

A Robust Control Strategy for Target Tracking using a Quad-Rotor

Romeo Falcón* Héctor Ríos**,** Denis Efimov***
Alejandro Dzul*

* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón Coahuila, México.*

** *Cátedras CONACYT, C.P. 03940, Ciudad de México, México.*

*** *INRIA, University of Lille, CNRS, UMR 9189-CRISTAL, F-59000, Lille, France.*

Abstract: In this paper, a robust control strategy for a Quad-Rotor, under the effect of external disturbances, is proposed to track a moving target, considering time delayed measurements of the target position. For the target position, it is assumed that a monocular camera is fixed in the center of the Quad-Rotor's bottom. It is considered that the frame rate of the camera, and the time of the image processing, provide the position of the target with a time-delay. The current target position is estimated through an identified model in order to generate the desired signals to be followed by the *Quad-Rotor*. A robust control strategy is proposed, based on a combination of PD and sliding-modes controllers. Numerical simulations show the performance of the proposed control strategy.

Keywords: Quad-Rotor, Robust Control, Target Tracking

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, los *Quad-Rotors* han ganado popularidad debido a su capacidad de realizar despegues y aterrizajes verticales, realizar vuelos estacionarios y a su reducido tamaño. Estas características han generado múltiples aplicaciones y han propiciado la investigación de controladores robustos aplicados a esta clase de vehículos (Merino et al., 2012). En muchas aplicaciones se requiere que el *Quad-Rotor* persiga un objetivo en movimiento; es por esto que la generación de trayectorias que permitan el seguimiento del objetivo, y el diseño de controladores robustos, son esenciales para que el *Quad-Rotor* cumpla con la tarea (Guo J., 2022).

Entre la literatura relacionada con la generación de trayectorias para el seguimiento de un objetivo con un *Quad-Rotor*, se encuentra Quintero and Hespanha (2014), donde se propone una estrategia basada en visión para un objetivo con movimientos impredecibles. En Liu et al. (2019), se propone un algoritmo basado en un modelo de tangente elíptica. En Chen et al. (2016b), se generan trayectorias polinómicas por visión para un objetivo evitando colisiones. En Penin et al. (2018), se propone un algoritmo

basado en visión para rastrear un objetivo considerando saturación en los actuadores y evitando obstáculos. En Lin et al. (2012), se diseña un sistema de visión embebido robusto para el seguimiento de un objetivo terrestre. Sin embargo, los trabajos anteriores solo tratan el problema de generación de trayectorias sin que los controladores hayan sido diseñados para cumplir con tal tarea. Además, ninguno de estos consideran retrasos en la medición del objetivo, lo cual no es un escenario realista.

Diseñar controladores de seguimiento para *Quad-Rotors* es una tarea desafiante debido a su naturaleza subactuada, a su alto acoplamiento entre la dinámica de traslación y orientación, la cual no es lineal, y a la presencia de perturbaciones externas. Existen trabajos reportados en la literatura dedicados al diseño de controladores para el seguimiento robusto de trayectorias, *e.g.*, controladores basados en elipsoides atractivos (Falcón et al., 2020), controladores PD (Wang et al., 2022), técnicas de homogeneidad generalizada (Wang et al., 2020), backstepping (Chen et al., 2016a), control adaptable Dydek et al. (2013), *etc.* Entre todas estas técnicas de control, destacan los controladores por modos deslizantes (SMCs) por sus propiedades de precisión y robustez, así como por su convergencia en tiempo finito (Shtessel et al., 2014). Estos controladores ya han sido diseñados para el *Quad-Rotor*; por ejemplo, en Zheng et al. (2014) se propone un SMC de segundo orden para el seguimiento de trayectorias. En González et al. (2014), se propone un SMC libre de *chattering* para estabilizar la altitud de un *Quad-Rotor* perturbado. En Jia et al. (2017), un SMC

