

Stability in the Synchronization of Multi-scroll Chaotic Systems using Hamiltonian Forms

Juan Luis Vázquez Gutiérrez * Didier López-Mancilla **

* *Centro Universitario de los Lagos Universidad de Guadalajara (e-mail: ing.juan.l.21@gmail.com).*

** *Centro Universitario de los Lagos Universidad de Guadalajara (e-mail: didierlman@gmail.com).*

Abstract: : This work contributes to the subject of stability in the synchronization of identical chaotic systems, coupled by means of a control law. Initially, chaotic systems with multiple scrolls are expressed in a Hamiltonian form, this allows us to observe particular characteristics of the system, since the system is divided into a conservative part and a dissipative part. This procedure helps in the design of a control law that allows identical chaotic systems to be synchronized. In particular, the technique of Model-Matching is used for the design of the control law, but an optimization is performed in the design of a control law, based only on the conservative part of the chaotic systems in Hamiltonian form. This gives us a new point of view in the design of the controllers used to achieve synchronization between chaotic systems, which simplifies the calculations that are carried out to obtain a law of control. A stability analysis is performed in this work to ensure that the synchronization of the two systems coupled by the effect of the control law meet the full system synchronization requirements, some numerical simulations are presented.

Keywords: Chaos control, Generalized Hamiltonian, Multi-scroll oscillators

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un análisis de estabilidad de la sincronización entre dos osciladores caóticos con múltiples enrollamientos, también conocidos como osciladores de Genesio y Tesi. Se logra una sincronización de los sistemas caóticos usando el método de Acoplamiento a Modelos aplicado a una forma Hamiltoniana generalizada de los sistemas caóticos. Una de las aplicaciones de la sincronización de sistemas caóticos es el encriptamiento de datos, para esta aplicación, aparte de lograr que los sistemas caóticos se sincronicen, es indispensable garantizar que la sincronización entre los sistemas sea estable.

El sistema de Genesio y Tesi se puede expresar en una forma Hamiltoniana generalizada como se usa en el trabajo de Tlelo-Cuautle et al. (2016), para dividir los sistemas originales en una función conservativa, disipativa y un vector desestabilizante. Para expresar un sistema en forma Hamiltoniana generalizada, se debe considerar una función de energía, donde el gradiente de la función de energía se usa como un vector de estados. En este trabajo, se usa una analogía al método de Acoplamiento a Modelos para obtener una ley de control, basada solo en la parte conservativa del sistema en forma Hamiltoniana. La Ley

de control se encarga de sincronizar los estados de los osciladores caóticos utilizados en este trabajo.

La utilización de sistemas en su forma Hamiltoniana ha sido utilizada para resolver muchos problemas de mecánica y dinámica desde su aparición. A finales de los 90s, se publicaron trabajos de Maschke, Sarlashkar y Ortega, donde se propuso un nuevo enfoque, que sugería una función de energía Hamiltoniana, como candidata a la función de Lyapunov, la cual se llamó sistema pseudo Hamiltoniano controlado encontrado en Chua (2001). En la literatura se puede encontrar artículos en los que se usan formas Hamiltonianas de sistemas caóticos para aplicaciones en comunicación como López-Mancilla et al. (2005); Garza-González et al. (2016). En los trabajos antes mencionados se utilizan formas Hamiltonianas de sistemas caóticos, sin embargo el enfoque de diseñar una ley control basada en la parte conservativa de sistemas en forma Hamiltoniana no se aplica. La propuesta de utilizar la parte conservativa de sistemas en forma Hamiltoniana para sincronizar sistemas caóticos se puede encontrar en Gutiérrez (2020).

El objetivo de este trabajo es presentar un análisis de estabilidad en la sincronía de dos sistemas idénticos de Genesio y Tesi de una dimensión, sincronizados en una configuración maestro-esclavo con seis enrollamientos,

utilizando una analogía al método de Acoplamiento a Modelos basado en la parte conservativa de los sistemas en forma Hamiltoniana. El hecho de utilizar solo una parte del sistema en una forma Hamiltoniana para el diseño de una ley de control, simplifica los cálculos utilizados para obtenerla, minimiza el tiempo de computo para la simulación y permite una posible implementación física.

