

Non-homogeneous observer-based-output feedback scheme for the double integrator [★]

Emmanuel Cruz-Zavala ^{*}, Emmanuel Nuño ^{*},
Jaime A. Moreno ^{**}

^{*} *Departamento de Ciencias Computacionales, CUCEI, Universidad de Guadalajara. Guadalajara, Jalisco, México.*

^{**} *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad de México, México.*

Resumen:

In this paper we propose a non-homogeneous observer-based-output feedback scheme for the double integrator system. The control scheme is composed by two non-homogeneous structures. It resembles a non-homogeneous state feedback controller, where the unmeasurable state is replaced by that provided by a non-homogeneous observer. Compared to other reported schemes, the closed-loop system is not homogeneous of negative degree, so it is not possible to use the results established for homogeneous systems. To overcome this problem, the finite-time stability analysis is carried out by means of (local) strict Lyapunov functions.

Key words: Non-homogeneous Finite-time control, Double integrator, Lyapunov methods.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se centra en el desarrollo de esquemas de control de Tiempo Finito (TF) por retroalimentación de salida para el sistema doble integrador

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u. \quad (1)$$

La literatura es extensa en sistemas dinámicos de control continuo que tienen equilibrio estable en TF, Haimo (1986); Bhat and Bernstein (1997, 1998); Hong et al. (2001); Moulay and Perruquetti (2006); Bernuau et al. (2014). En particular, en los trabajos Bhat and Bernstein (1997, 1998); Hong et al. (2002); Nakamura et al. (2009); Cruz-Zavala et al. (2018), Hong et al. (2001); Orlov et al. (2011); Bernuau et al. (2014); Polyakov et al. (2015); Su and Zheng (2015), se proponen diversas familias de controladores continuos por retroalimentación de estado y por retroalimentación de salida que estabilizan globalmente el origen del sistema (1) en TF. Todos estos controladores se caracterizan por ser homogéneos, o por admitir una aproximación homogénea, y lograr que el campo vectorial del sistema en lazo cerrado sea homogéneo o tenga una aproximación homogénea, véase Andrieu et al. (2008). Los resultados de sistemas dinámicos homogéneos aseguran la estabilidad en TF del equilibrio, siempre que el origen sea Asintóticamente Estable (AE) y homogéneo o con aproximación homogénea de grado negativo, acorde con Bhat and Bernstein (1997); Bacciotti and Rosier (2005); Andrieu et al. (2008).

Sin embargo, la clase de controladores y sistemas de TF es mucho más amplia que la de los homogéneos. Los sistemas estables en TF no homogéneos han sido escasamente estudiados. Aunque inicialmente una clase de controladores no homogéneos se estudió en el trabajo pionero de Haimo (1986), solo pocos trabajos posteriores se han encargado de estudiar algunos algoritmos no homogéneos. Por ejemplo, los algoritmos de super-twisting no homogéneos se trataron en Moreno (2014) usando técnicas de Lyapunov. La versión continua del control de modo deslizante del terminal Yu et al. (2005) no es homogénea. Qian and Lin (2003) reportaron otro enfoque interesante para diseñar controladores por retroalimentación de salida no homogéneos para sistemas no lineales de segundo orden pero no queda claro cuándo se recuperan los controladores de TF. Recientemente, el trabajo de Zavala-Rio et al. (2022) reporta un análisis más detallado de sistema de control reportado por Haimo

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -[x]^a - [y]^b. \quad (2)$$

para $a > 0$, y $b > 0$, donde $[z]^p := |z|^p \text{sign}(z)$, con $z \in \mathbb{R}$ y $p > 0$. Y en Cruz-Zavala et al. (2021) se estudia el sistema de control más general que el sistema (2),

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k_1[\bar{s}(x, y)]^a - k_2[y]^b \quad (3)$$

con $\bar{s}(x, y) \triangleq \bar{k}_2^{b/a}[y]^{b/a} + x$. Dado que, en general, los valores de a y b no hacen homogéneo al sistema de lazo cerrado, los resultados de homogeneidad clásica no son útiles para determinar la estabilidad en TF. Para superar este problema, tanto en Cruz-Zavala et al. (2021) como en Zavala-Rio et al. (2022) se propone un análisis basado en funciones de Lyapunov, las cuales permiten obtener las

[★] Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por CONACyT CB-282807 y por PAPIIT-UNAM IN102121. .

condiciones $1 > b > a > 0$ que garantizan convergencia en TF. Estas condiciones difieren de las establecidas por (Haimo, 1986, Corolario 1), quien establece que las condiciones *suficientes* para que (2) sea TF estable son $1 > b > 0$ y $a > b/(2 - b)$.

En el caso de controladores homogéneos por retroalimentación de salida se tienen dos soluciones, implementando observadores como en (Hong et al., 2001; Bernuau et al., 2014; Polyakov et al., 2015), o usando filtros de velocidad como en (Su and Zheng, 2015). En (Cruz-Zavala et al., 2021) se reportó la versión no homogénea del esquema propuesto por (Su and Zheng, 2015). Pero la versión no homogénea usando observador no ha sido reportada.

