

Robust Output Regulation for a Constrained Omnidirectional Mobile Robot ^{*}

Ariana Gutiérrez ^{*} Manuel Mera ^{**} and Héctor Ríos ^{*,***}

^{*} *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, Blvd. Revolución y Cuauhtémoc S/N, C.P. 27000, Torreón Coahuila, Mexico. (e-mail: m.agutierrez@correo.itlalaguna.edu.mx,*

hriosb@correo.itlalaguna.edu.mx).

^{**} *Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UPT, C.P. 07340, Ciudad de México, Mexico. (e-mail: mmerah@ipn.mx)*

^{***} *Cátedras CONACYT, Av. Insurgentes Sur 1582, C.P. 03940, Ciudad de México, Mexico*

Abstract: This paper aims to design a robust output control to regulate the output for an uncertain omnidirectional mobile robot with input saturation and state constraints, in the presence of external disturbances. The proposed robust control approach is composed of a linear control part, that is designed based on the attractive ellipsoid method and a barrier Lyapunov function approach, taking into account the input and state constraints, and a nonlinear control part that can compensate the effect of matched disturbances. The synthesis of the robust control is given in terms of linear matrix inequalities. Simulation results show the workability of the proposed robust control approach.

Keywords: Input Saturation, State Constraints, Uncertain Linear System, Robust Control.

1. INTRODUCCIÓN

Debido a su versatilidad los robots móviles han surgido como solución de problemas en diferentes ámbitos, *e.g.*, en seguridad, supervisión industrial, reconocimiento militar, etc., (ver, *e.g.* Tanaka et al. (2018), Zhang et al. (2015), y Tsai et al. (2010)). Dentro de estos, los robots móviles omnidireccionales (RMO) tienen la característica de moverse en cualquier dirección sin cambiar su orientación. Por esta razón, en los últimos años se ha incrementado el interés en diseñar controladores para los RMO.

Se han propuesto diferentes técnicas para resolver el problema de seguimiento de trayectorias para los RMO, una de ellas es el control por modelo predictivo (MPC). En Wang et al. (2018) se diseña un MPC para un RMO de tres ruedas considerando restricciones en la entrada de control. Por otro lado, tomando en cuenta restricciones en la entrada de control y en los estados en Wang et al. (2018) y Lins (2013) se diseñan MPC para el seguimiento de trayectorias de un RMO de tres ruedas. No obstante,

la mayoría de los MPC son complejos y requieren de un gran gasto computacional. En Kim and Kim (2013) se propone un algoritmo de planeación de trayectoria para RMO. En este trabajo no se desarrolla un análisis formal de estabilidad. Mientras que, en Ren et al. (2019) se propone un control por realimentación de salida basado en pasividad para un RMO de tres ruedas. Este algoritmo garantiza que la dinámica en lazo cerrado del sistema es entrada-acotada salida-acotada estable. En Zhao et al. (2009) se propone un control interno de fuerza para un RMO. Este algoritmo garantiza convergencia asintótica del error de seguimiento en presencia de perturbaciones externas. Sin embargo, en la mayoría de los trabajos anteriores no se consideran perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

El comportamiento y estabilidad de los RMO pueden verse afectados por incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Por lo tanto, son necesarias técnicas de control robusto, *e.g.*, control adaptable, método del elipsoide atractivo (AEM) y control por modos deslizantes (MD), para diseñar controladores que contrarresten el efecto de las perturbaciones externas. Por ejemplo, con base en un observador por MD y backstepping, en Jeong and Chwa (2020) se propone un control robusto para RMO inciertos. En Ovalle et al. (2019) se proponen cuatro

^{*} Este artículo fue apoyado en parte por el proyecto SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD Project 315597. A. Gutiérrez, M. Mera y H. Ríos agradecen el apoyo financiero brindado por CONACYT CVU 932774, Project IPN-SIP 20220241, y Cátedras CONACYT CVU 270504 Project 922, respectivamente.

controladores por MD continuos para el seguimiento de trayectorias de un RMO de cuatro ruedas. Sin embargo, no se consideran ni saturación en la entrada de control ni restricciones en los estados. Por otro lado, en Gutiérrez et al. (2020) se propone un control robusto basado en el AEM y la función barrera de Lyapunov (BLF) para un sistema lineal incierto con saturación en la entrada de control y perturbaciones externas. El control adaptable se ha empleado para el diseño de controladores para RMO, por ejemplo, en Dong et al. (2021) se propone un controlador adaptable robusto para el seguimiento de trayectoria de un RMO incierto, garantizando acotamiento último de las trayectorias. En Treesatayapun (2011) se propone un controlador adaptable para un RMO en tiempo discreto, con funciones no lineales desconocidas. Este algoritmo solo garantiza que el error de seguimiento está acotado. En Sira-Ramírez et al. (2013) se diseña un control robusto por salida para un RMO. Sin embargo, solo se consideran perturbaciones dependientes del estado.

