

\mathcal{H}_∞ Adaptive observer for nonlinear systems with uncertainties

P.-E. Alvarado-Méndez* C.-M. Astorga-Zaragoza*
O. Hernández-González** G.-L. Osorio-Gordillo*
F. Ramírez-Rasgado*

* *Tecnológico Nacional de México: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Mor., México.*

** *CONACYT: Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

Abstract:

In this work parameter and state estimation are studied for a class of Lipschitz nonlinear systems with faults in the system. A robust adaptive nonlinear observer is proposed to achieve state and unknown parameter estimation. The behavior of the nonlinear system in the presence of external disturbances is analyzed. The observer has a nonlinear structure, which consists of a \mathcal{H}_∞ adaptive observer to estimate the unknown parameter, in order to monitor the system performance by attenuating of the unknown input and thus achieves the insensitivity of the observer. The stability analysis is performed based on the Lyapunov stability theory, where an ideal condition for the stability of the observer is ensured, satisfying the performance of the \mathcal{H}_∞ criterion. Numerical simulations of an automobile suspension system are carried out in which the tire stiffness is estimated and the vehicle performance caused by the perturbation is monitored. The results show that the proposed observer can accurately estimate the system state and the unknown parameter.

Keywords: Nonlinear systems, \mathcal{H}_∞ , Nonlinear adaptive observer.

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema no lineal con perturbaciones puede representar de manera más realista el funcionamiento de un sistema físico, por lo cual su investigación se ha convertido en un tópico de interés en el área de control automático. Los primeros diseños de observadores para este tipo de sistemas fueron inicialmente considerados por Thau (1973), quien proporcionó una condición suficiente para garantizar la estabilidad asintótica del error de observación. Inspirados en ese trabajo, varios autores han realizado estudios acerca del diseño de observadores para sistemas Lipschitz utilizando diversos enfoques, entre ellos se destacan los trabajos de Zemouche et al. (2017), Zemouche et al. (2016) y Shaheen et al. (2020).

Uno de los problemas de diseño de observadores para sistemas no lineales son las incertidumbres del sistema. Éstas están relacionadas principalmente a entradas desconocidas que pueden representar desgastes de ciertos elementos del sistema físico y otros agentes externos que repercuten en la dinámica de los sistemas. Existen distintos trabajos que abordan esta problemática, por ejemplo, en (Osorio-Gordillo et al., 2015) se diseñó un observador para sistemas lineales descriptivos, considerando una perturbación en la entrada, donde se satisface la norma

H_∞ , obteniendo la ganancia por medio de la solución de un conjunto de LMIs. Otro trabajo interesante es presentado por Ren (2020), el cual aborda el problema de la estimación de fallas aplicado a vehículos aéreos no tripulados, por medio de un observador H_∞ , logrando estimar las fallas del actuador y los estados del sistema. Por otro lado, los autores en Xia et al. (2020) proponen un observador adaptable H_∞ para estimar las dinámica del chasis de un vehículo, con el fin de estimar las fallas de los sensores defectuosos. La estabilidad se garantiza mediante un análisis de Lyapunov y la optimización de LMIs. Finalmente, Raoufi et al. (2010) presenta un observador robusto en modo deslizante con desempeño H_∞ aplicado a sistemas no lineales Lipschitz inciertos donde se consideran tanto fallas como perturbaciones.

Los observadores adaptables son un algoritmo recursivo para la estimación conjunta de parámetros y variables de estado es sistemas dinámicos. Existe suficiente literatura para abordar observadores adaptables para sistemas con parámetros desconocidos Dochain and Perrier (2002), Zhang (2002), Besançon (2007), Besançon (2000). En Farza et al. (2018), los autores proponen un observador adaptable de alta ganancia cuya ganancia se deriva de la resolución de una ecuación diferencial de Lyapunov y estableciendo su convergencia exponencial bajo una



Fig. 1. Esquema suspensión semiactiva

propiedad de excitación persistente. Estos enfoques no consideran incertidumbres y es aquí donde el enfoque \mathcal{H}_∞ minimiza la ganancia, con ellos se logra atenuar los errores de estimación del estado y de los parámetros desconocidos.

