

A New Adaptive Controller for Linear Systems: A Model Reference Approach

Roberto Franco* Héctor Ríos**, **
Alejandra Ferreira de Loza**, ***, ***

* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón Coahuila, México.*

** *Cátedras CONACYT, C.P. 03940, Ciudad de México, México.*

*** *Instituto Politécnico Nacional-CITEDI, C.P. 22435, Tijuana, Baja California, México.*

Abstract: In this paper, a finite-time model reference adaptive controller is proposed to solve the tracking problem for a class of linear time-invariant systems with parameter uncertainties. The convergence to zero in a finite time for the tracking and parameter identification errors is ensured. The convergence proofs are developed based on Lyapunov function approach. Finally, some simulation results show the feasibility of the proposed approach.

Keywords: Model Reference Adaptive Control; Linear Systems; Adaptive Control.

1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los sistemas físicos las incertidumbres en los parámetros afectan la dinámica del sistema. Una forma de lidiar con las incertidumbres es a través del control adaptable. Otras técnicas como los modos deslizantes son insensibles ante cierta clase de incertidumbres de los parámetros.

El control adaptable por modelo de referencia (MRAC) es una técnica ampliamente utilizada debido a su alta fiabilidad. En Arabi and Yucelen (2019), se introduce una arquitectura de MRAC a partir de la teoría de conjuntos con el efecto de zona muerta. El enfoque está basado en una función generalizada de potencial que asegura el acotamiento del error de identificación de parámetros y del error de seguimiento. En Maity et al. (2019), se propone un MRAC basado en predicción para lidiar con incertidumbres variantes en el tiempo. El esquema propuesto contiene un MRAC predictor con la modificación σ y una dinámica independiente para los parámetros. Dicho esquema asegura convergencia asintótica a una región alrededor del origen del error de seguimiento y de identificación de parámetros. En Nekoo (2019), se propone un MRAC basado en la ecuación de Riccati dependiente del estado para sistemas no lineales invariantes en el tiempo considerando incertidumbres variantes en el tiempo. El algoritmo garantiza convergencia asintótica a cero del error

* Este trabajo es apoyado en parte por el proyecto SEP-CONACYT-ANUIES-ECOSNORD Project 315597. Roberto Franco, Héctor Ríos y Alejandra Ferreira de Loza agradecen el apoyo financiero brindado por el CONACYT CVU 772057, Cátedras CONACYT CVU 270504 proyecto 922, y Cátedras CONACYT CVU 166403 proyecto 1537, respectivamente; y de los proyectos TecNM.

de seguimiento, mientras que el error de identificación de parámetros permanece acotado. En Franco et al. (2021), se propone un MRAC para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI). El esquema propuesto en Franco et al. (2021) asegura convergencia asintótica a cero del error de seguimiento, y el acotamiento de las ganancias adaptables. Sin embargo, la convergencia de los algoritmos propuestos en Arabi and Yucelen (2019), Maity et al. (2019), Nekoo (2019), y Franco et al. (2021), es asintótica para el error de seguimiento, mientras que para el error de identificación de parámetros solo se asegura acotamiento.

Para mejorar la velocidad de convergencia del error de identificación de los parámetros, en Kersting and Buss (2017), se propone un MRAC para sistemas afines. El algoritmo en Kersting and Buss (2017) asegura convergencia asintótica del error de seguimiento y, bajo señales suficientemente ricas, el error de identificación del parámetro converge a cero asintóticamente. En Cho et al. (2018), se propone un MRAC para mejorar la convergencia del parámetro sin excitación persistente. Se asegura la convergencia exponencial del error de seguimiento y el error de identificación del parámetro. Aún así, la velocidad de convergencia es asintótica o exponencial.

Para resumir, la mayoría de los enfoques por MRAC aseguran convergencia asintótica o exponencial de los errores de seguimiento y de identificación de parámetros. En cambio, para distintas aplicaciones, se requiere una convergencia más rápida para lograr el objetivo de control, por ejemplo, en vehículos no tripulados Zhen et al. (2019) y robots manipuladores Ma et al. (2019), entre otros.