El objetivo de este artículo es proponer un esquema de control no homogéneo por retroalimentación de salida basado en observadores. Para ello primero se generaliza el sistema de control (3) permitiendo que el exponente del término anidado tenga un valor arbitrario, es decir,

$$u = -k_1[\bar{s}(x, y)]^a - k_2[y]^b \quad (4)$$

siendo $\bar{s}(x, y) \triangleq \bar{k}_2[y]^c + x$ y $c > 0$. A continuación, se propone un observador no homogéneo para el sistema doble integrador, cuya versión no tiene el término discontinuo del algoritmo super-twisting reportado en Moreno (2014). Finalmente, utilizando estos dos elementos se propone un control por retroalimentación de salida.

2. PRELIMINARES

En este artículo se usa la siguiente *notación*: $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$, $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Para toda $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ es su valor absoluto. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, con $m \in \mathbb{N}$, $\|\mathbf{x}\|$ es la norma Euclidiana. Para cualquier $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $B_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ es la bola abierta centrada en el origen de radio δ . Una función $\mathbf{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}^m$ es de clase \mathcal{C}^k , con $k \in \mathbb{N}$, si sus derivadas $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, \dots, \mathbf{f}^{(k)}$ existen y son continuas. Para una función diferenciable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla V(\mathbf{x}) \triangleq [\partial_{x_1} V(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} V(\mathbf{x})]^\top$ siendo $\partial_{x_i} V(\mathbf{x}) \triangleq \partial V(\mathbf{x})/\partial x_i$.

2.1 Propiedades de algunas funciones

La función $|x|^p$ tiene las siguientes propiedades:

P1: Para cada $p \in [0, 1)$, $|x|^p$ es diferenciable para toda $x \neq 0$, $|x|^p \in \mathcal{C}^1$ si $p \in [1, 2]$ y $|x|^p \in \mathcal{C}^2$ si $p \in (2, \infty)$. \triangleleft

P2: $\partial_x |x|^p = p|x|^{p-1}$ y $\partial_x |x|^p = p|x|^{p-1}$, $\forall x \neq 0$. $\int_0^x |z|^p dz = \frac{1}{p+1}|x|^{p+1}$ y $\int_0^x |z|^p dz = \frac{1}{p+1}|x|^{p+1}$. \triangleleft

Recordemos el concepto de homogeneidad ponderada y las propiedades de funciones homogéneas (ponderadas).

Definición 1. (Véase Bacciotti and Rosier (2005)). Sea el vector $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$, y los *pesos de homogeneidad* $\mathbf{r} \triangleq [r_1, \dots, r_n]^\top \in \mathbb{R}_{>0}^n$. El operador dilatación $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}}$ se define como $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x} \triangleq [\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n]^\top$. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *r-homogénea* de grado $l \in \mathbb{R}$, o

(r, l)-homogénea, si para toda $\epsilon > 0$ y para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la igualdad $V(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = \epsilon^l V(\mathbf{x})$ se cumple. \triangleleft

Lema 1. Considere dos funciones $V_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que son *(r, l_k)-homogéneas*, $k = 1, 2$, $l_k \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (1) El producto $V_1(x) V_2(x)$ es *(r, l₁ + l₂)-homogéneo*.
- (2) Si V_1 es definida positiva, existen constantes $c_1 \leq c_2$ tal que las desigualdades $c_1 [V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}} \leq V_2(x) \leq c_2 [V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}}$ se cumplen para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Además, si V_2 es definida positiva, entonces $c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$. \triangleleft

Lema 2. (Hestenes (1966)). Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dos funciones continuas *(r, m)-homogéneas*. Defina $Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \zeta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$. Si $\eta(\mathbf{x}) > 0$ para toda $\mathbf{x} \in Z$, entonces existe $\lambda^*, c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para toda $\lambda \geq \lambda^*$ y para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\eta(\mathbf{x}) + \lambda \zeta(\mathbf{x}) > c \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}, p}^m$. \triangleleft

Los siguientes lemas también se emplean para demostrar los resultados principales.

Lema 3. (Cruz-Zavala et al. (2018)). Para toda $x, y \in \mathbb{R}$, y cualquier $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, si $a \leq b$, entonces $|[y]^a + [x]^a|^{1/a} \leq 2^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}|[y]^b + [x]^b|^{1/b}$. Además, la igualdad se cumple si y solo si $a = b$ ó $x = y$. \triangleleft

Lema 4. (Mercado-Uribe and Moreno (2017)). Para toda $x, y \in \mathbb{R}$, y cualquier $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, $\text{sign}([x+y]^\mu - [x]^\mu) = \text{sign}(y)$. \triangleleft

Lema 5. Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ y $a, A, B, C, d, p \in \mathbb{R}_{>0}$, siendo $\frac{3+a}{2(1+a)} \geq p$, la función $v_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $v_0(x, y) = (A|y|^2 + B|x|^{1+a})^p - dC|x||y|$, es no negativa en B_1 si y solo si $d^2 \leq A[B/(2p-1)]^{2p-1}(2p)^{2p}/C^2$. \triangleleft

Prueba 1. Véase el Apéndice.