Uno de los principales retos de diseño de observadores adaptables es derivar una condición suficiente mediante la optimización de las LMIs para minimizar la ganancia \mathcal{H}_∞ entre el error de estimación y las perturbaciones. Al mismo tiempo se debe garantizar la solución de la LMI, para asegurar la estimación de los estados del sistema y estimar el parámetro desconocido al presentarse una perturbación en el sistema no lineal. En el trabajo Méndez et al. (2019) se asegura la convergencia sin considerar la presencia de perturbaciones en los estados, el efecto de las perturbaciones será analizado en este trabajo, permitiendo tratar sistemas más realistas. En este trabajo se aborda esta problemática y se evalúa el observador adaptable H_∞ propuesto en la estimación del parámetro de rigidez de la llanta. Al estimar este parámetro se pueden prevenir daños totales en el sistema de la suspensión. La estructura de este artículo es la siguiente: el desarrollo del modelo de la suspensión semiactiva se presenta en la sección 2. El diseño del observador adaptable utilizando el enfoque \mathcal{H}_∞ se presenta en la sección 3. En la sección 4 se presenta la demostración del Teorema propuesto en la sección 3, donde se demuestra que el error de observación convergerá a una región cerca del origen sujeta a la condición de \mathcal{H}_∞ en presencia de perturbación en los estados. Finalmente en la sección 5 se muestran los resultados en simulación se presentan las conclusiones en la sección 6.

2. MODELO DE LA SUSPENSIÓN SEMIACTIVA

En esta sección se presenta el modelo de un cuarto de una suspensión semiactiva de automóvil, el cual corresponde a la parte frontal derecha del automóvil. Este sistema está integrado por un amortiguador Magnetoreológico (MR), el modelo matemático es el siguiente (Guo et al., 2006):

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_s(t) &= -k_s(z_s(t) - z_{us}(t)) - F_{MR}(t) & (1) \\ m_{us} \ddot{z}_{us}(t) &= k_s(z_s(t) - z_{us}(t)) - k_t(z_{us}(t) - z_r(t)) \\ &\quad + F_{MR}(t) & (2) \end{aligned}$$

Las salidas están dadas por:

$$y_1(t) = z_s(t), \quad y_2(t) = z_{us}(t), \quad (3)$$

$$y_3(t) = z_s(t) - z_{us}(t) = z_{def}(t) \quad (4)$$

La descripción del comportamiento dinámico de la fuerza de amortiguamiento semiactiva (F_{MR}) de un amortiguador magnetoreológico, con la inclusión de una señal de manipulación (corriente eléctrica) se representa de la siguiente forma:

$$F_{MR}(t) = I f_c \rho(t) + b_1 \dot{z}_{def}(t) + b_2 z_{def}(t) + F_\delta(t), \quad (5)$$

donde $F_\delta(t)$ representa una falla aditiva en la fuerza de amortiguamiento y $\rho(t)$ es la parte no-lineal que representa la histéresis de la fuerza proporcionada por el amortiguador magnetoreológico (Martínez et al., 2016), dicha no linealidad se describe de la siguiente forma:

$$\rho(t) = \tanh(a_1 \dot{z}_{def}(t) + a_2 z_{def}(t)). \quad (6)$$

Sustituyendo la Ec. (5) en el sistema conformado por las Ecs. (1) y (2) y considerando $z_{def} = z_s - z_{us}$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_s(t) &= -k_s(z_s(t) - z_{us}(t)) - I f_c \rho(t) - \\ &\quad b_1 \dot{z}_{def}(t) - b_2 z_{def}(t) - F_\delta(t) & (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{us} \ddot{z}_{us}(t) &= k_s(z_s(t) - z_{us}(t)) - k_t(z_{us}(t) - z_r(t)) + \\ &\quad I f_c \rho(t) + b_1 \dot{z}_{def}(t) + b_2 z_{def}(t) + F_\delta(t) & (8) \end{aligned}$$

Las Ecs. (7) y (8) representan la dinámica del sistema no lineal original dado por las Ecs. (1) y (2), donde z_s representa la posición vertical de la masa no suspendida y z_{us} representa la posición vertical de la masa suspendida, con estas Ecs. será posible diseñar un observador adaptable.