En la literatura, pocos trabajos tratan el problema de convergencia en tiempo finito; en Guzman and Moreno (2011), se propone un MRAC para sistemas LTI asegurando convergencia en tiempo finito para el error de seguimiento y de identificación de parámetros. Sin embargo, la ley de control es discontinua. En Franco et al. (2022), se propone un MRAC en tiempo finito para sistemas lineales escalares. El error de seguimiento y de identificación de parámetros convergen a cero en tiempo finito. El MRAC propuesto en este manuscrito es una extensión del trabajo presentado en Franco et al. (2022). La diferencia principal se encuentra en la clase de sistemas que se abordan. Contrario a Franco et al. (2022) que solo ataca a sistemas lineales escalares, en este manuscrito se aborda una clase más amplia de sistemas.

Este manuscrito contribuye al diseño de un MRAC en tiempo finito (FT-MRAC) para sistemas LTI de orden arbitrario con incertidumbres en los parámetros. El control no lineal está compuesto de dos leyes adaptables no lineales, que aseguran la convergencia en tiempo finito. El análisis de convergencia se basa en el enfoque de la función de Lyapunov. Las ventajas principales son las siguientes:

- (1) El FT-MRAC asegura convergencia a cero en tiempo finito del error seguimiento.
- (2) Bajo ciertas condiciones de excitación persistente, el FT-MRAC asegura convergencia a cero en tiempo finito del error de identificación de parámetros.

Este artículo está organizado como se describe a continuación. El planteamiento del problema se encuentra en la Sección 2. Los preliminares se encuentran en la Sección 3. El FT-MRAC y los resultados principales se presentan en la Sección 4. Los resultados de simulación y conclusiones se muestran en las Secciones 5 y 6, respectivamente.

Notación: La norma euclídeana de un vector $q \in \mathbb{R}^n$ se denota por $\|q\|$. Para una función Lebesgue medible $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$, se define la norma $\|u\|_{(t_0, t_1)} := \text{ess sup}_{t \in (t_0, t_1)} \|u(t)\|$ para $(t_0, t_1) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces $\|u\|_{\infty} := \|u\|_{(0, +\infty)}$ y el conjunto de funciones u con la propiedad $\|u\|_{\infty} < +\infty$ se denotan como \mathcal{L}_{∞} .

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, y $u \in \mathbb{R}$ es la señal de control. La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el vector $B \in \mathbb{R}^n$ son desconocidos pero se asume que el par (A, B) es controlable.

Considere el siguiente modelo de referencia dado por:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r, \quad (2)$$

donde $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Hurwitz y conocida, $B_m \in \mathbb{R}^n$ es conocido y la señal de referencia satisface $r \in \mathcal{L}_{\infty}$.

Las condiciones de emparejamiento están dadas a continuación

$$A_m = A + Bk_x^T, \quad B_m = Bk_r,$$

donde $k_x \in \mathbb{R}^n$ y $k_r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}$ son los valores ideales desconocidos.

El objetivo de este manuscrito es diseñar una ley de control u tal que la dinámica del sistema (1) se comporte como la del modelo de referencia (2) considerando incertidumbres paramétricas.

3. PRELIMINARES

Considere la siguiente forma de regresor:

$$y(t) = \phi(t)\theta,$$

donde $y \in \mathbb{R}$ es la salida, $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times q}$ es el vector regresor, y $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros constantes desconocidos. Se introduce la siguiente definición para el vector regresor ϕ .

Definición 1. (Ioannou and Sun, 1996) *Una señal continua a tramos $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times q}$ es persistentemente excitante (PE), con un nivel de excitación $\alpha_0 > 0$, si existen ciertas constantes $\alpha_1, T_0 > 0$ tales que*

$$\alpha_1 T_0 I \geq \int_t^{t+T_0} \phi^T(\tau)\phi(\tau)d\tau \geq \alpha_0 T_0 I, \quad \forall t \geq 0.$$

Ahora, se introduce la siguiente definición para una señal $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente rica.

Definición 2. (Ioannou and Sun, 1996) *Una señal $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es suficientemente rica (SR) de orden q , si contiene al menos $q/2$ frecuencias distintas.*

Note que, en la definición previa, q representa el número de parámetros desconocidos.