2.2 Estabilidad en tiempo finito

Considere un sistema dinámico descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de estados, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ es el campo vectorial continuo asociado a (5). Suponga que el origen es un punto de equilibrio, es decir, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Definición 2. (Bhat and Bernstein, 1998). El origen de (5) es estable en tiempo finito (ETF) si es estable en el sentido de Lyapunov y existe una función acotada localmente $T : B_\delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (llamada la función de tiempo de asentamiento) de modo que para cada $\mathbf{x}_0 \in B_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$, cualquier solución $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ de (5) está definida en $t \in [0, T(\mathbf{x}_0))$ y $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ para toda $t \geq T(\mathbf{x}_0)$. Si $B_\delta = \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es globalmente ETF (GETF). \triangleleft

La estabilidad en TF se puede determinar con nociones de homogeneidad. La relación entre estabilidad y aproximaciones homogéneas se establece en (Orlov, 2009; Bacciotti and Rosier, 2005; Andrieu et al., 2008; Zavala-Rio and Fantoni, 2014). Si (5) admite una aproximación homogénea con punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ siendo AE tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es homogénea de grado negativo, entonces el origen es GETF. Sin embargo, cuando no existe tal

aproximación, este resultado no es útil y el análisis de estabilidad en TF es muy desafiante. Para hacer frente a este problema se utiliza el siguiente resultado.

Lema 6. (Bhat and Bernstein, 1998). Suponga que existe una función \mathcal{C}^1 definida positiva $V : B_\delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y números reales $\alpha > 0$ y $q \in (0, 1)$, tal que

$$\dot{V} + \alpha V^q \leq 0 \quad (6)$$

en B_δ , donde $\dot{V} = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$. Entonces, el origen de (5) es un equilibrio estable en tiempo finito. Además, si T es el tiempo de asentamiento, entonces $T \leq \frac{1}{\alpha(1-q)} V(\mathbf{x})^{1-q}$ para toda $\mathbf{x} \in B_\delta$. \diamond

Cabe mencionar que un punto de equilibrio globalmente AE y localmente ETF, da lugar a un equilibrio GETF.

3. RESULTADOS PRINCIPALES

3.1 Control por retroalimentación de estados

El sistema de lazo cerrado (1) y (4) queda descrito por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k_1 [\bar{s}(x, y)]^a - k_2 [y]^b \quad (7)$$

Dado que, en general, los valores de a , b y c no hacen homogéneo al sistema de lazo cerrado, los resultados de homogeneidad clásica no son útiles para determinar la ETF. Para superar este problema, se proponen las candidatas $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ siendo

$$V = \frac{1}{2}|y|^2 + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a}, \quad k_1 > 0, \quad (8)$$

$$\mathcal{V} = (\gamma_2 + 1)V^p + d_1 xy, \quad \gamma_2 > 0, \quad (9)$$

donde

$$\min \left\{ \frac{3+a}{2(1+a)}, \frac{3-b}{2}, \frac{b+a}{2a}, \frac{1+c}{2} \right\} \geq p > 1, \quad (10)$$

$$0 < d_1^2 \leq \left(\frac{2k_1}{(2p-1)(1+a)} \right)^{2p-1} p^{2p}. \quad (11)$$

Acorde con **P2**, $V \in \mathcal{C}^1$ para cualquier $a > 0$ y $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^1$ para $p \geq 1$ y $a > 0$.

Proposición 1. El origen del sistema de lazo cerrado (3) es globalmente ETF cuando

- (i) Para toda $k_1, k_2, \bar{k}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ y con la condición de exponentes $1 > b > a > 0$ y $c > 1$,
- (ii) Para toda $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $\bar{k}_2 = 0$ y con la condición de exponentes $1 > b > a > 0$.

\diamond

Comentario 1. En general, el conjunto $\mathcal{S} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : s(\mathbf{x}) = 0\}$ no es invariante positivo para (3). Observe que a lo largo de las soluciones de (3), $\dot{s}(\mathbf{x}) = ck_2^c |y|^{c-1} \dot{y} + y = -ck_2^c k_1 |y|^{c-1} [\bar{s}(\mathbf{x})]^a - ck_2^c k_2 |y|^{c-1} [y]^b + y$, y los últimos términos no se cancelan para todos los valores de c y b . Esto solo sucede si $\bar{k}_2 = [1/(ck_2)]^{1/c}$ y $c = 2 - b$. En este caso, existe $t \geq t_1$ tal que toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (3) permanece en $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}$, ya que para algún t_1 , $\mathbf{x}(t_1) \in \mathcal{S}$, debido a que $s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) \leq 0$ se cumple. \mathcal{S} puede verse como un modo deslizante terminal, (Venkataraman and Gulati, 1993). Adicionalmente, se recuperan los controladores homogéneos reportados en (Cruz-Zavala et al., 2018) cuando $a = b/(2 - b)$.

El caso del inciso (ii) es el reportado por (Haimo, 1986). En (Cruz-Zavala et al., 2021) y (Zavala-Rio et al., 2022), se establece que el exponente a puede tomar valores menores que $b/(2 - b)$. Acorde con lo anterior, las condiciones establecidas por Haimo se reducen a $1 > b > a > b/(2 - b)$, (Bacciotti and Rosier, 2005).

