

## Feasibility regions in the control design using attractive ellipsoids <sup>\*</sup>

A. Banda Urbina <sup>\*</sup> E. Alcorta Garcia <sup>\*</sup> C. Elizondo Gonzalez <sup>\*</sup>  
M. A. Platas Garza <sup>\*</sup>

*<sup>\*</sup> Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería  
Mecánica y Eléctrica, Posgrado en Ingeniería Eléctrica, México.  
(e-mail: alfonso.bandaur@uanl.edu.mx,  
efrain.alcortagr@uanl.edu.mx celizond@yahoo.com  
miguel.platasgrz@uanl.edu.mx)*

---

**Abstract:** Control based on attractive ellipsoids consists of searching within the state space for a region that satisfies the properties of attraction and invariance. One difficulty is that the inequalities to be satisfied are bilinear. In this work we propose a procedure that allows to establish feasible intervals for the search of solutions. The proposed scheme allows to search for the solution from LMI's instead of BMI's. The proposed algorithm is based on the sign decomposition tool. The effectiveness of the procedure is exemplified by the model of a pendulum.

*Keywords:* Attractive ellipsoids, uncertainties, nonlinear systems, robust control, attractors.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

El diseño de controladores para sistemas no lineales es un área que atrae gran atención en las últimas décadas, en particular utilizando técnicas de Elipsoides atractivas, planitud y adaptaciones en conjunto con técnicas clásicas, como puede ser apreciado en los libros Sira-Ramirez and Agrawal (2004); Poznyak et al. (2014); Sira-Ramirez et al. (2017). En estos trabajos se muestran resultados en la dirección de utilizar algoritmos de control que relajen el requerimiento de modelo explícito. Aplicación de elipsoides atractivas pueden ser revisadas en Azhmyakov et al. (2019), Khlebnikov (2019), Falcón et al. (2019), Nath et al. (2020), Nguyen (2021). Awad et al. (2021), entre otras.

En Michel et al. (2010) se aplica un método que utiliza el concepto de ultra-modelo (válidos en un intervalo de tiempo muy corto para el cual se utiliza un PID para el control y se ajusta a cada intervalo corto de tiempo. Este enfoque requiere de trabajo en tiempo real para obtener el ultra-modelo y sintonizar el PID en cuestión. En Sira-Ramirez et al. (2017) se resume un procedimiento que utiliza un observador para obtener un estimado de no linealidades y/o perturbaciones. El control se apoye en la estimación para obtener resultados de seguimiento. El resultado existe para sistemas planos y para sistemas en representación Euler-Lagrange. En Poznyak et al.

(2014) se resume un procedimiento novedoso que consiste en seleccionar el control de tal forma que se obtenga solución al problema de seguimiento siempre que las no linealidades y/o perturbaciones se encuentran dentro de elipses.

Note que en Poznyak et al. (2014) se plantea el uso de desigualdades matriciales bilineales, sin embargo, el conjunto factible para una desigualdad bilineal matricial (BMI) es en general no convexo VanAntwerp and Braatz (2000). El Toolbox de Matlab "PENBMI", puede ser útil para resolver este tipo de problemas, pero la correcta selección del punto inicial es crítica para encontrar un resultado, requiriendo ser factible desde el principio y además cercana a una solución. Una solución subóptima se logra fijando ciertos parámetros para obtener una desigualdad lineal matricial (LMI por sus siglas en inglés). El resultado subóptimo puede no ser satisfactorio.

Este trabajo sigue la línea de investigación asociada con los resultados contenidos en Poznyak et al. (2014), pero se propone un procedimiento para determinar intervalos de factibilidad para los parámetros que se quieren fijar, con lo cual se obtienen conjuntos de soluciones subóptimas que potencialmente mejoran resultados previamente reportados. El resultado se logra observando que las desigualdades matriciales pueden ser expresadas como desigualdades de polinomios y aquí se utiliza una herramienta, denominada descomposición de signo, ver Elizondo-Gonzalez (1999). La herramienta ayuda a determinar los intervalos de las variables que garantizan el cumplimiento de la desigualdad. Esto brinda valores

---

<sup>\*</sup> Departamento de Electrónica y Automatización de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica at UANL, y CONACyT-México (Research grant no. 166654 & A1-S-31628)

a ciertos parámetros que ayudan a completar el diseño requerido apoyados en LMS's. El esquema es mostrado mediante un ejemplo tomado de Poznyak et al. (2014).