3. OBSERVADOR ADAPTABLE CON H_∞

El problema es diseñar un observador adaptable \mathcal{H}_∞ para el sistema dinámico dado por las Ecs. (7) y (8) que representa una suspensión. El observador debe ser capaz de estimar el coeficiente de rigidez de la llanta $k_t(t)$ en la masa no suspendida para poder detectar cuando la llanta se encuentre en una condición no deseada. Las Ecs. (7) y (8) pueden escribirse en la siguiente forma condensada:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + \Psi(y, u) + \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta + N\eta \\ y = Cx \end{cases} \quad (9)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros. Los vectores $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representan las variables de entrada y salida respectivamente y $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$ representa una perturbación acotada. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $N \in \mathbb{R}^{n \times l}$ son matrices de dimensiones apropiadas.

Las funciones no lineales $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u)$ son Lipschitz con respecto a las variables de estado. En consecuencia para un valor acotado de θ , la función no lineal $\Phi(x, \theta, u, t) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta$ satisface la condición de Lipschitz:

$$\|\Phi(x, \theta, u) - \Phi(\hat{x}, \theta, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\| \quad (10)$$

siendo γ la constante Lipschitz.

El observador adaptable para el sistema anterior tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Psi(y, u) + \Phi_1(\hat{x}, u) + B\Phi_2(x, u)\hat{\theta} \\ \quad -L(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma\Phi_2^T H(y - C\hat{x}), \text{ donde } \Gamma > 0, \end{cases} \quad (11)$$

siendo \hat{x} y $\hat{\theta}$ las estimaciones del vector de estados y del vector de parámetros. Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse de tal forma que se garantice la convergencia de los estados y parámetros estimados. El observador dado por la Ec. (11), se emplea para estimar simultáneamente las variables de estado $x(t)$ y los parámetros desconocidos $\theta(t)$, siempre y cuando la función $\Phi(x(t), \theta(t), u(t), t)$ sea Lipschitz.

Por lo tanto podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1. Considere el sistema no lineal (9), donde las funciones no lineales Φ_1 y Φ_2 satisfacen la condición Lipschitz y la función desconocida η es acotada. Entonces, si existe una matriz $P = P^T > 0$, una matriz R y una matriz $Q > 0$, tal que satisfagan la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + R & PN & C^T \\ N^T P & -\beta I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

entonces, el estado del observador adaptable H_∞ (11) convergerá exponencialmente a una región sujeta a la condición H_∞ . La ganancia del observador es $L = P^{-1}Q$.

4. PRUEBA DEL TEOREMA 1

Los errores de observación se definen como:

$$e_x(t) = x - \hat{x}, \quad e_\theta(t) = \theta - \hat{\theta} \quad (13)$$

$$r(t) = Ce_x \quad (14)$$

Las dinámicas de e_x y e_θ son:

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (15)$$

$$\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} \quad (16)$$

Sustituyendo (9) y (11) en (15), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= Ax + B\Phi_2\theta(t) + N\eta + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) \\ &\quad - A\hat{x} - B\Phi_2\hat{\theta}(t) + LC(x - \hat{x}) \\ &= (A + LC)e_x + (\Phi_1(x, u) - \Phi_1(\hat{x}, u)) + N\eta \\ &\quad + B\Phi_2e_\theta \end{aligned} \quad (17)$$