En la Sección 2, se explican los conceptos básicos del método de Acoplamiento a Modelos y la forma general de obtener una ley de control basada en la parte conservativa de un sistema expresado en forma Hamiltoniana generalizada. En la sección 3 se presentan los cálculos para obtener una ley de control para lograr la sincronización de los sistemas caóticos utilizados en este trabajo. En la sección 4 se presenta el análisis de estabilidad de la sincronización entre dos sistemas de Genesio y Tesi bajo el efecto de la ley de control obtenida. En la sección 5 se presentan las simulaciones numéricas obtenidas. Por último, en la sección 6 se presentan las conclusiones principales del trabajo.

2. OBTENCIÓN DE UNA LEY DE CONTROL USANDO ACOPLAMIENTO A MODELOS BASADA EN LA PARTE CONSERVATIVA DE UN SISTEMA HAMILTONIANO

El problema de Acoplamiento a Modelos nos dice que dada una planta P y un modelo M , alrededor de sus respectivos puntos de equilibrio x^o y x_M^o y un punto x_E^o , el problema es encontrar una ley de control $u(t)$, tal que $y_E \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. El modelo M es el maestro y la planta P actúa como el esclavo en una configuración maestro-esclavo. Las variables $x(t) \in \mathbb{R}^N$ y $x_M(t) \in \mathbb{R}^N$ son los vectores de estado de cada sistema, $u(t)$ y $u_M(t)$ son las entradas de cada sistema, \dot{x} y \dot{x}_M representan el cambio en el tiempo de las variables de estado de los sistemas dinámicos $f(x)$ y $f_M(x_M)$ respectivamente, bajo la influencia de las entradas $g(x)u$ y $g_M(x_M)u_M$ en cada sistema. Las salidas de los sistemas P y M son y y y_M respectivamente. Las funciones $f(x)$, $g(x)$, $f_M(x_M)$, $g_M(x_M)$, $h(x)$ y $h_M(x_M)$ se consideran suaves y analíticas. En el método de Acoplamiento a Modelos se propone un sistema auxiliar, que contiene los dos sistemas que se pretenden sincronizar mediante una ley de control $u(t)$. El sistema auxiliar se basa en la planta P y el modelo M y se expresa como E .

$$P : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$M : \begin{cases} \dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M)u_M \\ y = h_M(x_M) \end{cases} \quad (2)$$

$$E : \begin{cases} \dot{x}_E = f_E(x_E) + \hat{g}(x_E)u + \hat{g}_M(x_E)u_M \\ y_E = h_E(x_E) \end{cases} \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} f_E(x_E) &= \begin{pmatrix} f(x) \\ f_M(x_M) \end{pmatrix} & \hat{g}_M(x_E) &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_M(x_M) \end{pmatrix} \\ \hat{g}(x_E) &= \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix} & h_E(x_E) &= h(x) - h_M(x_M). \end{aligned} \quad (4)$$

La salida del sistema auxiliar E es la diferencia de las salidas de P y M , esto significa que cuando el resultado es cero los sistemas P y M están sincronizados. Para lograr esto usando Acoplamiento a Modelos, la ley de control $u(t)$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (v - L_f^r h(x) + L_{f_M}^r h_M(x_M) \\ &+ L_{g_M} L_{f_M}^{r-1} h_M(x_M) u_M). \end{aligned} \quad (5)$$

La ecuación (5) es una fórmula general para encontrar una ley de control, utilizada para la sincronización de sistemas idénticos o no idénticos tomada del trabajo de López-Mancilla (2005). La ley de control se obtiene al calcular las derivadas de Lie $L_g L_f^{r-1} h(x)$, $L_f^r h(x)$, $L_{f_M}^r h_M(x_M)$ y $L_{g_M} L_{f_M}^{r-1} h_M(x_M)$, v en la fórmula general es $v = -c_0 h_E(x_E) - c_1 L_E h_E(x_E) - \dots - c_{r-1} L_E^{r-1} h_E(x_E)$. Las constantes c_i , $i = 0, 1 \dots r-1$ de v se pueden obtener con el método de ubicación de polos. Para aplicar Acoplamiento a Modelos, el grado relativo del sistema r de la planta P debe ser menor o igual que el grado relativo r_M del modelo M . Donde el grado relativo de un sistema se interpreta como la cantidad de derivadas aplicadas a la salida de un sistema para obtener las entradas de un sistema de manera explícita.