4. MRAC EN TIEMPO FINITO

El controlador no lineal propuesto y las leyes adaptables están dadas por

$$u = x^T \hat{k}_x + r \hat{k}_r + k_1^T \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^\gamma}, \quad (3a)$$

$$\dot{\hat{k}}_x = -K_2 x B_m^T P^{-1} \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^{2\gamma}}, \quad (3b)$$

$$\dot{\hat{k}}_r = -k_3 r B_m^T P^{-1} \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^{2\gamma}}, \quad (3c)$$

donde \hat{k}_x es la identificación de k_x , \hat{k}_r es la identificación de k_r , y el error de seguimiento es $\tilde{x} = x - x_m$. Las ganancias de control son $k_1 \in \mathbb{R}^n$, $0 < K_2^T = K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $0 < P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $\gamma \in (0, 0.5]$. Para $\gamma = 0.5$, las leyes de control adaptable son discontinuas, las leyes adaptables se vuelven no lineales cuando $\gamma \in (0, 0.5)$, mientras que, para $\gamma = 0$, se recupera el MRAC clásico (Ioannou and Sun, 1996). Sin embargo, note que la ley de control (3a) siempre es continua.

Aplicando (3) al sistema (1), la dinámica del lazo cerrado está dada por

$$\dot{x} = Ax + B \left[x^T \hat{k}_x + r \hat{k}_r + k_1^T \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^\gamma} \right].$$

Considere los errores de identificación $\tilde{k}_x = k_x - \hat{k}_x$ y $\tilde{k}_r = k_r - \hat{k}_r$, la dinámica en lazo cerrado puede ser reescrita como

$$\dot{x} = A_m x + B_m r - B \left[x^T \tilde{k}_x + r \tilde{k}_r - k_1^T \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^\gamma} \right].$$

Ahora, la dinámica del error se muestra a continuación

$$\dot{\tilde{x}} = A_m \tilde{x} - B \left[x^T \tilde{k}_x + r \tilde{k}_r - k_1^T \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^\gamma} \right], \quad (4a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_x = K_2 x B_m^T P^{-1} \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^{2\gamma}}, \quad (4b)$$

$$\dot{\tilde{k}}_r = k_3 r B_m^T P^{-1} \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^{2\gamma}}. \quad (4c)$$

El siguiente lema describe las propiedades de convergencia del algoritmo propuesto.

Lema 1. *Sea el FT-MRAC (3) aplicado al sistema (1). Suponga que, para $\gamma \in (0, 0.5]$, existen $0 < P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^n$, $0 < Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $0 \leq M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que las siguientes desigualdades lineales matriciales (LMIs)*

$$\begin{bmatrix} A_m P + P A_m^T & P \\ P & -Q \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5a)$$

$$\begin{bmatrix} B_m Y^T + Y B_m & P \\ P & -M \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5b)$$

tienen solución para A_m y B_m fijas. Si los parámetros del control se seleccionan tal que $k_1^T = Y P^{-1}$, $0 < K_2^T = K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $k_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; entonces, $[\tilde{x}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r] = 0$ es Globalmente Uniformemente Estable (GUS) y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = 0$.

Las LMIs propuestas en (5) siempre tienen solución dado que A_m es Hurwitz, y siempre existe una Y tal que $B_m Y^T + Y B_m$ es negativa.

Ahora, algunas propiedades de las señales r , x_m y x son resaltadas. Note que la solución del modelo de referencia (2) depende de r . Por lo tanto, si r es SR, x_m también es SR. Por el Lema 1, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$, lo cual implica que $x(t) = x_m(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, x será SR si x_m es SR. Consecuentemente, si r es SR, x también es SR, con lo cual se concluye que el vector regresor $\phi = [x, r]$ es PE. Para el esquema propuesto, se deben identificar $n+1$ parámetros, *i.e.*, k_x y k_r . Entonces, la señal de referencia r debe ser una señal SR de orden $(n+1)/2$.

El siguiente teorema proporciona las propiedades de estabilidad global y uniforme en tiempo finito.

Teorema 1. *Si las condiciones del Lema 1 se satisfacen y r es SR; entonces, en estado estable $[\tilde{x}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r] = 0$, la dinámica del error (4) es Globalmente Uniformemente Estable en Tiempo Finito (GUFTS).*

En la siguiente sección, el FT-MRAC se aplica a un ejemplo académico para ilustrar el desempeño del algoritmo.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se considera el siguiente ejemplo académico:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

donde los eigenvalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2.5 + 0.86i$, y $\lambda_3 = -2.5 - 0.86i$. El modelo de referencia se define como:

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3.5 & -3.5 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} r(t),$$

con $r(t) = 15.4 \sin(20t) + 4.5 \cos(3t)$. Es posible demostrar que las ganancias de control ideales son $k_x = [k_{x1}, k_{x2}, k_{x3}]^T = [-8, -1.5, 0.5]^T$ y $k_r = 0.5$.