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la siguiente sección se revisan algunos preliminares relacionados con descomposición de signo. En la sección 3 se presenta y justifica el enfoque propuesto. En la sección 4 se muestra una aplicación y se discuten los resultados. Las conclusiones finalizan el trabajo.

## 2. PRELIMINARIES

Se revisan en esta sección algunos conceptos de descomposición de signo y de la representación de desigualdades matriciales como polinomios.

### 2.1 Descomposición de Signo

A continuación se presenta una descripción breve de los resultados más relevantes relacionados con la herramienta Descomposición de Signo, la descripción completa puede verse en Elizondo-Gonzalez (1999) o en la referencia más reciente Elizondo-González (2011). Esta herramienta permite, entre otras cosas, encontrar en condiciones necesarias y suficientes de positividad robusta de funciones con incertidumbre polinómica multivariadas dependiendo de  $\ell$  parámetros.

El punto de partida es una transformación de coordenadas para la función a ser analizada, de tal manera que los nuevos parámetros sean positivos  $q_i > 0$ , entonces una caja de incertidumbre  $Q = \{ q = [q_1, q_2, \dots, q_\ell]^T \mid q_i > 0, q_i \in [q_i^-, q_i^+] \}$  es construida, en otras palabras,  $Q$  es un cono convexo positivo  $P, Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ . El mínimo  $v^{\min}$  y máximo  $v^{\max}$  vértices Euclidianos de  $Q$  son definidos como  $\|v^{\min}\|_2 = \min_{q \in Q} \|q\|_2, \|v^{\max}\|_2 = \max_{q \in Q} \|q\|_2$ .

**Definición 1.** Elizondo-González (2011) Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$  una caja. Se dice que  $f(q)$  tiene **Descomposición de signo** en  $Q$  si existen dos funciones acotadas, continuas no decrecientes y no negativas  $f_n(\cdot) \geq 0, f_p(\cdot) \geq 0$ , tales que  $f(q) = f_p(q) - f_n(q) \forall q \in Q$ . En este sentido son definidas la **Parte Positiva**  $f_p(q)$  y la **Parte Negativa**  $f_n(q)$  de la función.

□

Las partes negativa y positiva  $(f_n(\cdot), f_p(\cdot))$  constituyen una representación- $(f_n, f_p)$  de la función en  $\mathbb{R}^2$ , figura 1.

Algunas propiedades de las funciones continuas  $f(q), g(q), h(q)$  con descomposición de signo en  $Q$  y para toda función  $u(q)$  no decreciente en  $Q$ , son probadas en Elizondo-Gonzalez (1999). Estas propiedades son empleadas en siguientes teoremas. **a)**  $(f_n(q) + u(q), f_p(q) + u(q))$  es una representación- $(f_n, f_p)$  de la función  $f(q) \forall q \in Q$ ; **b)** la representación  $(f_n(q) + u(q), f_p(q) + u(q))$  de la función, es reducida a su mínima expresión:  $(f_p(q), f_n(q))$ ; **c)**  $f(q) + g(q)$ , **d)**  $f(q) - g(q)$  y **e)**  $f(q)g(q)$

son funciones con descomposición de signo en  $Q$ ; **f)** Si  $f(q) = g(q) + h(q)$ , entonces las partes positiva y negativa de  $f(q) - g(q)$  son reducida a su mínima expresión, como sigue:  $f(q) - g(q) = (f(q) - g(q))_p - (f(q) - g(q))_n, (f(q) - g(q))_n = f_n(q) - g_n(q), (f(q) - g(q))_p = f_p(q) - g_p(q)$ .

**Teorema 1.** Elizondo-González (2011). **Teorema del Rectángulo.** Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición de signo en una caja  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$  con vértices Euclidianos mínimo y máximo  $v^{\min}, v^{\max}$ , entonces: **a)**  $f(q)$  esta acotada inferior y superiormente por  $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$  y  $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$  respectivamente; **b)** La representación gráfica de la función  $f(q), \forall q \in Q$  en el plano  $(f_n, f_p)$  es contenida en el rectángulo con vértices  $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min})), (f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max})), (f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$  y  $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$ ; **c)** Si el vértice inferior derecho  $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$  esta sobre la línea de  $45^\circ$  entonces  $f(q) > 0 \forall q \in Q$ ; **d)** Si el vértice superior izquierdo  $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$  esta debajo de la línea de  $45^\circ$  entonces  $f(q) < 0 \forall q \in Q$ . En concordancia con la figura 1.