En la mayoría de los trabajos mencionados anteriormente, los algoritmos propuestos no consideran las restricciones del sistema, *i.e.*, saturación en la entrada de control y restricciones en los estados, y en los trabajos en los que si son consideradas, no se toman en cuenta ni perturbaciones externas ni incertidumbres paramétricas. Motivados por estos problemas, en este trabajo se propone un controlador robusto para regular la salida de un RMO de tres ruedas. El algoritmo propuesto considera la saturación en la entrada de control y las restricciones en los estados en presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. El controlador se basa en una BLF, el AEM, y en un control por MD integral (MDI). La aportación de este trabajo es: *i*) El controlador robusto propuesto se compone de dos partes, una lineal y una no lineal. *ii*) Con base en el BLF y el AEM, el control lineal considera la saturación en la entrada de control y restricciones en los estados. *iii*) Con base en el MDI, el control no lineal contrarresta el efecto de perturbaciones acopladas. *iv*) Se caracteriza un conjunto seguro, donde las trayectorias del sistema no transgreden las restricciones del sistema. *v*) El algoritmo propuesto garantiza convergencia asintótica del error de regulación.

Notación. El conjunto $\mathcal{E}(R) := \{x \in \mathbb{R}^n | x^\top R x \leq 1\}$ es un elipsoide caracterizado por la matriz $0 < R^\top = R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ centrado en el origen. Para cualquier $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\|\theta\|_{\mathcal{E}} := \inf_{\eta \in \mathcal{E}} \|\theta - \eta\|$, es la distancia de θ al \mathcal{E} . Para una función Lebesgue medible $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q$ se define la norma $\|w\|_{(t_0, t_1)} := \text{ess sup}_{t \in (t_0, t_1)} \|w(t)\|$, entonces $\|w\|_\infty = \|w\|_{(0, +\infty)}$ y el conjunto de toda las funciones w con la propiedad $\|w\|_\infty < +\infty$ se denota como \mathcal{L}_∞ .

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente modelo dinámico de un RMO de tres ruedas Ovalle et al. (2019)

$$M\ddot{\xi} + C(\dot{\xi})\dot{\xi} + D\xi = \sigma(\tau) + w(t), \quad (1)$$

donde $\xi^\top = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^3$ es la variable de configuración, x y y representan la posición planar del RMO mientras que θ representa la orientación angular del RMO, $\tau^\top = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de fuerzas generalizadas, el cual está limitado por la función saturación σ , $w^\top = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de perturbaciones externas, considere las siguientes matrices

$$\begin{aligned} M &= M_r + (I_2 + J_m r_e^2) E E^\top, \\ C(\dot{\xi}) &= \frac{4}{r_2} (I_2 + J_m r_e^2) \dot{\theta} B, \\ D &= r_e^2 \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + k_v \right) E E^\top, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E &= -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -L \\ 0 & 1 & -L \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & -L \end{pmatrix}^\top. \end{aligned}$$

donde $M_r = \text{diag}(m_1 + 3m_2, m_1 + 3m_2, 3m_2 L^2 + I_1 + 3I_3)$, m_1 es la masa del robot, m_2 es la masa de cada rueda, I_1 es la inercia del cuerpo, I_2 es la inercia de las ruedas sobre el eje del motor, I_3 es la inercia de las ruedas perpendicular al eje del motor, L es la distancia del centro del robot al centro de las ruedas, J_m es la inercia del eje de los motores, k_b es la constante de la fuerza electromotriz, k_a es la constante de torque, R_a es la resistencia de armadura, k_v es la fricción viscosa del motor, y r_e es la relación de transmisión.

El modelo (1) tiene la siguiente representación en espacio de estado

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ f(\dot{\xi}) + \mathcal{M}(\tau + w(t)) \end{pmatrix}, \quad (2a)$$

$$y_c = C_c(\xi^\top, \dot{\xi}^\top)^\top, \quad (2b)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\dot{\xi}) &= -M^{-1}(C(\dot{\xi}) + D)\dot{\xi}, \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3a_3}{2r^2} M_1^{-1} & -a_2 M_1^{-1} \dot{\theta} & 0 \\ a_2 M_2^{-1} \dot{\theta} & -\frac{3a_3}{2r^2} M_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3L^2 a_3}{r^2} M_3^{-1} \end{pmatrix} \dot{\xi}, \\ C_c &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \text{diag}(M_1^{-1}, M_2^{-1}, M_3^{-1}), \end{aligned}$$

con $M_1 = M_2 = m_1 + 3m_2 + (3a_1/2r^2)$, $M_3 = 3m_2 L^2 + I_1 + 3I_3 + (3a_1 L^2)/(r^2)$, $a_1 = I_2 + J_m r_e^2$, $a_2 = (2/r^2)(I_2 + J_m r_e^2)$, y $a_3 = r_e^2 ((k_a k_b)/(R_a) + k_v)$.