Considerando un sistema autónomo n -dimensional

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^N \quad (6)$$

La cual representa un sistema de ecuaciones diferenciales, se puede escribir en una forma Hamiltoniana generalizada con la siguiente forma:

$$\dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x} + S(x) \frac{\partial H}{\partial x} + F(x) \quad (7)$$

donde $H(x)$ denota una función de energía suave que es globalmente definida positiva en \mathbb{R}^N . El gradiente del vector columna $H(x)$, se denota por $\frac{\partial H}{\partial x}$, se supone que existe en todas partes. Para la elección de $H(x)$, las funciones de energía cuadráticas son utilizadas con frecuencia, con la forma:

$$H(x) = \frac{1}{2} x^T M x \quad (8)$$

con M siendo una matriz simétrica definida positiva. Las matrices cuadradas, $J(x)$ y $S(x)$, dentro de la expresión (7) satisfacen, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, las siguientes propiedades que muestran la estructura de administración de energía del sistema son:

$$J(x) + J^T(x) = 0, \quad S(x) = S^T(x). \quad (9)$$

El campo vectorial $J(x)\frac{\partial H}{\partial x}$ exhibe la parte conservativa del sistema y también se conoce como la parte sin trabajo. La matriz $S(x)$ es, en general, una matriz simétrica que representa la parte que presenta el trabajo o la parte disipativa del sistema. Para ciertos sistemas, la matriz $S(x)$ es semi-definida negativa o definida negativa. En tales casos, el campo vectorial se conoce como la parte disipativa del sistema. Si $S(x)$ es definida positiva, o semi-definida positiva, representa la parte desestabilizadora global, semi-global y local del sistema. $F(x)$ representa un campo vectorial localmente desestabilizante, podemos encontrar más información en Sira-Ramirez and Cruz-Hernandez (2000).

Teniendo en cuenta que la parte disipativa del sistema será cero a medida que el tiempo tiende hacia el infinito y la función desestabilizante depende de las variables de estado, las partes disipativa y desestabilizante del sistema en forma Hamiltoniana, no se consideran parte del sistema cuando aplicamos Acoplamiento a Modelos para encontrar la ley de control que logre la sincronización entre el modelo y la planta propuestos. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se propone que el modelo, la planta y el sistema auxiliar sean:

$$P_H : \begin{cases} \dot{x} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u_H \\ y = h(x) \end{cases} \quad (10)$$

$$M_H : \begin{cases} \dot{x}_M = J_M(x_M)\frac{\partial H_M}{\partial x_M} + g_M(x_M)u_M \\ y = h_M(x_M) \end{cases} \quad (11)$$

$$E_H : \begin{cases} \dot{x}_E = f_E(x_E) + \hat{g}(x_E)u_H + \hat{g}_M(x_E)u_M \\ y_E = h_E(x_E) \end{cases} \quad (12)$$

donde

$$f_E(x_E) = \begin{pmatrix} J(x) & 0 \\ 0 & J_M(x_M) \end{pmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_E}$$

$$\hat{g}_M(x_E) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_M(x_M) \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\hat{g}(x_E) = \begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_E(x_E) = h(x_E) - h_M(x_E).$$

$H(x)$ y $H_M(x_M)$ son las funciones de energía propuestas para los sistemas P_H y M_H en forma Hamiltoniana. La función de energía del sistema auxiliar es $H_E(x_E) = H(x) + H_M(x_M)$. Con la propuesta de los nuevos sistemas y haciendo una analogía con la ley general de control que se usa en Acoplamiento a Modelos (ecuación (5)), se propone una ley de control general para casos en los que se conoce la forma Hamiltoniana de algún sistema, con la siguiente forma:

$$u_H = \frac{1}{L_{\hat{g}}L_{f_E}^{r-1}h_E(x_E)}(v - L_{f_E}^r h_E(x_E) + L_{\hat{g}}L_{f_E}^{r-1}h_E(x_E)u_M). \quad (14)$$

3. LEY DE CONTROL PARA SINCRONIZAR DOS SISTEMAS DE GENESIO Y TESI

Para calcular la ley de control basada en la parte conservativa de los sistemas en forma Hamiltoniana generalizada, se usa la ecuación (14), para el cálculo de las constantes de v , se usa el método de ubicación de polos.

