p_i}) \\ &\quad - l_i \beta_i \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \epsilon_{i+1}} ([\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{2p_i-1} - [\varepsilon_i]^{2p_i-1}) \\ &\quad + \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \epsilon_{i+1}} \epsilon_{i+2}, \\ \mathcal{W}_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) &= \alpha_i \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \varepsilon_i} [\varepsilon_i]^{p_i} - \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \varepsilon_i} \epsilon_{i+1} \\ &\quad + \beta_i \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \epsilon_{i+1}} [\varepsilon_i]^{2p_i-1} \\ &= \alpha_i \gamma_i W_i^{\frac{m_i-2p_i}{2p_i}} \beta_i |\varepsilon_i|^{3p_i-1} + \alpha_h |\epsilon_{i+1}|^{\frac{m_i+p_i-1}{p_i}} \\ &\quad - \alpha_i \alpha_h [\varepsilon_i]^{p_i} [\epsilon_{i+1}]^{\frac{m_i-1}{p_i}} - \beta_i \alpha_h \frac{m_i-1}{p_i} |\varepsilon_i|^{2p_i} |\epsilon_{i+1}|^{\frac{m_i-1-p_i}{p_i}}. \end{aligned}$$

$\dot{V}_i$ y $\mathcal{W}_i$ son homogéneas de grado $(m_i + p_i - 1) r_{e,i}$. $\mathcal{W}_i$ puede hacerse positiva definida seleccionando $\gamma_i > 0$ suficientemente grande. Ya que $0 < p_i < 1$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $0 < 2p_i - 1 < 1$ para $i = 1, \dots, n-2$, todos los términos $([\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{p_i} - [\varepsilon_i]^{p_i})$

y $([\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{2p_i-1} - [\varepsilon_i]^{2p_i-1})$ son continuos tipo Hölder y entonces

$$|[\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{p_i} - [\varepsilon_i]^{p_i}| \leq l_i^{p_i} 2^{p_i+1} |\epsilon_i|^{p_i}$$

$$|[\varepsilon_i - l_i \epsilon_i]^{2p_i-1} - [\varepsilon_i]^{2p_i-1}| \leq l_i^{2p_i-1} 2^{2p_i} |\epsilon_i|^{2p_i-1}.$$

Como consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -l_1 \mathcal{W}_1(\varepsilon_1, \epsilon_2) + \left| \frac{\partial V_1(\varepsilon_1, \epsilon_2)}{\partial \epsilon_2} \right| |\epsilon_3| \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \left\{ -l_i \mathcal{W}_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) + l_i^{p_i+1} T_{\varepsilon,i}(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) |\epsilon_i|^{p_i} \right. \\ &\quad \left. + l_i^{2p_i} T_{\epsilon,i+1}(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) |\epsilon_i|^{2p_i-1} + \left| \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \epsilon_{i+1}} \right| |\epsilon_{i+2}| \right\}, \end{aligned}$$

dónde

$$T_{\varepsilon,i}(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) = 2^{p_i+1} \alpha_i \left| \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \varepsilon_i} \right|$$

$$T_{\epsilon,i+1}(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) = 2^{2p_i} \beta_i \left| \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \epsilon_{i+1}} \right|.$$

Nótese que $\mathcal{W}_1(\varepsilon_1, \epsilon_2)$ es no negativa y se anula en el conjunto $\mathcal{S}_1 = \{(\varepsilon_1, \epsilon_2) = 0\}$. Evaluando $\dot{V}(\varepsilon, \epsilon)$ en $\mathcal{S}_1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{\mathcal{S}_1} &\leq -l_2 \mathcal{W}_2(\varepsilon_2, \epsilon_3) + \left| \frac{\partial V_2(\varepsilon_2, \epsilon_3)}{\partial \epsilon_3} \right| |\epsilon_4| \\ &\quad + \sum_{i=3}^{n-1} \left\{ -l_i \mathcal{W}_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) + l_i^{p_i+1} T_{\varepsilon,i}(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) |\epsilon_i|^{p_i} \right. \\ &\quad \left. + l_i^{2p_i} T_{\epsilon,i+1}(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1}) |\epsilon_i|^{2p_i-1} + \left| \frac{\partial V_i(\varepsilon_i, \epsilon_{i+1})}{\partial \epsilon_{i+1}} \right| |\epsilon_{i+2}| \right\}. \end{aligned}$$

Si $\dot{V}|_{\mathcal{S}_1}$ es negativa definida (en sus variables), entonces $\dot{V}(\varepsilon, \epsilon)$ puede hacerse negativa definida mediante la selección de $l_1 > 0$ suficientemente grande.

Ahora, considerando $\dot{V}|_{\mathcal{S}_1}$ se observa que $\mathcal{W}_2(\varepsilon_2, \epsilon_3)$ es no negativa, y se hace cero en el conjunto $\mathcal{S}_2 = \{(\varepsilon_1, \epsilon_2) = (\varepsilon_2, \epsilon_3) = 0\}$. Y $\dot{V}|_{\mathcal{S}_1}$ puede hacerse negativa definida mediante la selección de $l_2 > 0$ suficientemente grande si $\dot{V}|_{\mathcal{S}_2}$ es negativa definida.