Considerando que θ se mantiene constante en θ_0 , se tiene que $\dot{\theta} = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta(t) &= \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = 0 - \Gamma\Phi_2^T BH[(Cx - C\hat{x})] \\ \dot{e}_\theta(t) &= -\Gamma\Phi_2^T BHCe_x \end{aligned} \quad (18)$$

Aplicando el criterio H_∞ , donde β es el factor de atenuación y r se muestra en la Ec. (14).

$$Jr = \dot{V}(t) + r^T r \leq \beta^2 \eta^T \eta \quad (19)$$

Se propone la siguiente función cuadrática de Lyapunov:

$$V(t) = e_x^T P e_x + e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta, \quad P > 0, \quad \Gamma^{-1} > 0 \quad (20)$$

La derivada de la función de Lyapunov es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_x^T P \dot{e}_x + \dot{e}_x^T P e_x + e_\theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\theta + \dot{e}_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta \\ &\leq e_x^T P(A + LC)e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} + e_x^T PN\eta \\ &\quad + e_x^T PB\Phi_2 e_\theta(t) + e_x^T (A + LC)^T P e_x \\ &\quad + e_{\Phi_1}^T P e_x + \eta(t)^T N^T P e_x + e_\theta^T \Phi_2^T B^T P e_x \\ &\quad - e_\theta^T(t) \Phi_2^T H C e_x - e_x^T C^T H^T \Phi_2 e_\theta \end{aligned} \quad (21)$$

Observe que si se satisface la igualdad $B^T P C^\perp = 0$, esto implica que existe una matriz H , tal que $B^T P = HC$ (Ekramian et al., 2013). Con esta consideración, la desigualdad anterior se simplifica quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq e_x^T P(A + LC)e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} + e_x^T PN\eta \\ &\quad + e_x^T (A + LC)^T P e_x + e_{\Phi_1}^T P e_x + \eta^T N^T P e_x \end{aligned} \quad (22)$$

Considerando que $r = Ce_x$, y reemplazando $\dot{V}(t)$ en la Ec. (19), esta queda:

$$\begin{aligned} J_r &= e_x^T P(A + LC)e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} + e_x^T PN\eta \\ &\quad + e_x^T (A + LC)^T P e_x + e_{\Phi_1}^T P e_x + \eta(t)^T N^T P e_x \\ &\quad + e_x^T C^T C e_x - \beta^2 \eta(t)^T \eta \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Basándose en la condición de Lipschitz generalizada: $e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1} \leq e_x^T R e_x$, propuesto en Ekramian et al. (2011), donde Q y R son matrices simétricas positivas definidas, se obtiene:

$$\begin{aligned} e_x^T [P(A + LC) + (A + LC)^T P + C^T C] e_x + e_x^T PN\eta \\ + \eta^T N^T P e_x - \beta^2 \eta^T \eta + e_{\Phi_1}^T P e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} \leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Se simplifica (Ekramian et al., 2013):

$$\begin{aligned} e_{\Phi_1}^T P e_x + e_x^T P e_{\Phi_1} &= 2e_x^T P e_{\Phi_1} \\ &= e_x^T P Q^{-1} P e_x + e_{\Phi_1}^T Q e_{\Phi_1} \end{aligned} \quad (25)$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} e_x^T [P(A + LC) + (A + LC)^T P + C^T C + P Q^{-1} P + R] e_x \\ + \eta(t)^T N^T P e_x - \beta^2 \eta^T \eta \leq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Se ordena de forma matricial y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ \eta \end{bmatrix}^T \zeta \begin{bmatrix} e_x \\ \eta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (27)$$

donde:

$$\zeta = \begin{bmatrix} P(A + LC) + (A + LC)^T P + C^T C + P Q^{-1} P + R & PN \\ N^T P & -\beta^2 I \end{bmatrix}$$

Finalmente se obtiene la LMI resultante, simplificando el siguiente término $Q = PL$, logrando:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + C^T C + R & PN \\ N^T P & -\beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