□

El resultado anterior se ve muy útil, porque el rectángulo donde habita la función multivariable en  $\mathbb{R}^2$  fué encontrado, pero en algunos casos este no es fácil de determinar en forma gráfica si un punto esta cercano a la línea de  $45^\circ$  (línea de  $45^\circ = \{f(q) \mid f(q) = 0\}$ ) y es difícil de ver si esta o no sobre esta línea. Así que en Elizondo-Gonzalez (1999); Elizondo-González (2011) la representación  $(\alpha, \beta)$  fue desarrollada:  $\alpha(q) = f_p(q) + f_n(q), \beta(q) = f_p(q) - f_n(q)$ , esta es similar a rotar  $45^\circ$  los ejes con respecto a la representación  $(f_n, f_p)$ . Esto implica algunas ventajas gráficas y algebraicas sobre la representación negativa y positiva.

Cuando la cota inferior está debajo de la línea de  $45^\circ$  y la cota superior está sobre la línea de  $45^\circ$ , no es posible saber si la función es positiva o no en  $Q = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times \dots \times [q_\ell^-, q_\ell^+]$ . En este caso es posible dividir cada variable  $[q_i^-, q_i^+]$  en  $k$  partes, generando nuevas cajas  $\Gamma^i$  tales que  $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ . Para el propósito de mejorar los resultados mostrados hasta este punto, se necesita la siguiente proposición.

**Proposición 1.** Elizondo-González (2011) Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ , y sea  $\Gamma^j \subset Q$  una caja con sus vértices establecidos  $\{\mu^i\}$  con vértices Euclidianos mínimo y máximo  $\mu^{\min}, \mu^{\max}$ , Sean  $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$  una caja con sus vértices establecidos  $\{\delta^i\}$  con vértices Euclidianos mínimo y máximo  $\mathbf{0}, \delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$ , y sea  $q \in \Gamma^j$  tal que  $q = \mu^{\min} + \delta$  donde  $\delta \in \Delta$ . Entonces la función  $f(q)$  es expresada por sus partes lineal, nonlinear e independiente, en su mínima expresión para toda  $q \in \Gamma^j$ .  $f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \mid \delta \in \Delta \quad \forall q \in \Gamma^j, f^{\min} \triangleq \text{Independent Part} = f(\mu^{\min}), f_L(\delta) \triangleq \text{Linear Part} = \nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$ ,

$$f_N(\delta) \triangleq \text{Nonlinear Part} = f(\mu^{\min} + \delta) - f^{\min} - f_L(\delta) \quad \forall \delta \in \Delta.$$

□

**Teorema 2.** Elizondo-González (2011). (**Teorema del Polígono**) Sea  $f : \mathbb{R}^{\ell} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición de signo en  $Q$ , sea:  $q$ ,  $\delta$ ,  $\Gamma^j$  y  $\Delta$  en concordancia con la proposición 1. Entonces, **a)** las cotas superior e inferior de la función  $f(q)$  son: *Cota inferior* =  $f^{\min} + f_{L \min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$  y *Cota superior*  $Upper = f^{\min} + f_{L \max} + f_{Np}(\delta^{\max}) \quad \forall q \in Q$ , **b)** Las cotas de (a) están contenidas en el intervalo definido por las cotas del teorema del rectángulo.  $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \leq \text{Cota inferior} \leq \text{Cota superior} \leq f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$ , **c)** La representación gráfica de la función  $f(q) \quad \forall q \in \Gamma$  en el plano  $(f_n, f_p)$  es contenido en el polígono definido por la intersección del rectángulo (del teorema del rectángulo) y el espacio entre las dos líneas de  $45^\circ$  separadas del origen por la *cota inferior* y la *cota superior* en concordancia con la figura 1.

□

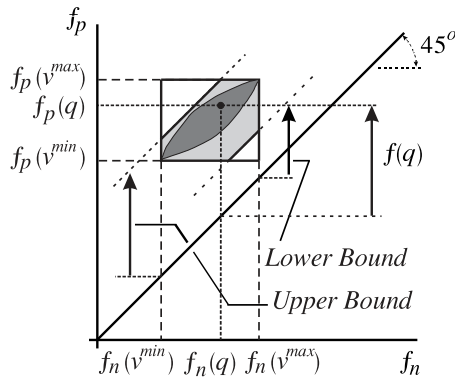


Fig. 1. Plano  $(f_n, f_p)$

La positividad robusta de funciones multivariables polinómicas en condiciones necesarias y suficientes son obtenidas mediante el siguiente teorema.