Debido a que los RMO de tres ruedas tiene restricciones en los estados, se asume que la solución del sistema (2) está restringida dentro de un conjunto de valores permitido. Es posible diseñar dicho conjunto mediante el siguiente conjunto de politopos

$$\mathcal{P}_{z_j} := \{\bar{z}_j \in \mathbb{R}^2 | \bar{b}_{ji}^\top \bar{z}_j \leq 1, j = \overline{1, 3}, i = \overline{1, k}\}, \quad (3)$$

donde $\bar{z}_1^\top = (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{z}_2^\top = (y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{z}_3^\top = (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$, $b_{ji} \in \mathbb{R}^m$ son vectores que caracterizan las restricciones en los estados y $k \in \mathbb{N}$ es el número de caras del politopo.

El objetivo es regular la salida del sistema (2), a un valor deseado, a pesar de la presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, además de considerar restricciones en los estados y saturación en la entrada de control.

3. DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO

Debido a la estructura de la función saturación, *i.e.*,

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} \tau_{\max}, & \text{si } \tau_{\max} \leq \tau, \\ \tau, & \text{si } -\tau_{\max} < \tau < \tau_{\max}, \\ -\tau_{\max}, & \text{si } \tau \leq -\tau_{\max}, \end{cases} \quad (4)$$

existe una región lineal, donde $\sigma(\tau) = \tau$, está caracterizada por el conjunto $\mathcal{U} := \{\tau \in \mathbb{R} \mid -\tau_{\max} \leq \tau \leq \tau_{\max}\}$. Defina la función $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\phi(\tau) := \sigma(\tau) - \tau$.

Debido al término $C(\xi)\dot{\xi}$ la dinámica (1) es no lineal. Tomando en cuenta este término como una perturbación externa y debido a la estructura de la matriz \mathcal{M} las señales de control están desacopladas, por lo tanto, el sistema (2) puede ser reescrito como se muestra, para $j = \bar{1}, 3$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_j &= (A_j + \Delta_j)\bar{z}_j + B_j\tau_j + D_z\tilde{w}(t), & (5a) \\ y_{cj} &= C_z\bar{z}_j, & (5b) \end{aligned}$$

donde y_{cj} es la salida que se desea regular y las matrices están definidas como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3a_3}{2r^2}M_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ M_1^{-1} \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3a_3}{2r^2}M_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ M_2^{-1} \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3L^2a_3}{r^2}M_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ M_3^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $C_z = (1, 0)$, $D_z = (0, 1)^\top$, $\tilde{w}_1(t) = -a_2M_1^{-1}\dot{y}\dot{\theta} + w_1(t)$, $\tilde{w}_2(t) = a_2M_2^{-1}\dot{x}\dot{\theta} + w_2(t)$, y $\tilde{w}_3(t) = w_3(t)$ son las perturbaciones para cada subsistema y $\Delta_j = \text{diag}(0, 1)A_j\delta_I$, con $\delta_I \in \mathbb{R}$ que representa el porcentaje de incertidumbres paramétricas. Debido a que las señales de control están desacopladas; entonces, es posible diseñar de manera independiente un controlador para cada sistema en la forma (5a).

Se asume que el sistema cumple con la siguiente suposición.

Suposición 1. La perturbación w está acotada, *i.e.*, $\tilde{w} \in \mathcal{W} := \{\tilde{w} \in \mathcal{L}_\infty : \|\tilde{w}\|_\infty \leq \bar{w}\}$, con una constante positiva \bar{w} ; y la matriz desconocida Δ está acotada, *i.e.*, $\|\Delta\| \leq \bar{\delta}$, con una constante positiva $\bar{\delta}$.

Dada la naturaleza del sistema mecánico y debido que se toma en cuenta que la entrada de control está saturada,

es posible verificar que el sistema (1) es entrada-acotada estado-acotado. Por lo tanto, la parte no lineal \tilde{w}_j permanece acotada.