3.2 Observador

Considere el observador de orden completo dado por

$$\dot{\hat{x}} = -l_1 [e_1]^{b_o} + \hat{y}, \quad \dot{\hat{y}} = -l_2 [e_1]^{a_o} + u, \quad (12)$$

donde $e_1 = \hat{x} - x$. Se define $e_2 = \hat{y} - y$. La dinámica del error de observación viene dada por

$$\dot{e}_1 = -l_1 [e_1]^{b_o} + e_2, \quad \dot{e}_2 = -l_2 [e_1]^{a_o}, \quad (13)$$

Las candidatas a funciones de Lyapunov $V_o : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{V}_o : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son

$$V_o = \frac{1}{2}|e_2|^2 + \frac{1}{1+a_o} l_2 |e_1|^{1+a_o}, \quad (14)$$

$$\mathcal{V}_o = (\gamma_4 + 1)V_o^p - d_3 e_1 e_2, \quad \gamma_4 > 0 \quad (15)$$

donde

$$\min \left\{ \frac{3+a_o}{2(1+a_o)}, \frac{2+a_o-b_o}{1+a_o}, \frac{1+b_o}{1+a_o} \right\} \geq p > 1, \quad (16)$$

$$0 < d_3^2 \leq \left(\frac{2l_2}{(2p-1)(1+a_o)} \right)^{2p-1} p^{2p}. \quad (17)$$

Proposición 2. Para toda $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ y bajo las condiciones de exponente $1 > b_o > a_o > 0$, el origen del sistema (13) es globalmente ETF. \triangleleft

La dinámica (13) puede verse como la versión continua del algoritmo propuesto en Moreno (2014), el cual se recupera haciendo $a = 0$.

3.3 Control por retroalimentación de salida

En este caso el sistema de lazo cerrado está dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u = -k_1 [\bar{s}(\hat{x}, \hat{y})]^a - k_2 [\hat{y}]^b \quad (18)$$

con $\bar{s}(\hat{x}, \hat{y}) \triangleq \bar{k}_2^c [\hat{y}]^c + x$, y donde \hat{x} y \hat{y} se estiman mediante el observador (12).

Proposición 3. Considere la ley de control de retroalimentación de salida (18) con \hat{x} y \hat{y} generada por el observador (12). Entonces, el origen del sistema de lazo cerrado (18) y (12) es globalmente atractivo en tiempo finito si las ganancias del controlador k_1, k_2, \bar{k}_2 , las ganancias del observador l_1, l_2 , y los exponentes de ambos se seleccionan como en las Proposiciones 1 y 2, respectivamente. \triangleleft

4. PRUEBA DE LOS RESULTADOS PRINCIPALES

4.1 Prueba de la Proposición 1: caso $k_1, k_2, \bar{k}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

La derivada de V en la dirección de (7) satisface (se ha usado Lema 4 con $z = \bar{k}_2^c [y]^c$)

$$\dot{V} = -k_2 |y|^{1+b} - k_1 |y| |\chi(x, y)|, \quad (19)$$

donde $\chi(x, y) = [\bar{s}(x, y)]^a - [x]^a$ y $\dot{V} \leq 0$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Con lo anterior y utilizando los mismos argumentos

en (Cruz-Zavala et al., 2021) se concluye estabilidad asintótica global en $x = y = 0$. El sistema (3) no es homogéneo y no admite una aproximación homogénea de grado negativo. Por lo tanto, se analiza la estabilidad en TF usando el Lema 6 y la función \mathcal{V} en la bola B_1 , lo cual implica que $|x| < 1$ y $|y| < 1$.

Utilizando el Lema 5, (9) es definida positiva porque eligiendo d_1 como en (11) y p tal que $\frac{3+a}{2(1+a)} \geq p$ se tiene $V^p + d_1xy \geq 0$ y V es definida positiva.

La derivada en el tiempo de \mathcal{V} es

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{V}}}{1 + \gamma_2} &= pV^{p-1}\dot{V} + \gamma \frac{d}{dt}(xy), \quad \gamma = \frac{1}{1 + \gamma_2}, \quad (20) \\ \frac{d}{dt}(xy) &= y^2 + x(-[k_1\bar{s}(x, y)]^a - k_2[y]^b) \\ &= y^2 - k_1x[x]^a - k_1x\chi(\mathbf{x}) - k_2x[y]^b. \end{aligned}$$

En esta última ecuación se ha sumado y restado el término $k_1x[x]^a$ y se ha definido el vector $\mathbf{x} = [x, y]^T$.

Se procede a acotar correctamente los términos en (23):

(a) De (19) se obtiene $pV^{p-1}\dot{V} \leq -A|y|^{2p+b-1} - C|\varphi(\cdot)|$, con $\varphi(\cdot) = |y|^{2p-1}|\chi(\cdot)|$, siendo las constantes $A = p(1/2)^{p-1}k_2$ y $C = p(1/2)^{p-1}k_1$.

(b) Observe que $y^2 = |y|^2 = |y|^{2-2p-b+1}|y|^{2p+b-1} \leq |y|^{2p+b-1}$ cuando $\frac{3-b}{2} \geq p$, y $\frac{3-b}{2} > 1$ si y solo si $1 > b$.