**Teorema 3.** Elizondo-González (2011). **Teorema de Partición de Cajas.** Sea  $f : \mathbb{R}^{\ell} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición en  $Q$  tal que  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^{\ell}$  es una caja con vértices Euclidianos mínimo y máximo  $v^{\min}$ ,  $v^{\max}$ . Entoces la función  $f(q)$  es positiva (negativa) en  $Q$  si y solo si una caja  $\Gamma$  existe tal que  $Q = \bigcup_j \Gamma^j$  y la Cota inferior  $\geq c > 0$  para cada caja  $\Gamma^j$  (*Cota superior*  $\leq c < 0$  para cada caja  $\Gamma^j$ ).

□

### 3. ENFOQUE PROPUESTO

La idea consiste en obtener una representación alternativa de las desigualdades matriciales, mediante un resultado

del álgebra lineal, y entonces aplicar las herramientas de descomposición de signo para determinar las regiones de factibilidad en el espacio de parámetros.

Las regiones por examinar son las cajas generadas al dividir cada intervalo de los parámetros  $q$ . El primer paso del proceso consiste en la eliminación de las cajas que no cumplan alguno de los requerimientos necesarios para la factibilidad.

El siguiente resultado del álgebra lineal puede ser revisado, por ejemplo, en Horn and Johnson (2013):

**Teorema 4. (Criterio de Sylvester)** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz hermitiana.

- Si todo menor principal de  $A$  (incluyendo  $\det(A)$ ) es no negativo, entonces  $A$  es semidefinido positivo.
- Si cada menor principal de  $A$  es positivo (incluyendo  $\det(A)$ ), entonces  $A$  es definida positiva.
- Si los primeros  $n - 1$  menores principales (respectivamente, los últimos  $n - 1$  menores principales) de  $A$  son positivos y  $\det(A) \geq 0$ , entonces  $A$  es semidefinido positivo.

□

Utilizando el resultado anterior, la condición de positividad (negatividad) de las desigualdades matriciales es trasladada, en condiciones suficientes, al estudio de una serie de funciones definidas por los menores principales. Si se definen funciones polinomiales  $r_i(q)$ , resultado del determinante del menor correspondiente, con el requerimiento de ser positiva o negativa. Con esta base se aplica descomposición de signo para determinar la cota inferior o superior respectivamente. La determinación de los parámetros que satisfacen las cotas, mínimas o máximas según aplique, los parámetros que satisfacen las cotas están en el espacio de parámetros factible, que reduce la búsqueda de soluciones a los que satisfacen las cotas.

El procedimiento descrito previamente está descrito en la figura 1 y es resumido mediante los siguientes pasos:

- Definir la  $n$  cantidad de veces que se subdividirán las cajas.
- Obtener las cuotas correspondientes para comparar con cada uno de los requerimientos necesarios para la factibilidad de la solución,
- Descartar las cajas inviables y almacenar las cajas restantes para su posterior subdivisión.
- Al terminar las  $n$  iteraciones en el proceso de eliminación, se realiza un proceso de selección de cajas que aseguren la factibilidad de la solución siguiendo la misma lógica de comparación de cuotas.

El espacio de parámetros factible es el resultado que se espera obtener del procedimiento anterior.

### 4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se considera un ejemplo tomado de Poznyak et al. (2014) (ejemplo 3.8), ver figura 2,

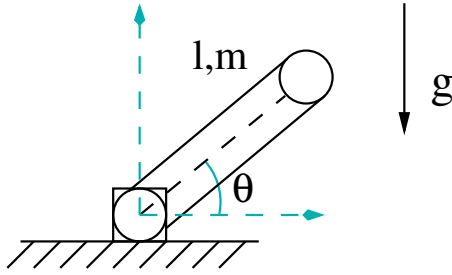


Fig. 2. Esquema del péndulo usado en el ejemplo

#### 4.1 Descripción del Sistema

El modelo consiste en un péndulo, representado por las ecuaciones:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) = \tilde{b}u + p(t) \quad (1)$$