Se define el error de regulación $e := r - y_c$ y la variable auxiliar

$$x_r := \int_0^t (r - y_c(\tau))d\tau = \int_0^t e(\tau)d\tau,$$

donde $r \in \mathbb{R}$ es la referencia deseada. Entonces, se introduce el siguiente sistema extendido

$$\dot{z} = (\bar{A} + \bar{\Delta})z + \bar{B}(\sigma(\tau) + w(t)) + Fr, \quad (6)$$

donde $z := (\bar{z}^\top, x_r)^\top \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado extendido y las matrices tienen la siguiente estructura

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dada la estructura de A y B , el par $(\bar{A} + \bar{\Delta}, \bar{B})$ es estabilizable. Debido a (3), las soluciones del sistema (6) están restringidas dentro del politopo

$$\mathcal{P} := \{z \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{b}_i^\top z \leq 1, \quad i = \bar{1}, k\}, \quad (7)$$

con $\bar{b}_i = (b_i^\top, b_k^\top)^\top \in \mathbb{R}^3$, donde b_k es un vector arbitrario. Por simplicidad, b_k se considera como $b_k = 0$, donde la variable x_r no tiene restricciones. Es posible aproximar el conjunto (7) a través de un conjunto de elipsoides completamente contenido en el (Boyd and Vandenberghe, 2009), *i.e.*, $\mathcal{E}(R) := \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z^\top R z \leq 1\}$ está contenido en \mathcal{P} , si $\bar{b}_i^\top R^{-1} \bar{b}_i \leq 1$, para $i = \bar{1}, k$.

Se propone la siguiente ley de control

$$\tau = \sigma(\tau_L) + \tau_I, \quad (8)$$

donde σ es la función saturación definida como en (4), para alguna $\tau_{L\max} > 0$. El controlador (8) se divide en dos partes. El elemento no lineal τ_I es el MDI, el cual compensa el efecto de perturbaciones acopladas; mientras τ_L es la parte lineal del control, la cual toma en cuenta las restricciones en los estados y las incertidumbres paramétricas. Debido a que $|\tau| \leq \tau_{\max}$, cada parte del controlador está acotada, *i.e.*, $|\tau_I| \leq \tau_{I\max}$ y $|\sigma(\tau_L)| \leq \tau_{L\max}$, con $\tau_{L\max}, \tau_{I\max} > 0$, tal que $\tau_{L\max} + \tau_{I\max} \leq \tau_{\max}$.

Observación 1. El valor de τ_{\max} está dado por propiedades físicas de los actuadores. Para cumplir con la condición $\tau_{L\max} + \tau_{I\max} \leq \tau_{\max}$, es posible seleccionar $\tau_{I\max}$ de acuerdo a la cota superior de las perturbaciones acopladas; entonces, $\tau_{L\max} = \tau_{\max} - \tau_{I\max}$.

Considerando (8), la dinámica en lazo cerrado es

$$\dot{z} = (\bar{A} + \bar{\Delta})z + \bar{B}(\sigma(\tau_L) + \tau_I + \tilde{w}(t)) + Fr. \quad (9)$$

Ahora, se define la variable de deslizamiento como

$$s(z) = G(z(t) - z(0)) - G \int_0^t (\bar{A}z_n(\tau) + \bar{B}\sigma(\tau_L(\tau)) + Fr)d\tau, \quad (10)$$

donde $G \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ es tal que $\det(G\bar{B}) \neq 0$. Una manera óptima de diseñar la matriz G es $G = \bar{B}^\top$ o $G = \bar{B}^+$ (Castaños and Fridman, 2006).

La dinámica en la superficie de deslizamiento es

$$\dot{s} = G\bar{B}(\tau_I + w(t)) + G\bar{\Delta}z. \quad (11)$$

Se propone el control por MDI τ_I como

$$\tau_I = -\rho(z)\text{sign}(s), \quad (12)$$

con $\rho(z) > 0$. Se considera al elipsoide $\mathcal{E}(R)$, parametrizado por $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, como un conjunto seguro, donde las restricciones de los estados no son violadas. El siguiente lema proporciona las condiciones para diseñar ρ y asegurar la existencia del modo deslizante.

Lema 2. *Asuma que la suposición 1 se cumple, y que se aplica la ley de control (12) al sistema (11), para una $\tau_{I_{\max}} > 0$ dada. Si se diseña la ganancia ρ como*

$$\rho(z) = \alpha + \bar{w} + \bar{\delta} \|G\| \|z\| \|G\bar{B}\|^{-1}, \quad (13)$$

para alguna $\alpha > 0$, tal que

$$0 < \alpha \leq \tau_{I_{\max}} - \bar{w} - \bar{\delta} \|G\| \|G\bar{B}\|^{-1} \lambda_{\max}^{-\frac{1}{2}}\{R\}, \quad (14)$$

se cumple para alguna $\tau_{I_{\max}}$ y $0 < R^T = R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; entonces, $s = 0$ es estable en Tiempo Finito.