* Este trabajo fue apoyado en parte por el proyecto SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597 y el proyecto ECOS NORD M20M04. Todos los autores agradecen el apoyo financiero por parte del TecNM y el proyecto CONACYT 225291. R. Falcón y H. Ríos también agradecen el apoyo financiero de CONACYT CVU 785635 y Cátedras CONACYT CVU 270504 proyecto 922, respectivamente.

en conjunto con un backstepping integral es aplicado a un *Quad-Rotor* para lidiar con perturbaciones externas. En Ríos et al. (2019), se diseñan varias estrategias de SMCs continuos para un *Quad-Rotor*. Sin embargo, en los trabajos anteriores se supone que se conoce perfectamente la trayectoria deseada, lo que no ocurre en el seguimiento de objetivos en movimiento.

El seguimiento de trayectorias de un *Quad-Rotor* considerando retrasos de tiempo ya se ha tratado en la literatura. Por ejemplo, en Liu et al. (2017) se presenta un controlador basado en compensaciones robustas considerando perturbaciones externas y retrasos en las entradas y las salidas. En Ordaz et al. (2013), se propone un control de posición basado en un predictor donde se consideran retardos en las salidas medibles. En Lozano et al. (2004), se propone un controlador de realimentación de estados en conjunto con un predictor para estabilizar el ángulo de *yaw* considerando los retrasos de tiempo en las salidas. Sin embargo, los trabajos anteriores tampoco consideran retrasos en el tiempo en la trayectoria deseada, los cuales están presentes en las medidas de posición del objetivo.

En general, según la literatura, el diseño de controles robustos para *Quad-Rotors* considerando tareas de seguimiento de objetivos, bajo perturbaciones externas y retrasos en el tiempo en las mediciones de la posición del objetivo, sigue siendo un tema desafiante. Por esta razón, en este trabajo se diseña un controlador robusto para un *Quad-Rotor* bajo el efecto de perturbaciones externas y retrasos en el tiempo en las mediciones de posición del objetivo. Para la estimación de la trayectoria del objetivo, se asume también que una cámara monocular, fijada en el centro de la parte inferior del *Quad-Rotor*, proporciona una imagen en cada muestreo. Se asume que el procesamiento de la imagen proporciona la posición del objetivo con un retraso conocido¹. Asimismo, se propone un modelo de identificación para predecir la posición actual del objetivo para calcular la trayectoria deseada. Finalmente, se propone un controlador robusto, basado en una combinación de controladores PD y Controladores Twisting Continuos (CTCs), para lidiar tanto con perturbaciones externas, así como con la incertidumbre de la posición exacta del objetivo. Esta estrategia asegura la convergencia de los errores de posición hacia una vecindad del cero y la convergencia en tiempo finito de los errores de orientación hacia cero. La estabilidad en lazo cerrado es garantizada a través de la teoría de Lyapunov.

Notación: Denote $s(\cdot) := \sin(\cdot)$ y $c(\cdot) := \cos(\cdot)$; denote $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. La secuencia de enteros $1, \dots, n$ está denotada como $\overline{1, n}$. La función $|s|^\beta := |s|^\beta \text{sign}(s)$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}_+$. Para una función medible de Lebesgue $d : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, definiendo la norma $\|d\|_{[t_0, t_1]} = \text{esssup}_{t \in [t_0, t_1]} \|d(t)\|$, entonces $\|d\|_f = \|d\|_{[t_f, +\infty)}$ y $\|d\|_\infty = \|d\|_{[0, +\infty)}$; el conjunto de funciones d con la propiedad de $\|d\|_\infty < +\infty$ se denota como \mathcal{L}_∞ ; y $\mathcal{L}_D = \{d \in \mathcal{L}_\infty : \|d\|_\infty \leq D\}$, para cualquier $D > 0$.