donde

- las coordenadas de posición  $\theta \in \mathfrak{R}$  con las velocidades asociadas  $\dot{\theta}$  y las aceleraciones  $\ddot{\theta}$  están controladas por la fuerza motriz  $u \in \mathfrak{R}$  con ganancia  $\tilde{b} \in \mathfrak{R}$ ,
- $m$  es la masa del péndulo,
- $l$  es la distancia del punto de giro al centro de masa,
- la función  $p : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  describe las perturbaciones exógenas acotadas

$$|p| < p_0, \quad \forall t > 0$$

Asumiendo que los parámetros del modelo presentan errores demodelado

$$m = m_0(1 + \delta m), \quad l = l_0(1 + \delta l), \quad \tilde{b} = b_0(1 + \delta b)$$

donde  $m_0$ ,  $l_0$  y  $b_0$  son los valores nominales de los parámetros y  $\delta m$ ,  $\delta l$  y  $\delta b$  son errores de modelado pequeños.

Considerar un cambio en la variable de tiempo:  $\tau = tl_0\sqrt{m_0}$ , por lo tanto, las ecuaciones del péndulo pueden ser reescritas como:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m_0gl_0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(\tau, x, u) \quad (2)$$

donde  $x^T = [x_1 \ x_2]$ ,  $x_1 \triangleq \theta$ ,  $x_2 \triangleq \frac{d\theta}{d\tau}$  y el término para  $f(\tau, x, u)$ :

$$f(\tau, x, u) = \frac{\frac{p\tau}{\sqrt{ml}}}{(1 + \delta m)(1 + \delta l)^2} + m_0gl_0 \left[ x_1 - \frac{\sin(x_1)}{1 + \delta l} \right] + b_0 \left( \frac{1 + \delta b}{(1 + \delta m)(1 + \delta l)^2} - 1 \right) u \quad (3)$$

y  $f(\tau, x, u)$  satisface la condición quasi Lipschitz:

$$f(\tau, x, u) \leq f_0 + x^T V_x^T \tilde{Q}_x V_x x + Q_u u^2$$

con

$$\tilde{Q}_x = 3m_0^2g^2l_0^2 \left( 1 + \frac{1}{4(1+\delta l)} \right)^2, \quad V_x = (1 \ 0),$$

$$f_0 = \frac{3p_0^2}{(1 + \delta m)^2(1 + \delta l)^4}, \quad Q_u = 3b_0^2 \left( \frac{1 + \delta b}{(1 + \delta m)(1 + \delta l)^2} - 1 \right)^2$$

Considerando los siguientes valores numéricos:

$m_0 = 0.075\text{kg}$ ,  $\delta m = -0.02$ ,  $l_0 = 0.3\text{m}$ ,  $\delta l = -0.01$ ,  $b_0 = 1$ ,  $\delta b = 0.05$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $p_0 = 0.02$  Con lo cual esulta  $\tilde{Q}_x^{-1} = 1.6933$ ,  $\tilde{Q}_u^{-1} = 38.3889$ ,  $\alpha = 0.3$  y  $f_0 = 0.0013$ .

#### 4.2 Diseño del control

Siguiendo Poznyak et al. (2014), se plantea el problema de encontrar las ganancias del control proporcional (retroalimentación de estado):

$$u(t) = [y_1 \ y_2] \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Asociado con este problema resulta la siguiente desigualdad bilineal matricial:

$$\begin{bmatrix} 2p_3 + \tau_1 p_1 & w_2 & p_1 & y_1 \\ w_1 & w_3 & p_3 & y_2 \\ p_1 & p_3 & -\bar{\tau}_2 \tilde{Q}_x^{-1} & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & -\bar{\tau}_2 \tilde{Q}_u^{-1} \end{bmatrix} \leq 0$$

con:

$$\begin{aligned} w_1 &= -m_0gl_0p_1 + b_0y_1 + p_2 + \tau_1p_3 \\ w_2 &= p_2 - m_0gl_0p_1 + b_0y_1 + \tau_1p_3 \\ w_3 &= -2m_0gl_0p_1 + 2b_0y_1 + \tau_1p_2 + \bar{\tau}_2. \end{aligned}$$

Aplicando el criterio de Sylvester, equivalentemente se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 & y_1 \\ p_3 & p_2 & y_2 \\ y_1 & y_2 & \alpha \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} &> 0 \\ \tau_1 &> 0 \\ \bar{\tau}_2 &> 0 \\ -\tau_1\bar{\tau}_2 &\geq f_0 \end{aligned}$$