Una vez en el modo deslizante, se tiene que $s = 0$; por lo tanto, la dinámica en la superficie deslizante es

$$\dot{z} = (\bar{A} + \Gamma\bar{\Delta})z + \bar{B}\sigma(\tau_L) + Fr, \quad (15)$$

con $\Gamma = (I - \bar{B}(G\bar{B})^{-1}G)$. Entonces, se propone la parte lineal del controlador, i.e., τ_L , como

$$\tau_L = Kz, \quad (16)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ es la ganancia de realimentación que se diseña considerando las restricciones en los estados (7) y la saturación en la entrada de control.

El siguiente lema proporciona una manera de diseñar el conjunto seguro $\mathcal{E}(R)$ y la ganancia K .

Lema 3. *Asuma que la suposición 1 se cumple, y que se aplica la ley de control (16) al sistema (15), para una $\tau_{L_{\max}} = \tau_{\max} - \tau_{I_{\max}} > 0$ dada. Suponga que existen matrices positivas definidas $X_1 = X_1^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $X_2 = X_2^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, algunas matrices $Y \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ y $Z \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, y constantes $\delta, \gamma > 0$, tal que el siguiente conjunto de LMIs*

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 & \bar{B}\delta - Y^T + Z^T & F & X_1 \\ \star & -2\delta & 0 & 0 \\ \star & \star & -\gamma & 0 \\ \star & \star & \star & -X_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (17a)$$

$$\psi_1 = \bar{A}X_1 + X_1\bar{A} + \Gamma\bar{\delta}X_1 + X_1\bar{\delta}\Gamma^T + \bar{B}Y + Y^T\bar{B}^T,$$

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} X_1 & Z^T \\ Z & \tau_{L_{\max}}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (17b)$$

$$\chi_3 = \bar{b}_i^T X_1 \bar{b}_i \leq 1, \text{ for } i = \bar{1}, \bar{k}, \quad (17c)$$

se cumple para ciertos vectores \bar{b}_i y una constante fija $\bar{\delta}$. Si $\|z(0)\| \in \mathcal{E}(R)$, con $R = X_1^{-1}$, y K es diseñada como $K = YR$; entonces, las trayectorias del sistema (15) convergen asintóticamente a $\mathcal{E}(P) := \{z \in \mathbb{R}^3 | z^T P z \leq r^2\}$, con $P = X_2^{-1}$.

Finalmente, considerando los resultados de los lemas 2 y 3, se presenta el siguiente teorema.

Teorema 1. *Asuma que la suposición 1 se cumple, y se aplica la ley de control (8), con $\tau_I = -\rho(z)\text{sign}(s)$ y $\tau_L = Kz$, al sistema (6), para una $\tau_{\max} > 0$ dada. Si*

$\|z(0)\| \in \mathcal{E}(R)$, K se calcula como en el lema 3, i.e., $K = YR$, y ρ se diseña como en (13), entonces, las trayectorias del sistema (6) convergen asintóticamente a $\mathcal{E}(P)$; por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0$.

Por limitación de espacio, se omiten las demostraciones de todos los resultados.

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Para mostrar la eficacia del algoritmo propuesto, se considera la dinámica (5a) con los siguientes parámetros $m_1 = 1.99$ [kg], $m_2 = 0.29$ [kg], $r = 0.05$ [m], $L = 0.11$ [m], $I_1 = 6.08 \times 10^{-2}$ [kg m²], $I_2 = 3.24 \times 10^{-4}$ [kg m²], $I_3 = 4.69 \times 10^{-4}$ [kg m²], $J_m = 5.70 \times 10^{-7}$ [kg m²], $k_a = 0.0134$ [N m/A], $k_b = 0.0133 \times 10^{-3}$ [V s/rad], $k_v = 0.0001$ [Nm s/rad], $R_a = 1.9$ [Ω], y $r_e = 64$.

Es fácil verificar que el sistema (5a) cumple con la suposición 1, para $j = \bar{1}, \bar{3}$. Se consideran las perturbaciones externas como $w_1(t) = 1 + \sin(2t)$, $w_2(t) = 1 - \cos(3t)$, $w_3(t) = 2 + \sin(t)$. Se seleccionan las condiciones iniciales como $\bar{z}_1(0) = (1, 0)^T$, $\bar{z}_2(0) = (1, 0)^T$, $\bar{z}_3(0) = (2.2, 0)^T$, y $x_{r_1}(0) = x_{r_2}(0) = x_{r_3}(0) = 0$. Para mostrar la eficacia del algoritmo propuesto para el caso de seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo lo suficientemente suaves, se proponen las siguientes referencias deseadas