Ahora, aplicando el complemento de Schur, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + R & PN & C^T \\ N^T P & -\beta^2 I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

Al existir un elemento al cuadrado, se simplifica $\beta^2 = \bar{\beta}$, para que sea una LMI, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} PA + QC + A^T P + C^T Q^T + R & PN & C^T \\ N^T P & -\bar{\beta} I & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

Considerando el criterio de H_∞ , se asegura que el ruido y la perturbación están acotadas. Resolviendo la LMI se obtiene la ganancia del observador $L = P^{-1}Q$. ■

4.1 Observador adaptable aplicado a una suspensión semiactiva del automóvil

Considere el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_s(t) & x_3(t) &= z_{us}(t) \\ x_2(t) &= \dot{z}_s(t) = \dot{x}_1(t) & x_4(t) &= \dot{z}_{us}(t) = \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{z}_s(t) & \dot{x}_4(t) &= \ddot{z}_{us}(t) \end{aligned}$$

Entonces el modelo dado por las Ecs. (7) y (8) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{b_1}{m_s} x_1(t) - \frac{b_2 + k_s}{m_s} x_2(t) + \frac{b_1}{m_s} x_3 \\ &+ \frac{b_2 + k_s}{m_s} x_4 - \frac{f_c \rho(t)}{m_s} I(t) - \frac{1}{m_s} F_\delta \\ \dot{x}_2(t) &= x_1 \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{b_1}{m_{us}} x_1(t) + \frac{b_2 + k_s}{m_{us}} x_2(t) - \frac{b_1}{m_{us}} x_3 \\ &- \frac{b_2 + k_s + k_t}{m_{us}} x_4(t) + \frac{f_c \rho(t)}{m_{us}} I(t) + \frac{1}{m_{us}} F_\delta \\ &+ \frac{k_t}{m_{us}} z_r(t) \\ \dot{x}_4(t) &= x_3 \end{aligned} \quad (31)$$

Los vectores de estado, de salida y de entrada son respectivamente:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} F_\delta \\ I \\ z_r \end{bmatrix}$$

donde y_1 es la posición del chasis, $y_2(t)$ es la posición de la llanta y y_3 es la diferencia de posiciones.

Reescribiendo las Ecs. (31), en la forma del sistema adaptable (9), y considerando una perturbación en los estados, se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b_1}{m_s} & -\frac{b_2 + k_s}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & \frac{b_2 + k_s}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{m_{us}} & \frac{b_2 + k_s}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2 + k_s}{m_{us}} \\ \frac{b_1}{m_{us}} & \frac{b_2 + k_s}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2 + k_s}{m_{us}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad x(t)$$

$$\begin{aligned} &+ \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_c \rho}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho}{m_{us}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Psi(y(t), u(t))} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} \\ 0 \\ \frac{1}{m_{us}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_1(x(t), u(t))} F_\delta(t) \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} z_r(t) - x_4(t) \\ m_{us} \end{bmatrix}}_{\Phi_2(x(t), u(t))} \underbrace{\theta(t)}_{k_t(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_N \eta(t) \end{aligned} \quad (32)$$

Las salidas del sistema son:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \quad (33)$$

Las funciones no lineales $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u, t)$ satisfacen las condiciones Lipschitz con respecto a las variables de estado (Besançon, 2000). En consecuencia para un valor acotado de $\theta(t)$, la función no lineal $\Phi(x, \theta, u, t) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta$ satisface la condición de Lipschitz:

$$\|\Phi(x, \theta, u, t) - \Phi(\hat{x}, \theta, u, t)\| \leq \alpha \|x(t) - \hat{x}(t)\| \quad (34)$$

siendo α la constante Lipschitz.

Por lo tanto, el observador (11) se emplea para estimar simultáneamente las variables de estado y los parámetros desconocidos $\theta(t)$, siempre y cuando la función $\Phi(x, \theta, u, t) = \Phi_1(x, u) + B\Phi_2(x, u)\theta$ sea Lipschitz.