Definiendo el vector de parámetros como:

$$q = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ y_1 \ y_2 \ \tau_1 \ \bar{\tau}_2] \quad (5)$$

El algoritmo de búsqueda de intervalos factibles requiere un punto de partida. Aún y cuando el algoritmo puede comenzar en valores arbitrarios, si se comienza con intervalos muy amplios, se requieren muchas iteraciones. Por lo tanto, para simplificar en este trabajo se parte de los siguientes intervalos:

$$\begin{aligned} p_1 &= [0.00002 \ 0.00003] \\ p_2 &= [0.00005 \ 0.00006] \\ p_3 &= [-0.00002 \ -0.00001] \\ y_1 &= [-0.00004 \ -0.00003] \\ y_2 &= [-0.0006 \ -0.0005] \\ \tau_1 &= [1 \ 1.3] \\ \bar{\tau}_2 &= [0.001 \ 0.002] \end{aligned}$$

Para este problema, posteriormente se puede realizar una selección más exhaustiva tomando las cajas que minimicen la traza de  $P$ . Al estar trabajando con un conjunto de cajas que están dentro de la zona de factibilidad, se realiza un proceso de optimización regular utilizando SDP solvers computacionales, fijando los parámetros necesarios para que el sistema se vuelva LMI.

### 4.3 Resultados

Los resultados numéricos obtenidos con los pasos descritos previamente son mostrados a continuación, al igual que las gráficas del elipsoide atractivo y las trayectorias convergentes se muestran en la figuras 3-5.

$$\tau_1^{opt} = 1.2625 \quad (6)$$

$$\bar{\tau}_2^{opt} = 0.00103115 \quad (7)$$

$$P_{opt} = \begin{bmatrix} 0.00002266 & -0.00001446 \\ -0.00001446 & 0.0000582 \end{bmatrix} \quad (8)$$

De donde resulta la ganancia optima:

$$K_{opt} = [-9.14998 \quad -11.89563] \quad (9)$$

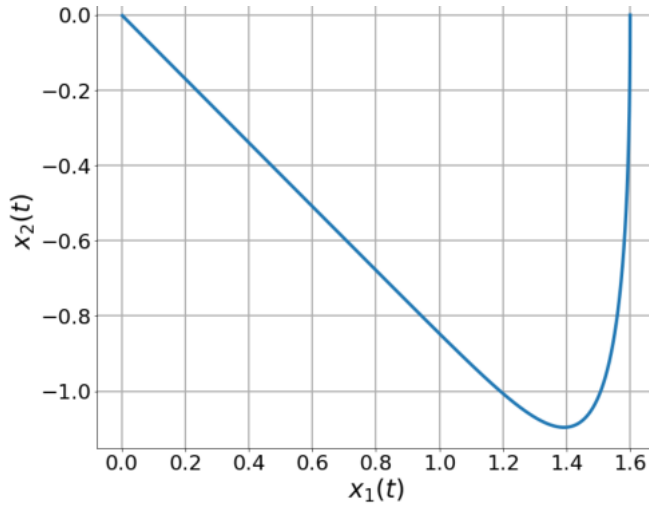


Fig. 3. Plano de fase resultante del diseño propuesto.

## 5. CONCLUSIÓN

El principal problema que se puede encontrar al tratar con sistemas BMI's es el definir una zona o un punto de factibilidad inicial dentro del espacio de parámetros. El enfoque de análisis de zonas de factibilidad mediante la descomposición de signo, propuesto en este trabajo, ayuda a resolver el problema, ya que permite tratar directamente con los términos multivariables presentes en los BMI's. Una profundización en la búsqueda de los parámetros óptimos puede también realizarse para obtener mejores resultados.