Basado en la forma Hamiltoniana de un sistema de Genesio y Tesi, con una función de energía $H(x) = \frac{1}{2}[ax_1^2 + ax_2^2 + x_3^2]$ tomada del trabajo de Tlelo-Cuautle et al. (2016), las ecuaciones dinámicas están descritas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -a \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ af(x_1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

La función $f(x_1)$ es una función a intervalos no lineal que define el número de puntos de equilibrio y enrrollamientos que se formarán en el oscilador caótico, $f(x_1)$ esta dada por:

$$f(x_1) = \sum_{i=1}^{M_{x_1}} g_{-2i+1}(x_1) + \sum_{i=1}^{N_{x_1}} g_{2i-1}(x_1) \quad (16)$$

donde

$$g_{\theta}(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq \theta & \theta > 0 \\ 0, & x_1 < \theta & \theta > 0 \\ 0, & x_1 \geq \theta & \theta < 0 \\ -1, & x_1 < \theta & \theta < 0. \end{cases} \quad (17)$$

La función (17) es conocida como la función esencia o núcleo, como se menciona en el trabajo de Soriano-Sánchez (2013), la cantidad de enrrollamientos se define eligiendo los valores para M_{x_1} y N_{x_1} en la ecuación (16).

Utilizando solo la parte conservativa de la forma Hamiltoniana, se propone una planta P_H y modelo M_H como:

$$P_H : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_H \\ y = x_1 \end{cases} \quad (18)$$

$$M_H : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_M}{\partial x_M} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_M \\ y = x_{M1} \end{cases} \quad (19)$$

Dados P_H y M_H el sistema auxiliar E_H queda como se muestra en la ecuación (20).

$$E_H : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_{M1} \\ \dot{x}_{M2} \\ \dot{x}_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2a} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H_E}{\partial x_E} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_H + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_M \\ y_E = x_1 - x_{M1} \end{cases} \quad (20)$$

Calculando las derivadas de Lie necesarias, donde el grado relativo se considera como $r = 2$ y sustituyendo los valores de las derivadas de Lie en (14) la ley de control para la sincronización es:

$$u_H = \left(\frac{a+1}{2} - 2c_1\right)(x_1 - x_{M1}) + (a - c_2)(x_2 - x_{M2}) + (1 - c_2)(x_3 - x_{M3}) + u_M. \quad (21)$$

4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En esta sección se presenta un análisis de estabilidad para la sincronización entre dos sistemas de Genesio y Tesi bajo el efecto de la ley de control propuesta en la sección anterior. Se propone un sistema dinámico de error $\dot{e} = f(x_i, x_{Mi}, e_i)$ donde $e_i = x_i - x_{Mi}$, para i, \dots, n donde n es el orden del sistema. De tal manera que e_i es:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_{M1} \\ e_2 &= x_2 - x_{M2} \\ e_3 &= x_3 - x_{M3}. \end{aligned} \quad (22)$$

El sistema dinámico de error queda como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{M1} \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{M2} \\ \dot{e}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{x}_{M3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Sustituyendo la dinámica de los sistemas maestro y esclavo que se pretenden sincronizar mediante la ley de control (21) en el sistema de ecuaciones (23), el sistema dinámico de error queda como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= x_2 - x_{M2} \\ \dot{e}_2 &= x_3 - x_{M3} + u_H - u_M \\ \dot{e}_3 &= -a(x_1 - x_{M1}) - a(x_2 - x_{M2}) - a(x_3 - x_{M3}) \\ &\quad + af(x_1) - af(x_{M1}) \end{aligned} \quad (24)$$

Dado que los sistemas maestro y esclavo son idénticos se puede considerar $f(x_1) = f(x_{M1})$. Al observar la ecuación (21) o ley de control, u_H se puede reescribir como $u_H = \hat{u}_H + u_M$. Haciendo una sustitución de las variables x_i, x_{Mi} por sus equivalentes con las variables e_i el sistema dinámico de error queda como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 + k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 \\ \dot{e}_3 &= -ae_1 - ae_2 - ae_3 \end{aligned} \quad (25)$$

Donde $k_1 = \frac{a+1}{2} - 2c_1$, $k_2 = a - c_2$ y $k_3 = 1 - c_2$. La técnica de Acoplamiento a Modelos garantiza que la salida de la planta $x_1(t)$ sigue a la salida $x_{M1}(t)$ por lo que se supone que $e_1(t)$ tiende a cero. Tomando esto en cuenta la ecuación (25) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= k_2 e_2 + (1 + k_3) e_3 \\ \dot{e}_3 &= -ae_2 - ae_3 \end{aligned} \quad (26)$$