(c) Del Lema 3, $|\chi(\mathbf{x})| = (|\chi(\mathbf{x})|^{\frac{2p-1}{ca}}|\chi(\mathbf{x})|)^{\frac{ca}{2p-1+ca}} \leq \varpi\varphi^{\frac{ca}{2p-1+ca}}(\mathbf{x})$, para toda $a \in (0, 1]$, siendo $\varpi = (2^{1-a}\bar{k}_2^{ca})^{\frac{2p-1}{ca}}$. Por otro lado, $x = [x]^{1-\frac{2p-1}{2p+ca-1}(1+a)}$. $[x]^{\frac{2p-1}{2p+ca-1}(1+a)} \leq |x|^{\frac{2p-1}{2p+ca-1}(1+a)}$ cuando $2p + ca - 1 \geq (2p - 1)(1 + a)$ si y solo si $\frac{1+c}{2} \geq p$, y $\frac{1+c}{2} > 1$ si y solo si $c > 1$. De lo anterior se obtiene que $x\chi(\mathbf{x}) \leq \varpi|x|^{\frac{2p-1}{2p+ca-1}(1+a)}\varphi^{\frac{ca}{2p-1+ca}}(\mathbf{x})$ cuando $\frac{1+c}{2} \geq p$ y $a \in (0, 1]$.

(d) Además, $x[y]^b \leq |x|^{\frac{2p-1}{2p+b-1}(1+a)}|y|^b$ cuando $\frac{b+a}{2a} \geq p$.

Se definen $\bar{A} = A - \gamma d_1$ y $w = \varphi(\mathbf{x})$. Utilizando las cotas anteriores se obtiene que

$$\frac{\dot{\mathcal{V}}}{1 + \gamma_2} \leq -v_1(\mathbf{x}) - v_2(x, w) = -\gamma(\bar{v}_1(\mathbf{x}) + \bar{v}_2(x, w)), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(\mathbf{x}) &\triangleq \frac{\bar{A}}{\gamma}|y|^{2p+b-1} + \frac{d_1}{2}k_1|x|^{1+a} - d_1k_2|x|^{\frac{(2p-1)(1+a)}{2p+b-1}}|y|^b \\ \bar{v}_2(\cdot) &\triangleq \frac{C}{\gamma}w + \frac{d_1}{2}k_1|x|^{1+a} - d_1k_1\varpi|x|^{\frac{(2p-1)(1+a)}{2p+ca-1}}w^{\frac{ca}{2p-1+ca}}. \end{aligned}$$

La función $\bar{v}_1(x, y)$ es $(\mathbf{r}_1, 2p + b - 1)$ -homogénea con $\mathbf{r}_1 = [(2p+b-1)/(1+a), 1]^T$. Acorde con el Lema 2, como $y = 0 \Rightarrow \bar{v}_1(x, 0) = (d_1k_1/2)|x|^{1+a} \geq 0$, existen valores de A/γ suficientemente grandes, o equivalentemente γ es suficientemente pequeño, tal que $\bar{v}_1(x, y)$ es positiva. Lo cual sucede si γ_2 se escoge suficientemente grande. La función $\bar{v}_2(x, w)$ es $(\mathbf{r}_2, 2p + ca - 1)$ -homogénea con $\mathbf{r}_2 = [(2p+ca-1)/(1+a), 1]^T$. De forma similar, existen valores de C/γ suficientemente grandes, o equivalentemente, γ_2 se elige suficientemente grande tal que $\bar{v}_2(x, w)$ es positiva.

Bajo estas condiciones, $\dot{\mathcal{V}}$ es definida negativa y el origen es AE.

Para mostrar estabilidad en TF del equilibrio de (7) se acota (21) en términos de \mathcal{V} . Primero, note que

$$\frac{\dot{\mathcal{V}}}{1 + \gamma_2} \leq -\gamma(\bar{v}_1(\mathbf{x}) + \bar{v}_2(x, w)) \leq -\gamma\bar{v}_1(\mathbf{x}).$$

Por otro lado, $d_1xy \leq V^p$. Entonces, $\mathcal{V} \leq (\gamma_2 + 2)V^p \leq \bar{\mathcal{V}}_1 \triangleq (\gamma_2 + 2)\left(\frac{1}{2}|y|^{2p+b-1} + \frac{k_1}{1+a}|x|^{1+a}\right)^p$, para toda $\mathbf{x} \in B_1$ y $\bar{\mathcal{V}}_1$ es $(\mathbf{r}_1, (2p + b - 1)p)$ -homogénea. Como $\bar{v}_1(x, y)$ es $(\mathbf{r}_1, (2p + b - 1))$ -homogénea, acorde con el Lema 1, existe β_1 tal que $\bar{\mathcal{V}}_1 \leq \beta_1\bar{v}_1^p(\mathbf{x})$. Por lo tanto, existen $\alpha = \gamma/\beta_1^{1/p}$ y $q \triangleq 1/p$ tal que (6) se cumple para toda $\mathbf{x} \in B_1$. La condición $1/p < 1$ implica estabilidad en TF del equilibrio. De hecho, $1/p < 1$ implica que: (a) $\frac{3+a}{2(1+a)} \geq p > 1$ cuando $1 > a$; (b) $\frac{3-b}{2} \geq p > 1$ cuando $1 > b$; (c) $\frac{b+a}{2a} \geq p > 1$ cuando $b > a$; y (d) $\frac{1+c}{2} \geq p > 1$ cuando $c > 1$.