Las simulaciones correspondientes se realizaron en MATLAB con el método de discretización de Euler con tiempo de muestreo igual a 1 [ms]. Fijando $Q = I_3$ y $M = I_3$, las ganancias del FT-MRAC están dadas por:

$$k_1^T = -[0.31, 1.36, 1.57],$$

$$K_2 = 400I_3, \quad k_3 = 0.4,$$

$$P = \begin{bmatrix} 2.49 & 2.10 & 0.50 \\ 2.10 & 3.35 & 0.74 \\ 0.50 & 0.74 & 0.33 \end{bmatrix}.$$

Las condiciones iniciales están dadas por $x^T(0) = [1, -0.2, 2]$, $x_m^T(0) = [0, 0, 0]$, $\hat{k}_x^T(0) = [0, 0, 0]$, y $\hat{k}_r(0) = 0$. Con fines de comparación, el MRAC clásico (Ioannou and Sun, 1996), con $\gamma = 0$ y $k_1 \equiv 0$, también es implementado. Los parámetros del controlador K_2 , k_3 , y P del MRAC clásico son los mismo que el del FT-MRAC.

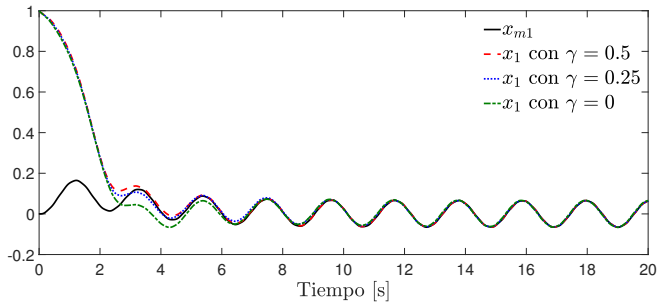
El esquema propuesto es evaluado para distintos valores de γ , *i.e.*, las leyes de control adaptable son discontinuas con $\gamma = 0.5$, las leyes de control adaptable no lineales se presentan cuando $\gamma \in (0, 0.5)$, y el MRAC clásico con $\gamma = 0$. Note que la velocidad de convergencia varía dependiendo de la selección de γ .

Los resultados se muestran en las Figs. 1-4. El estado del sistema y los estados del modelo de referencia se muestran en la Fig. 1 para los primeros veinte segundos con el fin de ilustrar la convergencia de los algoritmos. La norma del error de seguimiento se muestra en la Fig. 2. Se observa que el algoritmo discontinuo, con $\gamma = 0.5$, converge más rápido que el caso no lineal con $\gamma = 0.25$, mientras que, el algoritmo clásico, *i.e.*, $\gamma = 0$, converge asintóticamente a una región alrededor del origen.

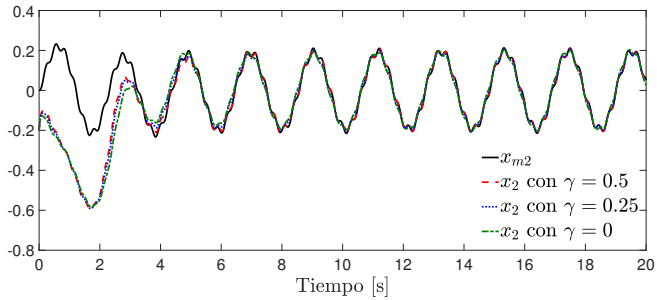
Los parámetros reales y la identificación se muestran en la Fig. 3. Para ilustrar las propiedades de convergencia, con respecto al valor seleccionado de γ , la norma del error de identificación de parámetros se muestra en la Fig. 4. Se puede mostrar que el algoritmo con $\gamma = 0.5$ converge más rápido que el caso no lineal con $\gamma = 0.25$. En contraste, el algoritmo clásico, *i.e.*, $\gamma = 0$, converge asintóticamente a una región alrededor del valor real del parámetro. La acción de control se muestra en la Fig. 5 para los primeros diez segundos con el fin de ilustrar el comportamiento de la ley de control con distintos valores de γ .