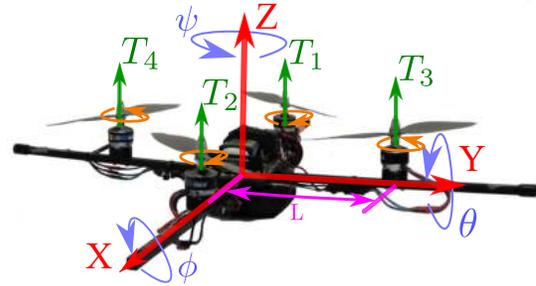


Figura 1. Representación esquemática del *Quad-Rotor*.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La dinámica simplificada del *Quad-Rotor* (ver Fig. 1, para detalles del modelado ver García-Carrillo et al. (2013)), está dada por

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad (1a)$$

$$\dot{\xi}_2 = u_m g_\xi(\eta_1) - G - \Lambda_\xi \xi_2 + d_\xi(t), \quad (1b)$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad (1c)$$

$$\dot{\eta}_2 = J\tau + \Xi w_\eta(\eta_2) - \Lambda_\eta \eta_2 + d_\eta(t), \quad (1d)$$

donde $\xi_1 := (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, $\xi_2 := (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \in \mathbb{R}^3$, $\eta_1 := (\phi, \theta, \psi)^T \in \mathbb{R}^3$, $\eta_2 := (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T \in \mathbb{R}^3$, $d_\xi := (d_x, d_y, d_z)^T \in \mathbb{R}^3$ y $d_\eta := (d_\phi, d_\theta, d_\psi)^T \in \mathbb{R}^3$. Las variables $x, y \in \mathbb{R}$ son las coordenadas en el plano horizontal, $z \in \mathbb{R}$ es la posición vertical, mientras que ϕ, θ y $\psi \in \mathbb{R}$ son el ángulo de *roll* alrededor del eje X , el ángulo de *pitch* alrededor del eje Y , y el ángulo de *yaw* alrededor del eje Z , respectivamente. Los términos $d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta$ y $d_\psi \in \mathbb{R}$ representan perturbaciones externas, e.g., ráfagas de viento. Los términos $G := (0, 0, g)^T \in \mathbb{R}^3$, $J := \text{diag}(J_x^{-1}, J_y^{-1}, J_z^{-1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\tau = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T \in \mathbb{R}^3$ son el vector de gravedad, la matriz de inercias y el vector de momentos angulares, con g como la aceleración gravitacional, J_x, J_y y J_z como los momentos inerciales a lo largo de los ejes X, Y y Z , mientras que τ_ϕ, τ_θ y $\tau_\psi \in \mathbb{R}$ representan los momentos de *roll*, de *pitch* y de *yaw*, respectivamente; el término $u_m := u/m$, con $u \in \mathbb{R}$ representando el empuje principal y $m \in \mathbb{R}_+$ la masa del *Quad-Rotor*. Los términos $\Lambda_\xi := \text{diag}(a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\Lambda_\eta := \text{diag}(a_\phi/J_x, a_\theta/J_y, a_\psi/J_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\Xi := \text{diag}(b_\phi, b_\theta, b_\psi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ están dados por los coeficientes de arrastre aerodinámicos a_x, a_y y a_z , los coeficientes de resistencia al momento angular a_ϕ, a_θ y a_ψ , y los coeficientes inerciales $b_\phi := (J_y - J_z)/J_x$, $b_\theta := (J_z - J_x)/J_y$ y $b_\psi := (J_x - J_y)/J_z$. Las funciones $g_\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $w_\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ están dadas como $g_\xi(\eta_1) := (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi, c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi, c\phi c\theta)^T$ y $w_\eta(\eta_2) := (\dot{\theta}\dot{\psi}, \dot{\phi}\dot{\psi}, \dot{\phi}\dot{\theta})^T$.