Para el diseño del observador del sistema (9), se verifica que la función $\Phi(x, \theta, u, t)$ sea Lipschitz, es decir, que las funciones $\Phi_1(x(t), u(t))$ y $\Phi_2(x(t), u(t))$ sean Lipschitz, para la cual se obtiene la norma de sus Jacobianos, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial \Phi_1(x(t), u(t))}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_{us}} \end{bmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_1(x(t), u(t))}{\partial x} \right\|_1 = 0 \quad \left\| \frac{\partial \Phi_2(x(t), u(t))}{\partial x} \right\|_1 = \frac{1}{m_{us}}$$

Debido a que la norma del Jacobiano con respecto al vector de estados x de $\Phi_1(x, u)$ y $\Phi_2(x, u, t)$, son acotadas y si además se asume que $F_\delta(t)$ es una función suave, entonces el sistema (9) es Lipschitz.

Considerando que el parámetro a estimar es el coeficiente de rigidez del resorte $k_t(t)$, entonces el observador (11) para el sistema (9) es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\hat{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b_1}{m_s} & -\frac{b_2+k_s}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & -\frac{b_2+k_s}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{m_{us}} & \frac{b_2+k_s}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{b_2+k_s}{m_{us}} \\ \frac{0}{m_{us}} & \frac{0}{m_{us}} & 1 & \frac{0}{m_{us}} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\hat{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_c \rho(t)}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho(t)}{m_{us}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Psi(y,u)} I(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{0}{m_{us}} \end{bmatrix}}_{\Phi_1(\hat{x}(t),u(t))} F_\delta(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} z_r(t) - x_4(t) \\ m_{us} \end{bmatrix}}_{\Phi_2(\hat{x}(t),\theta(t),u(t))} \hat{\theta}(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \left[\frac{z_r(t) - \hat{x}_4(t)}{m_{us}} \right] H(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Las matrices L y H son las ganancias del observador y deben seleccionarse para garantizar la convergencia de los estados y parámetros estimados a los reales.

El único requisito para elegir la ganancia $\Gamma > 0$ es que debe ser un escalar positivo. En este caso se elige $\Gamma = 50$, debido a que este valor permite un tiempo de convergencia adecuado del observador. Mientras mayor sea el valor de Γ , menor es el tiempo de convergencia, pero a la vez se incrementa la sensibilidad del observador al ruido de medición.

La ganancia del observador se obtiene resolviendo la LMI presentada en el Teorema (30) con el Toolbox YALMIP para MATLAB, con la cual se obtienen las siguientes matrices:

$$L = \begin{bmatrix} -36.0828 & 43.6414 & -134.1128 \\ 23.9826 & -10.1124 & -26.9517 \\ 252.2604 & -225.6410 & 456.9801 \\ 15.4096 & -7.3653 & -21.7135 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$H = [-1.3453 \quad -1.2802 \quad -0.0651] \quad (36)$$

5. RESULTADOS

Para evaluar el funcionamiento del observador propuesto, se utilizaron los parámetros presentados en (Martínez et al., 2016), buscando estimar el parámetro desconocido k_t que corresponde a la rigidez del neumático. La simulación se implementó en el programa MATLAB 2019a, con un tiempo de simulación de 15 segundos. El método de integración de las ecuaciones diferenciales fue el de Euler con un paso de integración de 5ms. Las condiciones iniciales del sistema y del observador fueron: $x(0) = [0, 0.43, 0, 0.25]^T$ y $\hat{x}(0) = [0.05, 0.48, 0.07, 0.29]^T$. Las entradas del sistema $I(t)$ y F_δ se definen como:

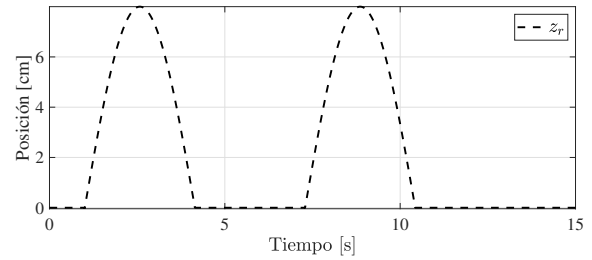


Fig. 2. Perfil del suelo.