6. CONCLUSIONES

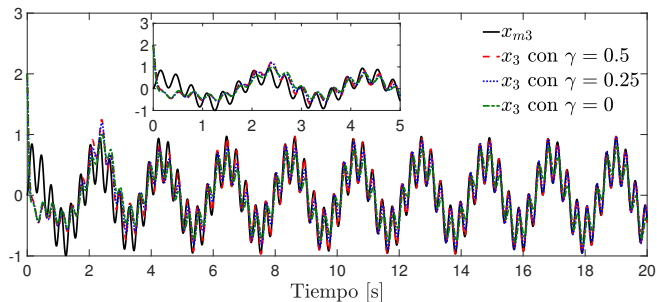
Este manuscrito contribuye con un FT-MRAC para cierta clase de sistemas lineales con incertidumbres paramétricas. El error de seguimiento y el error de identificación de parámetros convergen a cero en tiempo finito. El algoritmo es aplicado en un ejemplo académico para ilustrar la factibilidad del esquema propuesto.



(a) Estado x_1 vs x_{m1}



(b) Estado x_2 vs x_{m2}



(c) Estado x_3 vs x_{m3}

Figura 1. Estados del sistema x vs modelo de referencia x_m

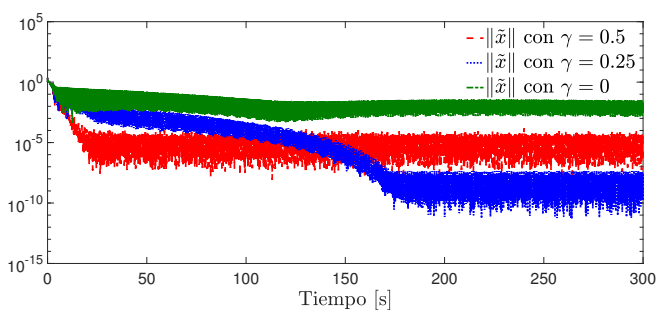
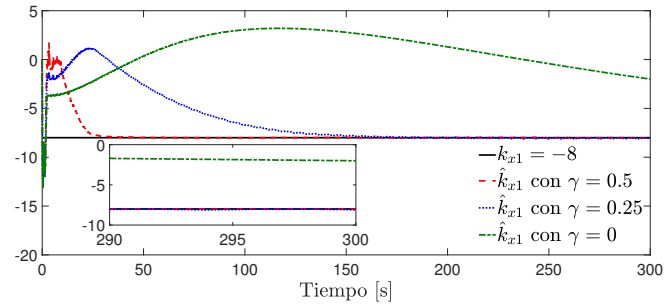


Figura 2. Norma del error de seguimiento \tilde{x}

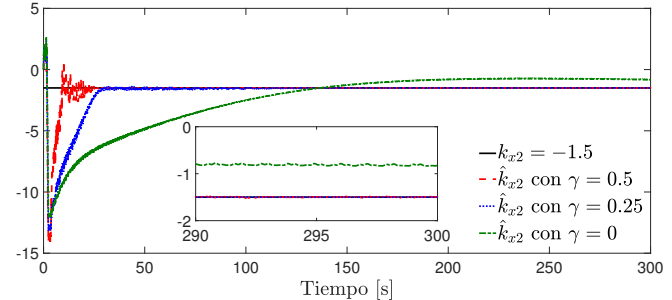
REFERENCIAS

Arabi, E. and Yucelen, T. (2019). A set-theoretic model reference adaptive control architecture with dead-zone effect. *Control Engineering Practice*, 89(1), 12–29.

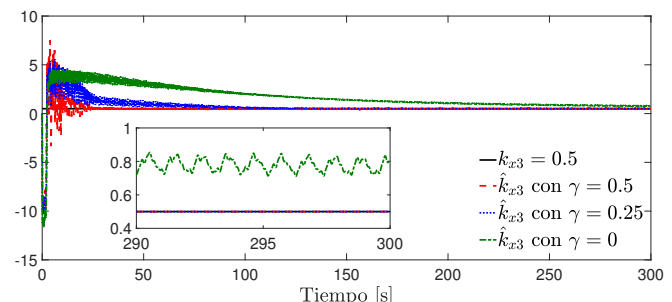
Cho, N., Shin, H., Kim, Y., and Tsourdos, A. (2018). Composite model reference adaptive control with parameter convergence under finite excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(3), 811–818.