4.2 Prueba de la Proposición 2.

La derivada de (14) junto con (12) viene dada por

$$\dot{V}_o = -l_2l_1[e_1]^{a_o}[e_1]^{b_o} = -l_2l_1|e_1|^{a_o+b_o}. \quad (22)$$

Este hecho junto con el principio de invarianza de Krasovskii-LaSalle y el acotamiento no radial de V_o lleva a concluir que $\mathbf{e} = [e_1, e_2]^T = \mathbf{0}$ es globalmente AE, véase el Teorema 7.2.1 en Michel et al. (2008).

Ahora restringimos el análisis en $\mathbf{e} \in B_1$, que implica que $|e_1| < 1$ y $|e_2| < 1$. La función (15) es definida positiva si $V_o^p - d_3e_1e_2 \geq 0$. Acorde con el Lema 5, d_3 satisface (17) con p tal que $\frac{3+a_o}{2(1+a_o)} \geq p$.

La derivada temporal de \mathcal{V}_o da como resultado

$$\frac{\dot{\mathcal{V}}_o}{1 + \gamma_4} = pV_o^{p-1}\dot{V}_o - \gamma d_3 \frac{d}{dt}(e_1e_2), \quad \gamma = 1/(1 + \gamma_4) \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt}(e_1e_2) = -l_2|e_1|^{1+a_o} + e_2(-l_1[e_1]^{b_o} + e_2)$$

Procedemos a acotar los términos en $\dot{\mathcal{V}}_o$: (a) observe que $pV_o^{p-1}\dot{V}_o \leq -A|e_1|^{(1+a_o)(p-1)+b+a_o}$, donde $A = p\left(\frac{1}{1+a_o}l_2\right)^{p-1}l_2l_1$, y $(1 + a_o)(p - 1) + b_o + a_o = (1 + a_o)p + b_o - 1$; (b) además $|e_1|^{1+a_o} \leq |e_1|^{(1+a_o)p+b_o-1}$ cuando $1 + a_o > (1 + a_o)p + b_o - 1 \iff \frac{2+a_o-b_o}{1+a_o} \geq p$ y $\frac{2+a_o-b_o}{1+a_o} > 1$ si $1 > b_o$; (c) y $[e_1]^{b_o} \leq |e_1|^{\frac{(1+a_o)p+b_o-1}{2}}$ cuando $2b_o \geq (1 + a_o)p + b_o - 1 \iff \frac{1+b_o}{1+a_o} \geq p$ y $\frac{1+b_o}{1+a_o} > 1 \iff b_o > a_o$. Entonces, $e_2[e_1]^{b_o} \leq |e_2||e_1|^{\frac{(1+b_o)p+b_o-1}{2}}$.

Se define $\bar{A} = A - \gamma d_3l_2$. Utilizando las cotas anteriores se llega a $\dot{\mathcal{V}}_o/(1 + \gamma_4) \leq -v_3(\mathbf{e}) = -\gamma\bar{v}_3(\mathbf{e})$, donde

$$\bar{v}_3(\mathbf{e}) := \frac{\bar{A}}{\gamma}|e_1|^{(1+a_o)p+b_o-1} - d_3l_1|e_2||e_1|^{\frac{(1+a_o)p+b_o-1}{2}} + d_3|e_2|^2$$

La función $\bar{v}_3(\mathbf{e})$ es $(\mathbf{r}_1, (1 + a_o)p + b_o - 1)$ -homogénea con $\mathbf{r}_1 = [1, ((1 + a_o)p + b_o - 1)/2]^T$. Acorde con el Lema 2 como $e_1 = 0 \Rightarrow \bar{v}_3(0, e_2) = d_3|e_2|^2 \geq 0$ existen valores de \bar{A}/γ suficientemente grandes, o valores suficientemente grandes de γ_4 , tal que $\bar{v}_3(\mathbf{e})$ es positiva y $\dot{\mathcal{V}}_o$ se hace definida negativa. El resto de esta prueba sigue el mismo procedimiento de la prueba de Proposición 1 para acotar \mathcal{V}_o como se requiere en el Lema 6.

4.3 Prueba de la Proposición 3.

La dinámica de lazo cerrado puede escribirse como

$$\Sigma : \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k_1[\bar{s}(x, y)]^a - k_2[y]^b + \chi(x, y, e_1, e_2)$$

$$\mathcal{O} : \dot{e}_1 = -l_1[e_1]^{b_o} + e_2, \quad \dot{e}_2 = -l_2[e_2]^{a_o},$$

donde el término

$$\chi(x, y, e_1, e_2) := k_1([\bar{s}(x, y)]^a - [\bar{s}(x + e_1, y + e_2)]^a) - k_2([y]^b - [y + e_2]^b)$$

está asociado con el efecto del error de observación en el lazo de control. Además, $\chi(x, y, 0, 0) = 0$ cuando $e_1 = e_2 = 0$. De la Proposición 2 se sabe que el error de estimación converge a cero en TF, es decir, existe un $T(\mathbf{e}_0) > 0$, $\mathbf{e}_0 = [e_1(0), e_2(0)]^T$, tal que para todo $t > T(\mathbf{e}_0)$, se cumple que $e_1 = e_2 = 0$. Además, el campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ del sistema Σ no puede escapar a infinito en tiempo finito, ya que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq k\|\mathbf{x}\|$, para toda $\|\mathbf{x}\| > c$ y para todo $t > T(\mathbf{e}_0)$. Para todo $t > T(\mathbf{e}_0)$ el sistema se reduce al sistema (7) que converge en TF a $x = y = 0$ para toda \mathbf{x}_0 . Por lo tanto, el equilibrio $(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{e} = \mathbf{0})$ es globalmente atractivo en tiempo finito.