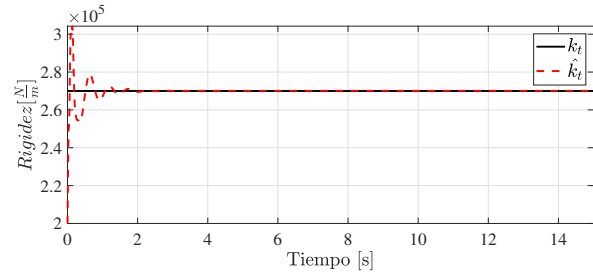


Fig. 3. Rigidez de la llanta

$$I(t) = \begin{cases} 0 \text{ [mA]} & 0 \leq t < 0.5 \\ 2 \text{ [mA]} & t \geq 0.5 \end{cases}$$

$$F_\delta(t) = \begin{cases} 1000 \text{ [N]} & t \geq 0 \end{cases}$$

Se asume un perfil de suelo pasando dos topes consecutivos (z_r) como se muestra en la Fig. 2. Este perfil de suelo se considera de igual forma como una entrada $z_r(t)$.

El sistema presenta una perturbación dada $\eta(t) = 0.2 \sin(t)$. En la Fig. 3 se muestra la estimación del coeficiente de rigidez de la llanta $k_t(t)$, del cual converge a una señal acotada de la perturbación η .

En la Fig. 4(a-b) se observa las estimaciones de la posición del chasis y de la llanta, por parte del observador, comparándola con la posición del chasis y del neumático con perturbación z_u y z_{us} . Se observa la convergencia de las dos señales, donde el error de estimación se va reduciendo a lo largo del tiempo, como se aprecia en la Fig. 4(c). En esta figura se presenta la norma del error de observación, la cual queda acotada a una región cerca del origen que está sujeta a la condición \mathcal{H}_∞ , con lo que se demuestra el Teorema 1 .

6. CONCLUSIÓN

Se logró el diseño de un observador adaptable con enfoque \mathcal{H}_∞ para sistemas no lineales con incertidumbres, donde se logra la estimación de un parámetro desconocido y el estado del sistema a pesar de las perturbaciones presentes. Este observador se aplicó para la supervisión del deterioro de una suspensión semiactiva, basándose en las mediciones de las posiciones. El observador estima el coeficiente de rigidez de la llanta k_t con el fin de supervisar la disminución de la presión del neumático. Por lo tanto, la supervisión de este parámetro, podría utilizarse