$$\begin{aligned} r_1(t) &= 0.3[1 - (1 + \tanh(\omega t - \phi)) + (1 + \tanh(\omega t - 3\phi)) \\ &\quad - (1 + \tanh(\omega t - 6\phi))], \\ r_2(t) &= r_3(t) = 0.3[1 - (1 + \tanh(\omega t - 2\phi)) \\ &\quad + (1 + \tanh(\omega t - 4\phi))], \end{aligned}$$

con $\omega = 20$ y $\phi = 200$. Para propósitos de simulación, se considera que $x, y \in [-1.8, 1.8]$ [m], $\dot{x}, \dot{y} \in [-3, 3]$ [m/s], y $\dot{\theta} \in [-3\pi, 3\pi]$ [rad/s]. Observe que la orientación del RMO no tiene restricciones; sin embargo, es posible considerar que $\theta \in (-\pi, \pi)$ [rad]. De acuerdo a lo anterior, las restricciones en los estados están dadas como $\bar{b}_1 = (10/18, 0, 0)^T$, $\bar{b}_2 = -\bar{b}_1$, $\bar{b}_3 = (0, 1/3, 0)^T$, y $\bar{b}_4 = -\bar{b}_3$, para los sistemas \bar{z}_1 y \bar{z}_2 , mientras que, para el sistema \bar{z}_3 se tienen $\bar{b}_5 = (1/\pi, 0, 0)^T$, $\bar{b}_6 = -\bar{b}_5$, $\bar{b}_7 = (0, 1/3\pi, 0)^T$, y $\bar{b}_8 = -\bar{b}_7$.

Para calcular las ganancias del controlador, es posible resolver las LMIs del Teorema 1 para los j sistemas en la forma (5a). Debido a que los sistemas \bar{z}_1 y \bar{z}_2 son iguales; por lo tanto, es posible diseñar una sola ganancia del controlador para ambos sistemas. Se considera $\alpha_1 = 60$, $\tau_{1_{\max}} = 314.0362$, fijando $\tau_{1_{I_{\max}}} = 188.4217$, por lo tanto $\tau_{1_{L_{\max}}} = 125.6145$; entonces, se obtiene la siguiente solución

$$R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} 3.9072 & 0.6700 & -4.4833 \\ 0.6700 & 0.2432 & -0.6121 \\ -4.4833 & -0.6121 & 6.5782 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = P_2 = \begin{pmatrix} 7.2234 & 1.5115 & -7.9554 \\ 1.5115 & 0.5529 & -1.3753 \\ -7.9554 & -1.3753 & 10.9782 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = K_2 = (-158.9036 \quad -1.2005 \quad 143.4761),$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 100, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.0067.$$

Mientras que, para el sistema \bar{z}_3 , se considera $\alpha_3 = 1$, $\tau_{3\max} = 48.8526$, $\tau_{3I\max} = 19.5410$, por lo tanto $\tau_{3L\max} = 29.3115$; entonces, se obtiene la siguiente solución

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.6677 & 0.0477 & -0.8342 \\ 0.0477 & 0.0153 & -0.0455 \\ -0.8342 & -0.0455 & 1.3672 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1.0837 & 0.1031 & -1.3235 \\ 0.1031 & 0.0350 & -0.0960 \\ -1.3235 & -0.0960 & 2.1143 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} -18.9529 & -0.2783 & 16.6608 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = 100, \delta_3 = 0.0079.$$

Debido a limitaciones de espacio, únicamente se presentan los resultados para los sistemas \bar{z}_1 y \bar{z}_3 . En las Figs. 1–2 se muestran las trayectorias y los elipsoides correspondientes, para \bar{z}_1 y \bar{z}_3 . Se observa que las trayectorias comienzan en el elipsoide $\mathcal{E}(R)$, permanecen dentro de el, y convergen al elipsoide $\mathcal{E}(P)$, a pesar de la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