Se considera que una cámara monocular está fija en el centro de la parte inferior del *Quad-Rotor* mirando hacia abajo, con el fin de tomar fotografías paralelas al plano horizontal del suelo. Se asume que el procesamiento de imágenes, para cada muestreo de cámara, proporciona la posición del objetivo con un retraso de tiempo conocido.

El problema a resolver en este artículo consiste en diseñar un control robusto para lograr el seguimiento de un objetivo móvil con un *Quad-Rotor*, a pesar de la presencia

¹ En este artículo consideramos que se llevó a cabo una misión de reconocimiento preliminar para detectar el objetivo en movimiento.

de perturbaciones externas y retrasos en el tiempo en las mediciones de la posición del objetivo.

3. ESTIMACIÓN DE LA POSICIÓN DEL OBJETIVO

Para cada imagen tomada, se obtienen mediciones de la distancia entre el centro de la imagen y el centro del cuadrado delimitador, dados por Δw y Δh , en píxeles. De igual manera, se mide el ancho y el alto del cuadrado delimitador, dados por w y h , en píxeles. Considerando que se conoce el ancho y alto del objetivo, dados por W y H , en metros, es posible establecer una relación lineal para obtener la distancia entre el *Quad-Rotor* y el objetivo. Esta relación lineal sería válida en un vuelo estacionario. Sin embargo, en una tarea de seguimiento, la orientación del *Quad-Rotor* puede variar, y la cámara mapea un área bidimensional que intersecta el plano horizontal. Es por esto que se considera la inclinación de la imagen para una mejor estimación. Entonces, la distancia entre el centro del *Quad-Rotor* y el centro del objetivo en el plano horizontal, dada por Δx y Δy , en metros, respectivamente, se puede aproximar mediante

$$\Delta x = W \frac{\Delta w}{w} c(\theta), \quad \Delta y = H \frac{\Delta h}{h} c(\phi).$$

De considerarse retrasos en el tiempo entre el procesamiento de cada imagen, causado por la velocidad de captura de la cámara y el tiempo de procesamiento de cada imagen, las mediciones discretas de la posición del objetivo están dadas por

$$x_d(t_k - \delta) = x(t_k - \delta) + \Delta x(t_k - \delta), \quad (2a)$$

$$y_d(t_k - \delta) = y(t_k - \delta) + \Delta y(t_k - \delta), \quad (2b)$$

donde t_k es el tiempo discreto en el cual el objetivo es medido, con $k = 1, N$ donde N es el número de muestreos de la posición del objetivo, y $\delta = t_k - t_{k-1}$ es el retraso en el tiempo, *i.e.*, el intervalo de tiempo constante en donde la posición del objetivo es calculado. Es necesario considerar que solo se obtiene una sola ubicación del objetivo en cada intervalo de tiempo δ . Los términos x y y representan la posición del *Quad-Rotor*, *i.e.*, la posición de la cámara con respecto al marco inercial. Las funciones Δx y Δy determinan la distancia entre el *Quad-Rotor* y el objetivo.

Considere que la posición del objetivo (2a) satisface

$$x_d(t - \delta) = \alpha_k(t - \delta) + \frac{\beta_k(t - \delta)^2}{2}, \quad (3)$$

para todo $t \in (t_{k-2}, t_{k+1}]$, donde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ y $\beta_k \in \mathbb{R}$ son parámetros a estimar que varían lentamente, los cuales definen el comportamiento lineal de (2a), y son actualizados en cada muestreo de la posición del objetivo.