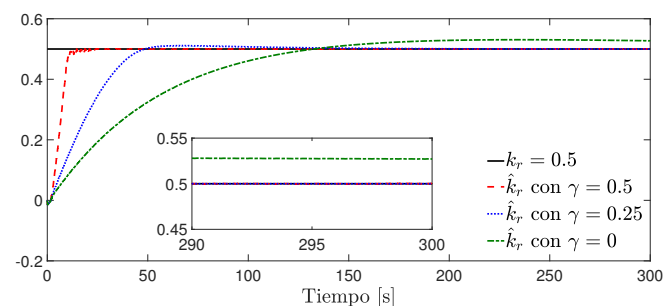
(a) Identificación de la ganancia adaptable \hat{k}_{x1}



(b) Identificación de la ganancia adaptable \hat{k}_{x2}



(c) Identificación de la ganancia adaptable \hat{k}_{x3}



(d) Identificación de la ganancia adaptable \hat{k}_r

Figura 3. Ganancias adaptables \hat{k}_x y \hat{k}_r

Fischer, N., Kamalapurkar, R., and Dixon, W. (2013). Lasalle-Yoshizawa corollaries for nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58, 2333–2338.

Franco, R., Ríos, H., Ferreira, A., and Efimov, D. (2021). A robust nonlinear model reference adaptive control for disturbed linear systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. DOI: 10.1109/TAC.2021.3069719.

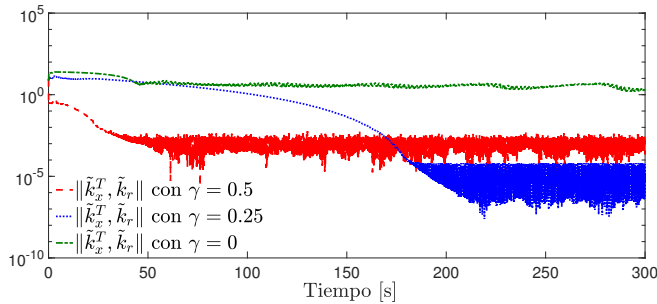


Figura 4. Norma del error de identificación del parámetro $[\tilde{k}_x, \tilde{k}_r]^T$

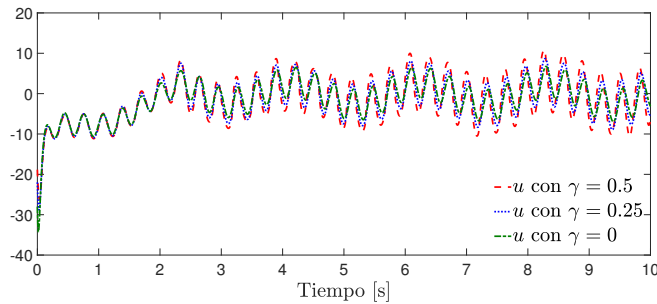


Figura 5. Acción de control u

- Franco, R., Ríos, H., and Ferreira de Loza, A. (2022). Model reference adaptive control: A finite-time approach. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 36(5), 1231–1247.
- Guzman, E. and Moreno, J. (2011). New finite-time convergent and robust direct model reference adaptive control for siso linear time invariant systems. In *50th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, 7027–7032. Florida, USA.
- Ioannou, P. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA.
- Kersting, S. and Buss, M. (2017). Direct and indirect model reference adaptive control for multivariable piecewise affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11), 5634–5649.
- Ma, C., Lam, J., and Lewis, F. (2019). Trajectory regulating model reference adaptive controller for robotic systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 27(6), 2749–2756.
- Maity, A., Hocht, L., and Holzapfel, F. (2019). Time-varying parameter model reference adaptive control and its application to aircraft. *European Journal of Control*, 50(1), 161–175.
- Moreno, J. (2012). Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte (eds.), *Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century*, volume 412 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, chapter 4, 113–149. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Nekoo, S. (2019). Model reference adaptive state-dependent Riccati equation control of nonlinear uncertain systems: Regulation and tracking of free-floating space manipulators. *Aerospace Science and Technology*, 84(1), 348–360.

Poznyak, A. (2008). *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Techniques*. Elsevier Science, Amsterdam-Boston.

Zhen, Z., Tao, G., Yu, C., and Xue, Y. (2019). A multi-variable adaptive control scheme for automatic carrier landing of UAV. *Aerospace Science and Technology*, 92, 714–721.