El control lineal τ_L , el control no lineal τ_I , la señal

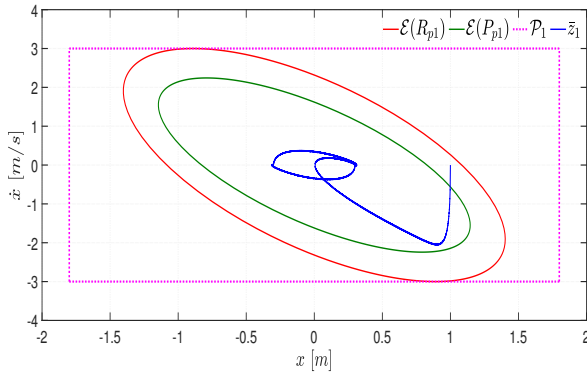


Fig. 1. Trayectorias, elipsoides, y restricciones para el sistema x

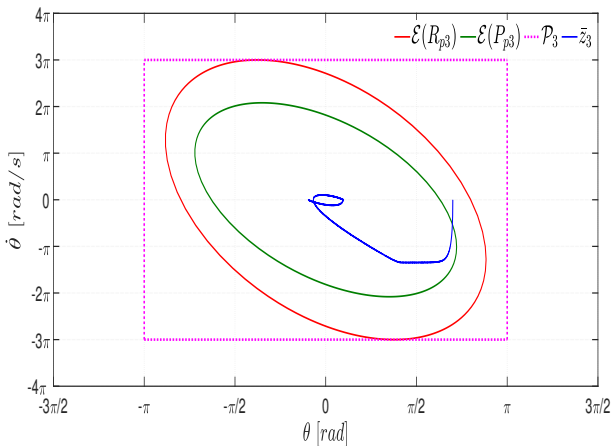


Fig. 2. Trayectorias, elipsoides, y restricciones para el sistema θ

de control y las restricciones de saturación se muestran en las Figs. 3–4, para \bar{z}_1 y \bar{z}_3 , respectivamente. Para el sistema \bar{z}_1 ambas partes del controlador, *i.e.*, lineal

y no lineal, permanecen en la región no saturada todo el tiempo. Mientras que, en la Fig. 4 se observa que la parte lineal del controlador se satura por un instante de tiempo. Sin embargo, para cada sistema la señal de control τ permanece en la región no saturada.

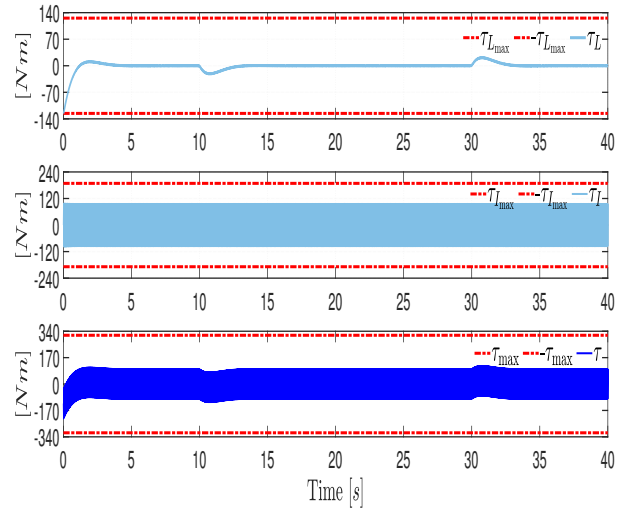


Fig. 3. Señales de control τ_{1L} , τ_{1I} y τ_1 para el sistema x

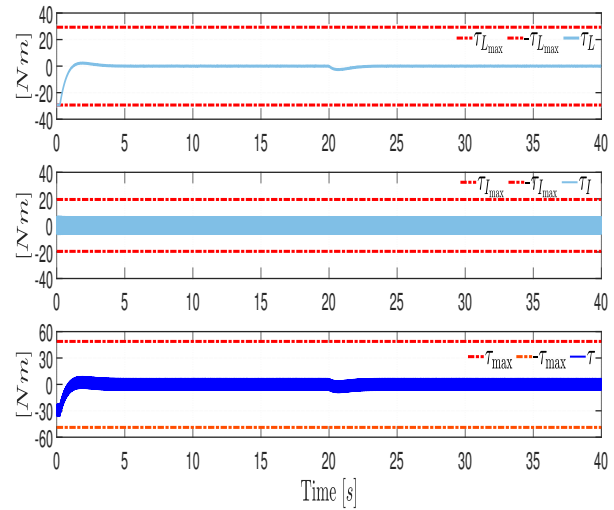


Fig. 4. Señales de control τ_{3L} , τ_{3I} y τ_3 para el sistema θ

Las trayectorias del sistema en el plano $x - y$, y la trayectoria del ángulo de orientación θ , junto con sus trayectorias deseadas correspondientes, se muestran en las Figs. 5–6, respectivamente, se observa que las trayectorias del sistema siguen la trayectoria deseada a pesar de la presencia de perturbaciones externas.

5. CONCLUSIONES

Este artículo contribuye con una solución al problema de regulación para un RMO de tres ruedas con saturación en la entrada de control, restricciones en los estados,