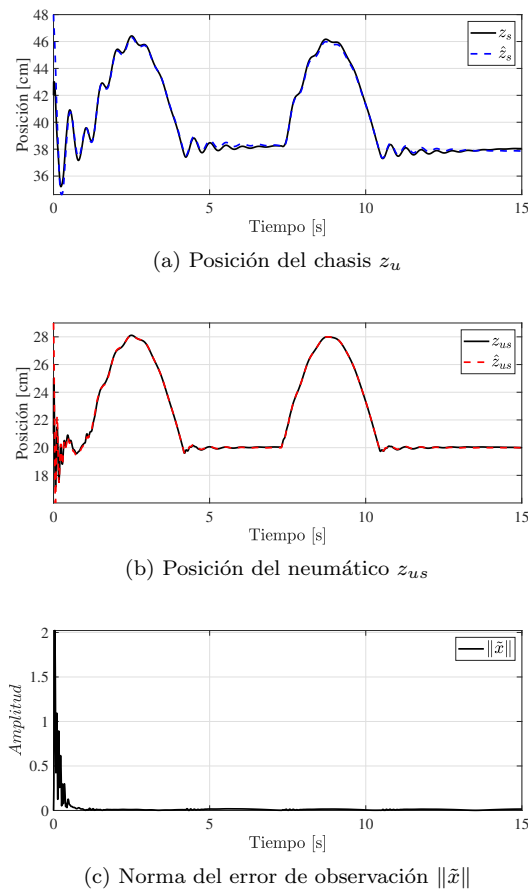


Fig. 4. Estimaciones y error de observación \tilde{x}

para verificar el estado de deterioro en que se encuentra la suspensión (en este caso, la presión del neumático). Se evaluó el desempeño del observador en simulación, logrando estimar las posiciones del vehículo y la rigidez del neumático en presencia de perturbaciones.

REFERENCES

Besaçon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 41(4), 271–280.

Besaçon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Applications*, volume 363. Springer.

Dochain, D. and Perrier, M. (2002). A state observer for (bio) processes with uncertain kinetics. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*, volume 4, 2873–2878.

Ekramian, M., Hosseinnia, S., and Sheikholeslam, F. (2011). Observer design for non-linear systems based on a generalised Lipschitz condition. *IET Control Theory & Applications*, 5(16), 1813–1818.

Ekramian, M., Sheikholeslam, F., Hosseinnia, S., and Yazdanpanah, M.J. (2013). Adaptive state observer for Lipschitz nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 62(4), 319–323.

Farza, M., M'saad, M., Menard, T., Ltaief, A., and Maa-toug, T. (2018). Adaptive observer design for a class of nonlinear systems. application to speed sensorless induction motor. *Automatica*, 90, 239–247.

Guo, S., Yang, S., and Pan, C. (2006). Dynamic modeling of magnetorheological damper behaviors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17(1), 3–14.

Martínez, J.C.T., Varrier, S., Menéndez, R.M., and Sename, O. (2016). Control tolerante a fallas en una suspensión automotriz semi-activa. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 13(1), 56–66.

Méndez, P.A., Zaragoza, C.A., Gordillo, G.O., Ramirez, G.G., Menéndez, R.M., and Márquez, E.Q.M. (2019). Monitoreo de una suspensión semiactiva a través de un observador adaptable. In *Congreso Nacional de Control Automático 2019*, 127–132.

Osorio-Gordillo, G.L., Darouach, M., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2015). \mathcal{H}_∞ dynamical observers design for linear descriptor systems. application to state and unknown input estimation. *European Journal of Control*, 26, 35–43.

Raoufi, R., Marquez, H., and Zinober, A. (2010). \mathcal{H}_∞ sliding mode observers for uncertain nonlinear lipschitz systems with fault estimation synthesis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(16), 1785–1801.

Ren, X.L. (2020). Observer design for actuator failure of a quadrotor. *IEEE Access*, 8.

Shaheen, B., Nazir, M.S., Rehan, M., and Ahmad, S. (2020). Robust generalized observer design for uncertain one-sided Lipschitz systems. *Applied Mathematics and Computation*.

Thau, F. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International journal of control*, 17(3), 471–479.

Xia, L., Cong, J., Xu, X., Gao, Y., and Zhang, S. (2020). H-infinity adaptive observer enhancements for vehicle chassis dynamics-based navigation sensor fault construction. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 17(2), 1–17.

Zemouche, A., Rajamani, R., Kheloufi, H., and Bedouhene, F. (2017). Robust observer-based stabilization of Lipschitz nonlinear uncertain systems via lmi-discussions and new design procedure. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(11), 1915–1939.

Zemouche, A., Rajamani, R., Trinh, H., and Zasadzinski, M. (2016). A new LMI based \mathcal{H}_∞ observer design method for Lipschitz nonlinear systems. In *2016 European Control Conference (ECC)*, 2011–2016.

Zhang, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3), 525–529.