5. EJEMPLOS DE SIMULACIÓN

A continuación se muestra el comportamiento de los controladores no homogéneos mediante una simulación numérica. Se usa el método de integración de Euler con tiempo de muestreo $t_s = 0.001$ [s]. Para el esquema (7) se emplearon condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $y(0) = 1$, ganancias $k_1 = k_2 = 1$ y exponentes

hc: $b = 1/2$, $a = 1/3$, $c = 3/2$ y $\bar{k}_2 = [1/(ck_2)]^{1/c}$. Este controlador es homogéneo, véase Cruz-Zavala et al. (2018).

nc: $b = 1/2$, $a = 1/4$, $c = 3/2$, y $\bar{k}_2 = [1/(ck_2)]^{1/c}$. Este controlador no es homogéneo.

Para el esquema (18) se emplearon los mismos exponentes y ganancias del caso anterior, pero las ganancias del observador son $l_1 = l_2 = 1$, condiciones iniciales $\hat{x}(0) = \hat{y}(0) = 0$, y los exponentes

ho: $b_o = 2/3$, $a_o = 1/3$. Este algoritmo es homogéneo y fue reportado en Cruz-Zavala et al. (2018).

no: $b_o = 2/3$, $a_o = 1/2$. Este algoritmo no es homogéneo.

La Fig. 1 muestra la respuesta del sistema doble integrador con cada uno de los controladores por retroalimentación de estados. La primera columna muestra los resultados con los controladores homogéneos mientras

que la segunda columna muestra los resultados con los controladores no homogéneos. La Fig. 1 (a)-(d) muestra los resultados con **hc** y **nc**. Ambos controladores proporcionan convergencia a $x = y = 0$ en TF deslizando sobre la variedad $\bar{s} = 0$, que es distinta para cada esquema. Además, el comportamiento de los esquemas no homogéneos es similar al de su contraparte homogénea.

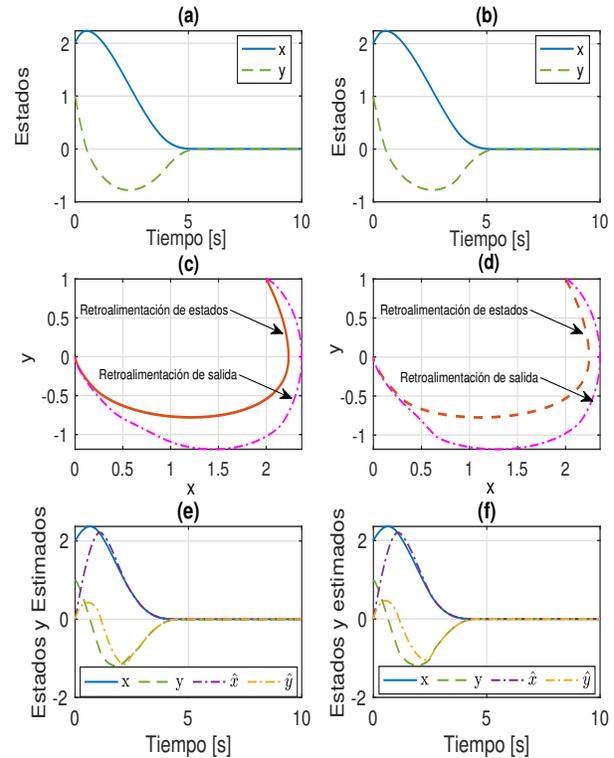


Fig. 1. Las gráficas (a)-(b) muestran los estados x y y con los controladores **hc** y **nc**. Las gráficas (c)-(d) muestran los retratos de fase con los controladores **hc**, **nc** y por retroalimentación de salida. Las gráficas (e)-(f) muestran los estados x , y con los controladores por retroalimentación de salida y los estados estimados.

La Fig. 1 (c)-(f) muestra los resultados utilizando el esquema (18) a la izquierda utilizando exponentes homogéneos y a la derecha utilizando exponentes no homogéneos. Las Fig. 1 (e) y (f) también muestran el estado estimado por cada uno de los observadores. Nuevamente se observa un comportamiento similar entre los algoritmos homogéneos y no homogéneos. Para estos casos, las trayectorias también convergen a cero en TF deslizando sobre la superficie deslizante, véase la Fig. (c) y (d).

6. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un esquema de control por retroalimentación de salida basado en observador y con convergencia en tiempo finito para el doble integrador. Los elementos que componen el esquema son algoritmos que

no poseen propiedades de homogeneidad. Este trabajo extiende los esquemas homogéneos o con aproximación homogénea por retroalimentación de estados y por retroalimentación salida basados en observador existentes en la literatura a un caso puramente no homogéneo.