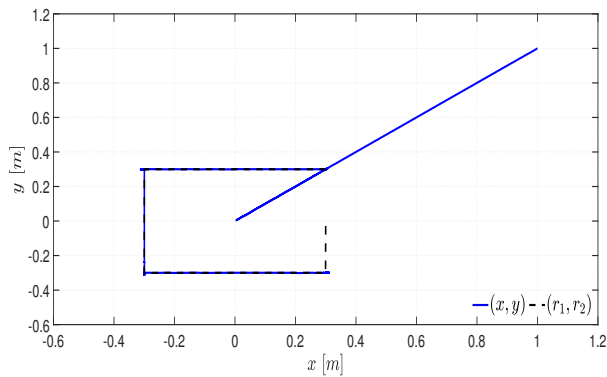


Fig. 5. Plano de fase $x - y$

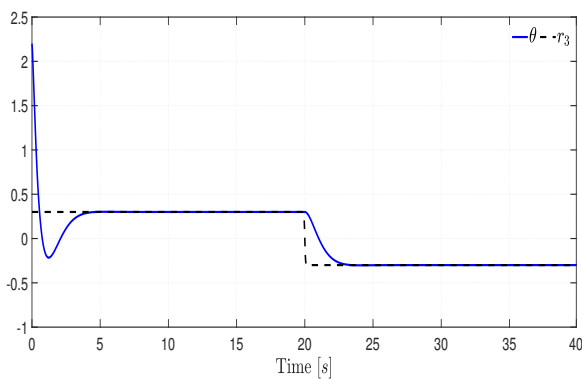


Fig. 6. Trayectoria del ángulo de orientación

incertidumbres paramétricas, y perturbaciones externas. La parte lineal del controlador, basada en el AEM y la BLF, se ocupa de la saturación en la entrada de control, las restricciones en los estados, y las incertidumbres paramétricas, mientras que la parte no lineal basada en el MDI puede compensar el efecto de perturbaciones acopladas. Se caracteriza un conjunto seguro, donde no se transgreden las restricciones del sistema. El algoritmo propuesto garantiza convergencia asintótica a cero del error de regulación. La síntesis de las ganancias del controlador se da en términos de LMIs proporcionando un método constructivo para diseñarlas. Resultados de simulación muestran la factibilidad del algoritmo propuesto.

REFERENCIAS

- Boyd, S. and Vandenberghe (2009). *Convex optimization*. Los Angeles: Cambridge University Press.
- Castaños, F. and Fridman, L. (2006). Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5), 853–858.
- Dong, F., Jin, D., Zhao, X., and Han, J. (2021). Adaptive robust constraint following control for omnidirectional mobile robot: An indirect approach. *IEEE Access*, 9, 8877–8887.
- Gutiérrez, A., Ríos, H., and Mera, M. (2020). Robust output-regulation for uncertain linear systems with input saturation. *IET Control Theory & Applications*, 14(16), 2372–2384.
- Jeong, S. and Chwa, D. (2020). Sliding-mode-disturbance-observer-based robust tracking control for omnidirectional mobile robots with kinematic and dynamic uncertainties. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 26(2), 741–752.
- Kim, H. and Kim, B.K. (2013). Online minimum-energy trajectory planning and control on a straight-line path for three-wheeled omnidirectional mobile robots. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 61(9), 4771–4779.
- Lins, J. (2013). Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 19(2), 467–476.
- Ovalle, L., Ríos, H., Llama, M., Santibáñez, V., and Dzul, A. (2019). Omnidirectional mobile robot robust tracking: Sliding-mode output-based control approaches. *Control Engineering Practice*, 85, 50–58.
- Ren, C., Ding, Y., Ma, S., Hu, L., and Zhu, X. (2019). Passivity-based tracking control of an omnidirectional mobile robot using only one geometrical parameter. *Control Engineering Practice*, 90, 160–168.
- Sira-Ramírez, H., López-Urbe, C., and Velasco-Villa, M. (2013). Linear observer-based active disturbance rejection control of the omnidirectional mobile robot. *Asian Journal of Control*, 15(1), 51–63.
- Tanaka, M., Nakajima, M., Suzuki, Y., and Tanaka, K. (2018). Development and control of articulated mobile robot for climbing steep stairs. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(2), 531–541. doi: 10.1109/TMECH.2018.2792013.
- Treesatayapun, C. (2011). A discrete-time stable controller for an omni-directional mobile robot based on an approximated model. *Control Engineering Practice*, 19(2), 194–203.
- Tsai, C.C., Huang, H.C., and Lin, S.C. (2010). Fpga-based parallel dna algorithm for optimal configurations of an omnidirectional mobile service robot performing fire extinguishment. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(3), 1016–1026.
- Wang, C., Liu, X., Yang, X., Hu, F., Jiang, A., and Yang, C. (2018). Trajectory tracking of an omni-directional wheeled mobile robot using a model predictive control strategy. *Applied Sciences*, 8(2), 231.
- Zhang, X., Fang, Y., and Sun, N. (2015). Visual servoing of mobile robots for posture stabilization: from theory to experiments. *International journal of robust and nonlinear control*, 25(1), 1–15.
- Zhao, D., Deng, X., and Yi, J. (2009). Motion and internal force control for omnidirectional wheeled mobile robots. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(3), 382–387.