De la ecuación (26) se puede observar que \dot{e}_2 y \dot{e}_3 no dependen de e_1 , por lo que se puede considerar como un subsistema dado por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= (a - c_2)e_2 + (2 - c_2)e_3 \\ \dot{e}_3 &= -ae_2 - ae_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Para el análisis de este subsistema se propone una función de Lyapunov con la forma $V(e) = \frac{1}{2}(e_2^2 + e_3^2)$, la derivada de la función de Lyapunov esta dada por:

$$\dot{V}(e) = e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3. \quad (28)$$

Al sustituir las ecuaciones dinámicas de (27) en la ecuación (28), la derivada de la función de Lyapunov propuesta queda como:

$$\dot{V}(e) = e_2((a - c_2)e_2 + (2 - c_2)e_3) + e_3(-ae_2 - ae_3). \quad (29)$$

Reordenando términos en la ecuación (29), esta se puede escribir con la siguiente forma:

$$\dot{V}(e) = -[e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} c_2 - a & \frac{c_2 - 2 + a}{2} \\ \frac{c_2 - 2 + a}{2} & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Los menores principales de la matriz en la ecuación (30) son:

$$\begin{aligned} m_1 &= c_2 - a \\ m_2 &= (c_2 - a)a - \left(\frac{c_2 - 2 + 2}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Para que $\dot{V}(e)$ sea definida negativa se debe cumplir que $m_1, m_2 > 0$, para m_1 la constante c_2 debe ser mayor que a , m_2 se puede reescribir como:

$$m_2 = c^2 - 4c_2 + (3a^2 - 4a + 4) > 0. \quad (32)$$

Para que m_1 y m_2 sean mayores que cero con $a = 0.8$, c_2 debe ser igual o mayor a 4. Los menores principales dependen de c_2 , lo que indica que haciendo una selección adecuada de esta constante hace que $\dot{V}(e)$ sea definida negativa, lo que a su vez comprueba que e_2 y e_3 tienden asintóticamente a cero.

5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección, se presentan las simulaciones numéricas de la sincronización entre dos sistemas de Genesis y Tesi utilizando la ley de control obtenida en la sección 3. Las simulaciones se realizan usando un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden, programado en MatLab.

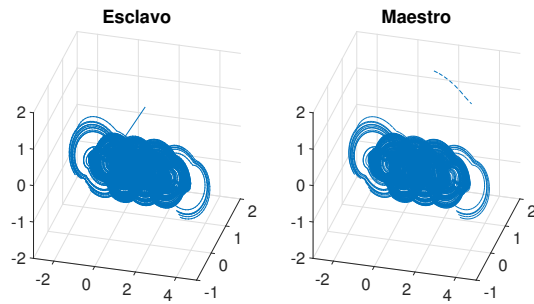


Fig. 1. Gráfica de los estados del sistema maestro y esclavo.

El sistema de Genesis y Tesi exhibe una dinámica caótica con el parámetro $a = 0.8$. Las condiciones iniciales para cada oscilador son seleccionadas al azar en un rango de $x(0) \in [0 \ 2]$. En este caso se trabaja con osciladores con 6 enrollamientos en una sola dimensión, pero el número de enrollamientos puede cambiar modificando los parámetros en la función generadora como es mencionado en el trabajo de Soriano-Sánchez (2013). En la figura 1 se muestra la dinámica de los sistemas de Genesis y Tesi en configuración de maestro-esclavo. Para el sistema maestro se eligió un $u_M = 0.5 \sin(t)$ para simular una pequeña perturbación en el sistema.

En la figura 2 se muestra la gráfica de los estados x_1 y x_{M1} contra el tiempo. En la parte superior izquierda se muestra un acercamiento de como los estados convergen en el tiempo con el fin de observar de forma clara la dinámica de los estados. En la figura 3 se puede apreciar la gráfica de sincronía entre los estados, en la cual se puede apreciar que están a cuarenta y cinco grados, lo que indica

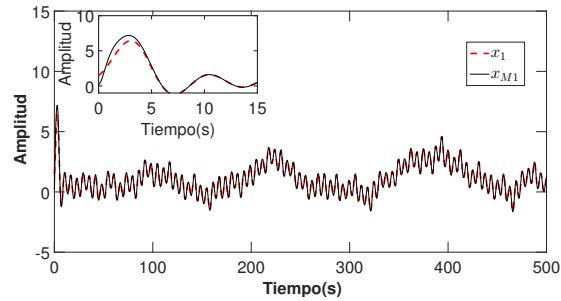


Fig. 2. Gráfica de los estados x_1 y x_{M1} contra el tiempo.