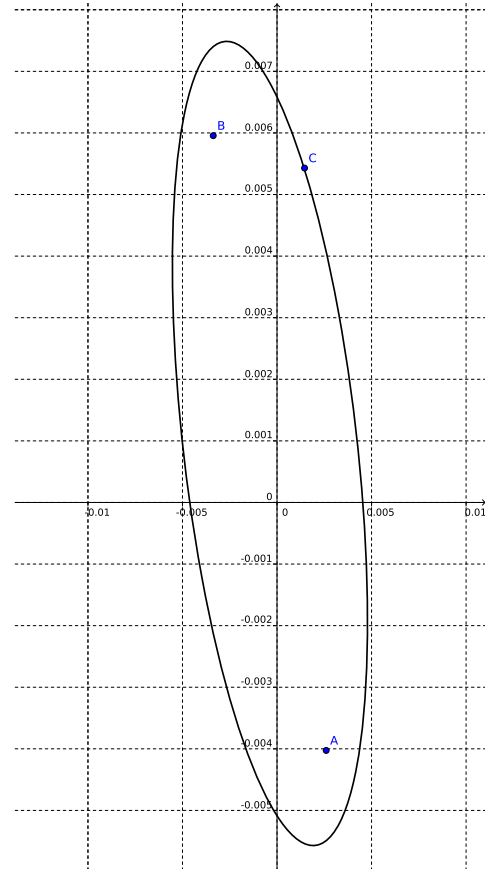


Fig. 4. Elipsoide que resulta del diseño propuesto.

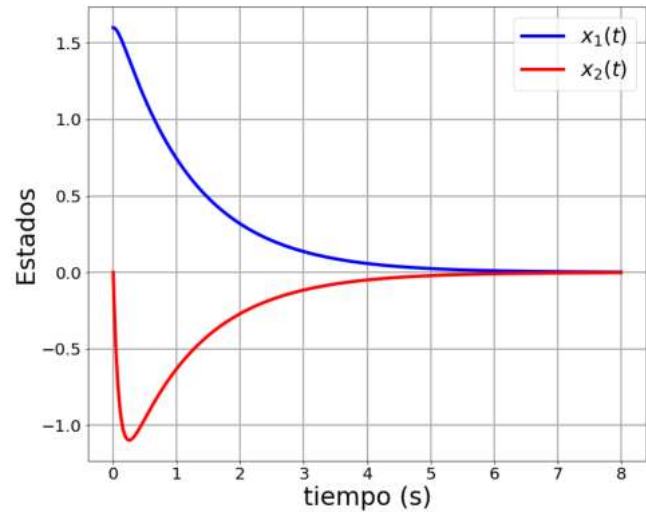


Fig. 5. Trayectoria de estados del diseño propuesto.

## REFERENCIAS

- Awad, H., Bayoumi, E.H.E., Soliman, H.M., and Santis, M.D. (2021). Robust tracker of hybrid microgrids by the invariant-ellipsoid set. *electronics*, 10(1794).
- Azhmyakov, V., Mera, M., and Juárez, R. (2019). Advances in attractive ellipsoid method for robust control

- design. *Int J. Robust Nonlinear Control*, 19(5), 1418–1436.
- Elizondo-Gonzalez, C. (1999). *Estabilidad y controlabilidad robusta de sistemas lineales con incertidumbre multilínea*. Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.
- Elizondo-González, C. (2011). Parametric robust stability. In A. Mueller (ed.), *Recent Advances in Robust Control*, chapter 1. IntechOpen, Rijeka. doi: 10.5772/24460.
- Falcón, R., Rios, H., Mera, M., and Dzul, A. (2019). An attractive ellipsoid-based robust control for quad-rotor tracking. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(9), 7851–7860.
- Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2013). *Matrix analysis*. Cambridge University Press, second edition.
- Khlebnikov, M.V. (2019). An approach to tracking problem for linear control system via invariant ellipsoids method. In *8th International Conference on Soft Computing, Artificial Intelligence and Applications*.
- Michel, L., Join, C., Fliess, M., Sicard, P., and Chérit, A. (2010). Model-free control of dc/dc converters. In *2010 IEEE 12th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL)*.
- Nath, A., Gupta, R., Mehta, R., Bahga, S.S., Gupta, A., and Bhasin, S. (2020). Attractive ellipsoid sliding mode observer design for state of charge estimation of lithium-ion cells. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 69(12), 14701 – 14712.
- Nguyen, H.N. (2021). Ellipsoidal set based command governors for constrained linear systems with bounded disturbances. *TechRxiv. Preprint*.
- Poznyak, A., Polyakov, A., and Azhmyakov, V. (2014). *Attractive ellipsoids in robust control. Systems and Control: Foundations and Applications*. Birkhäuser/Springer.
- Sira-Ramirez, H. and Agrawal, S.K. (2004). *Differentially flat systems*. Marcel Deckers.
- Sira-Ramirez, H., Luviano-Juárez, A., Ramírez-Neria, M., and Zurita-Bustamante, E.W. (2017). *Active disturbance rejection control of dynamic systems: a flatness based approach*. Butterworth-Heinemann.
- VanAntwerp, J.G. and Braatz, R.D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10, 363±385.