Procediendo recursivamente de esta forma obtenemos al final del proceso que es necesario mostrar que

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{\mathcal{S}_{n-2}} &= \frac{\partial V_{n-1}}{\partial \varepsilon_{n-1}} [-l_{n-1} \alpha_{n-1} [\varepsilon_{n-1}]^{p_{n-1}} + l_{n-1} \epsilon_n] \\ &\quad + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial \epsilon_n} [-l_{n-1} \beta_{n-1} [\varepsilon_{n-1}]^{2p_{n-1}-1} + \phi(e, z)|_{\mathcal{S}_{n-2}}] \end{aligned}$$

es negativa definida. Nótese que

$$\phi(e, z)|_{\mathcal{S}_{n-2}} = \phi([0, \dots, 0, e_{n-1}, \epsilon_n]^T, z).$$

Además, por la Hipótesis 1 se tiene que

$$\left| \phi([0, \dots, 0, e_{n-1}, \epsilon_n]^T, z) \right| \leq c \left(|e_{n-1}|^{\frac{1}{1-\delta}} + |\epsilon_n|^{1+\delta} \right).$$

Usando el procedimiento antes descrito, se puede mostrar que $\dot{V}|_{\mathcal{S}_{n-2}} < 0$.

Usando el Lemma 12 de Cruz-Zavala y Moreno (2017) podemos entonces concluir que es posible hacer que $\dot{V} < 0$ mediante la selección sucesiva de ganancias $\kappa_{n-2}, \kappa_{n-3} \dots, \kappa_1$ suficientemente grandes.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha podido extender al caso de los observadores homogéneos de cualquier grado de homogeneidad no positivo, el resultado que obtuvieron Astolfi y Marconi (2015) para el observador de alta ganancia, que reduce el efecto del ruido, pero no el fenómeno de pico. El observador homogéneo obtenido tiene dimensión $2n - 1$ y converge bajo las mismas condiciones que su contraparte de dimensión n y posee las mismas propiedades.

Este resultado sienta las bases para desarrollar un observador homogéneo con sensibilidad reducida al ruido y sin efecto de pico, tal como se ha logrado en Astolfi et al. (2018) para el observador de alta ganancia. Alcanzar tal objetivo ofrecería por primera vez en la literatura un observador homogéneo sin fenómeno de pico y una alternativa a los métodos de atenuación de ruido de medición propuestos, por ejemplo, por (Levant y Yu, 2018; Jbara et al.), con el denominado "Diferenciador Filtrado", o a los métodos que usan Filtros pasabajos propuestos por Khalil y Priess (2016) para el observador de alta ganancia.

AGRADECIMIENTOS

Investigación realizada con apoyo del Programa UNAM-PAPIIT IN102121.

BIBLIOGRAFÍA

- Andrieu, V., Praly, L., y Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4), 1814–1850.
- Astolfi, D. y Marconi, L. (2015). A high-gain nonlinear observer with limited gain power. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(11), 3059–3064. doi: 10.1109/TAC.2015.2408554.
- Astolfi, D., Marconi, L., Praly, L., y Teel, A.R. (2018). Low-power peaking-free high-gain observers. *Automatica*, 98, 169–179. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.09.009>.
- Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. 2nd ed. Springer-Verlag. New York, USA.
- Bernard, P., Praly, L., y Andrieu, V. (2017). Observers for a non-Lipschitz triangular form. *Automatica*, 82, 301 – 313. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.04.054>.
- Cruz-Zavala, E. y Moreno, J.A. (2016). Lyapunov functions for continuous and discontinuous differentiators. *IFAC-PapersOnLine*, 49(18), 660–665. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.10.241. 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2016.
- Cruz-Zavala, E. y Moreno, J.A. (2019). Levant's arbitrary order exact differentiator: a Lyapunov approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(7), 3034–3039. doi:10.1109/TAC.2018.2874721.
- Cruz-Zavala, E. y Moreno, J. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A Lyapunov approach. *Automatica*, 80, 232–238. doi: 10.1016/j.automatica.2017.02.039.
- Filippov, A. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand side*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands.
- Gauthier, J.P., Hammouri, H., y Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 875–880. doi:10.1109/9.256352.
- Jbara, A., Levant, A., and Hanan, A. (2021). Filtering homogeneous observers in control of integrator chains. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31: 3658–3685. doi:10.1002/rnc.5295.
- Khalil, H.K. y Praly, L. (2014). High-gain observers in nonlinear feedback control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 24, 993–1015.
- Khalil, H.K. y Priess, S. (2016). Analysis of the use of low-pass filters with high-gain observers. *IFAC-PapersOnLine*, 49(18), 488–492.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, third edition.
- Levant, A. (2003). High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *Int. J. Control*, 76(9), 924–941.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41, 823–830.
- Levant, A. y Yu, X. (2018). Sliding-mode-based differentiation and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(9), 3061–3067.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384.
- Lopez-Ramirez, F., Polyakov, A., Efimov, D., y Perruquetti, W. (2018). Finite-time and fixed-time observer design: Implicit lyapunov function approach. *Automatica*, 87, 52 – 60.
- Moreno, J. (2021). Levant's differentiator by interconnection of low order blocks. 3rd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2021, Tokyo, Japan 15-17th Sept. 2021.
- Moreno, J.A. y Besançon, G. (2021). On multi-valued observers for a class of single-valued systems. *Automatica*, 123, 109334. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109334>.
- Perruquetti, W., Floquet, T., y Moulay, E. (2008). Finite-time observers: application to secure communication. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 53(2), 356–360.
- Qian, C. y Lin, W. (2006). Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 51(9), 1457–1471.