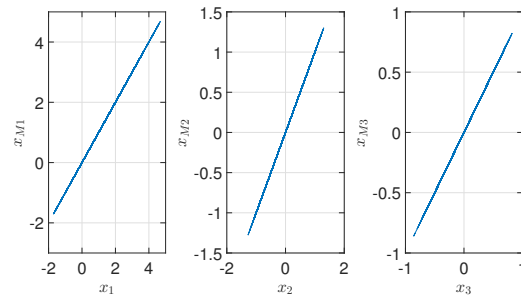


Fig. 3. Gráficas de sincronización entre los estados.

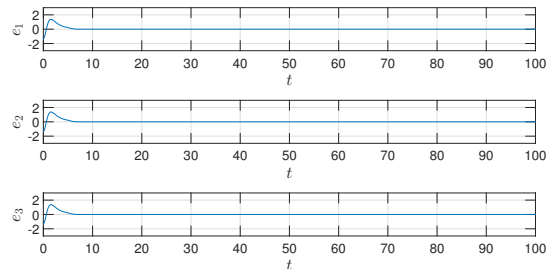


Fig. 4. Gráficas de los errores e_i contra el tiempo.

que se logra la sincronización en la configuración maestro-esclavo.

En la figura 4 se grafican los errores e_i contra el tiempo t , se puede observar que después de algún tiempo la diferencia entre los estados es cero, lo que indica que se logra el objetivo de control esperado.

6. CONCLUSIONES

Con base a las simulaciones, se puede concluir que la ley de control obtenida para la sincronización de los sistemas caóticos de Genesis y Tesi se logra. El método de Acoplamiento a Modelos se utiliza para obtener la ley de control basada en la parte conservativa de la forma Hamiltoniana generalizada. Hacer esto nos brinda una ley de control optimizada, simplificando los cálculos que se hacen con respecto al método original. Dado que las leyes de control son relativamente simples, se puede realizar una posible implementación física para futuros trabajos.

En el análisis de estabilidad bajo la consideración de que los sistemas son idénticos, la estabilidad de la sincronía entre el sistema maestro y esclavo, no depende de la función no lineal $f(x)$ lo que hace que la misma ley de control se pueda utilizar para sincronizar sistemas de Genesio y Tesi con n enrollamientos.

REFERENCES

- Chua, L. (2001). *Advanced Topics in Nonlinear Control Systems*. World Scientific, series a v edition.
- Garza-González, E., Posadas-Castillo, C., Rodríguez-Liñan, A., and Cruz-Hernández, C. (2016). Chaotic synchronization of irregular complex network with hysteretic circuit-like oscillators in hamiltonian form and its application in private communications. *Revista mexicana de física*, 62(1), 51–59.
- Gutiérrez, J.L.V. (2020). *Sincronización de Redes de Sistemas Caóticos por Acoplamiento a Modelos Basado en la parte conservativa de Sistemas en Forma Hamiltoniana Generalizada*. Master's thesis, Centro Universitario de los Lagos Maestría en Ciencia y Tecnología.
- López-Mancilla, D., Cruz-Hernández, C., and Posadas-Castillo, C. (2005). A modified chaos-based communication scheme using hamiltonian forms and observer. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 23, 267. IOP Publishing.
- López-Mancilla, D. (2005). *Sincronización de Osciladores Caóticos Perturbados con Aplicación a Sistemas de Comunicaciones*. Ph.D. thesis, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Sira-Ramirez, H. and Cruz-Hernandez, C. (2000). Synchronization of chaotic systems: a generalized hamiltonian systems approach. *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, 2(5), 1381–1395. doi:10.1109/ACC.2000.876602.
- Soriano-Sánchez, A.G. (2013). *Sincronización de Redes Complejas con Atractores Caóticos de Multiplas Enrollamientos: Aplicado al Encriptamiento de Datos*. Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Tlelo-Cuautle, E., de la Fraga, L., and Rangel-Magdaleno, J. (2016). *Engineering applications of FPGAs*. Springer.