7. APÉNDICE

Defina $\mathbf{x} = [x, y]^\top$. Si \mathbf{x} pertenece a B_1 , se obtiene que $|x| < 1$ y $|y| < 1$. Observe que

$$v_0 \geq 0 \iff (A|y|^2 + B|x|^{1+a}) - (dC|x||y|)^{\frac{1}{p}} \geq 0. \quad (24)$$

Para toda $\mathbf{x} \in B_1$, $|x| = |x|^{1 - \frac{(2p-1)(1+a)}{2}} |x|^{\frac{(2p-1)(1+a)}{2}} \leq |x|^{\frac{(2p-1)(1+a)}{2}}$ cuando $2 \geq (2p-1)(1+a) \iff \frac{3+a}{2(1+a)} \geq p$. Y de la desigualdad de Young, $(|x||y|)^{\frac{1}{p}} \leq |x|^{(2p-1)(1+a)/2p} \times |y|^{1/p} \leq \frac{1}{2p} c_1^{2p} |y|^2 + \frac{2p-1}{2p} c_1^{-\frac{2p}{2p-1}} |x|^{1+a}$.

Usando esta cota, la desigualdad (24) se cumple cuando $[A - (dC)^{\frac{1}{p}} c_1^{2p} (2p)^{-1}] |y|^2 + [B - (2p-1)(dC)^{\frac{1}{p}} c_1^{-\frac{2p}{2p-1}} (2p)^{-1}] \cdot |x|^{1+a} \geq 0$. La cual se satisface si $A \geq \frac{(dC)^{\frac{1}{p}} c_1^{2p}}{2p}$ y $B \geq \frac{(2p-1)(dC)^{\frac{1}{p}} c_1^{-\frac{2p}{2p-1}}}{2p}$. Resolviendo estas desigualdades para d se llega al resultado.

BIBLIOGRAFÍA

- Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM J. Contr. Optim.*, 47(4), 1814–1850.
- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- Bernuau, E., Perruquetti, W., Efimov, D., and Moulay, E. (2014). Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator. *Int. J. Control*, 88(3), 451–460.
- Bhat, S. and Bernstein, D. (1997). Finite-time stability of homogeneous systems. In *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 2513–2514. Albuquerque, NM.
- Bhat, S. and Bernstein, D. (1998). Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43, 678–682.
- Cruz-Zavala, E., Nuño, E., and Moreno, J. (2021). Non-homogeneous finite-time controllers for double integrator dynamics. In *Memorias de Congreso Nacional de Control Automático*, 261–266. Guanajuato, México.
- Cruz-Zavala, E., Sanchez, T., Moreno, J.A., and Nuño, E. (2018). Strict Lyapunov functions for homogeneous finite-time second-order systems. In *2018 56th IEEE Conf. Decision and Control (CDC)*, 1530–1535.
- Haimo, V.T. (1986). Finite time controllers. *SIAM J. Contr. Optim.*, 24, 760–770.
- Hestenes, M.R. (1966). *Calculus of variations and optimal control theory*. John Wiley & Sons, New York.
- Hong, Y., Huang, J., and Xu, Y. (2001). On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46(2), 305–309.
- Hong, Y., Xu, Y., and Huang, J. (2002). Finite-time control for robot manipulators. *Syst. Control Lett.*, 46, 243–253.
- Mercado-Uribe, A. and Moreno, J.A. (2017). Discontinuous integral control for systems in controller form. In *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2017*, 630–635.
- Michel, A., Hou, L., and Liu, D. (2008). *Stability of Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser, Boston.
- Moreno, J.A. (2014). On strict Lyapunov functions for some non-homogeneous super-twisting algorithms. *J. Franklin Inst.*, 351(4), 1902–1919. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms.
- Moulay, E. and Perruquetti, W. (2006). *Finite-Time Stability and Stabilization: State of the Art*, 23–41. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Nakamura, N., Nakamura, H., Yamashita, Y., and Nishitani, H. (2009). Homogeneous stabilization for input affine homogeneous systems. *IEEE Trans. Autom. Control.*, 54(9), 2271–2275.
- Orlov, Y. (2009). *Discontinuous Systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer.
- Orlov, Y., Aoustin, Y., and Chevallereau, C. (2011). Finite-time stabilization of a perturbed double integrator-part I: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 56(3), 614–618.
- Polyakov, A., Orlov, Y., Oza, H., and Spurgeon, S. (2015). Robust finite-time stabilization and observation of a planar system revisited. In *2015 54th IEEE Conf. Decision and Control (CDC)*, 5689–5694.
- Qian, C. and Lin, W. (2003). Nonsmooth output feedback stabilization of a class of genuinely nonlinear systems in the plane. *IEEE Trans. Autom. Control*, 48(10), 1824–1829.
- Su, Y. and Zheng, C. (2015). Robust finite-time output feedback control of perturbed double integrator. *Automatica*, 60, 86–91.
- Venkataraman, S. and Gulati, S. (1993). Terminal slider control of robot systems. *J. Intell. Robot. Syst.*, 7, 31–55.
- Yu, S.H., Yu, X.H., Shirinzadeh, B., and Man, Z. (2005). Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 41(11), 1957–1964.
- Zavala-Rio, A. and Fantoni, I. (2014). Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(2), 471–477.
- Zavala-Rio, A., Sanchez, T., and Zamora-Gómez, G.I. (2022). On the continuous finite-time stabilization of the double integrator. *SIAM J. Contr. Optim.*, 60(2), 699–719.