Los escalares α_k y β_k pueden ser calculados para cada imagen con respecto a su antigua medición, *i.e.*,

$$\begin{bmatrix} x_d(t_k) \\ x_d(t_{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_k & \frac{t_k^2}{2} \\ t_{k-1} & \frac{t_{k-1}^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix},$$

y por lo tanto, una aproximación de éstas está dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_k \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_k & \frac{t_k^2}{2} \\ t_{k-1} & \frac{t_{k-1}^2}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_d(t_k) \\ x_d(t_{k-1}) \end{bmatrix}.$$

La inversa de dicha matriz siempre existe para todo $k \geq 2$. Considere las primeras dos derivadas de (3), *i.e.*

$$\dot{x}_d(t - \delta) = \alpha_k + \beta_k(t - \delta), \quad (4a)$$

$$\ddot{x}_d(t - \delta) = \beta_k, \quad (4b)$$

entonces, las estimaciones de (3) y (4) están dadas como

$$\hat{x}_d(t - \delta) = \hat{\alpha}_k(t - \delta) + \frac{\hat{\beta}_k(t - \delta)^2}{2},$$

$$\hat{\dot{x}}_d(t - \delta) = \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k(t - \delta),$$

$$\hat{\ddot{x}}_d(t - \delta) = \hat{\beta}_k.$$

Considere ahora la aproximación numérica de la primer derivada, *i.e.*,

$$\hat{\dot{x}}_d(t - \delta) = \frac{\hat{x}_d(t) - \hat{x}_d(t - \delta)}{\delta}.$$

Entonces, es posible estimar la posición, la velocidad y la aceleración actual como

$$\hat{x}_d(t) = \hat{x}_d(t - \delta) + \delta \hat{\dot{x}}_d(t - \delta). \quad (5a)$$

$$\hat{\dot{x}}_d(t) = \hat{\dot{x}}_d(t - \delta) + \delta \hat{\ddot{x}}_d(t - \delta). \quad (5b)$$

$$\hat{\ddot{x}}_d(t) = \hat{\ddot{x}}_d(t - \delta). \quad (5c)$$

Se puede seguir el mismo procedimiento para estimar la posición actual de y_d . Debido a que se trata con una aproximación de la posición actual, la posición verdadera del objetivo satisface

$$x_d(t) = \hat{x}_d(t) + \epsilon_x(t), \quad y_d(t) = \hat{y}_d(t) + \epsilon_y(t),$$

donde $\epsilon_x(t)$ y $\epsilon_y(t)$ representan errores de aproximación. El mismo principio de errores de aproximación son aplicados a las estimaciones de las velocidades y aceleraciones.

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Para el diseño del controlador a utilizar en el seguimiento del objetivo, se introducen los errores de seguimiento como

$$e_\xi := (e_x, e_y, e_z)^T = \bar{e}_\xi - \epsilon(t),$$

$$\varepsilon_\xi := (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^T = \bar{\varepsilon}_\xi - \dot{\epsilon}(t),$$

$$e_\eta := (e_\phi, e_\theta, e_\psi)^T = \eta_1 - \eta_d,$$

$$\varepsilon_\eta := (\varepsilon_\phi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\psi)^T = \eta_2 - \dot{\eta}_d,$$

donde $\bar{e}_\xi = \xi_1 - \xi_d$ y $\bar{\varepsilon}_\xi = \xi_2 - \dot{\xi}_d$ son los vectores de error de posición y velocidad, respectivamente; $\xi_d := (\hat{x}_d, \hat{y}_d, z_d)^T \in \mathbb{R}^3$, $\eta_d := (\phi_\star, \theta_\star, \psi_d)^T \in \mathbb{R}^3$ y $\epsilon(t) := (\epsilon_x, \epsilon_y, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ representan la posición deseada, la orientación deseada y el vector de errores de aproximación, respectivamente; con z_d y ψ_d como señales de referencia arbitrarias, mientras que ϕ_\star y θ_\star son señales de referencia a diseñar.

Antes de proceder con el diseño del controlador, se introducen las siguientes suposiciones.

Suposición 1. Las perturbaciones que afectan al subsistema de posición están acotadas, *i.e.*, $\|d_\xi\| \leq D_\xi$;

mientras que las perturbaciones que afectan al subsistema de orientación están uniformemente acotadas y son Lipschitz, i.e., $d_\phi \in \mathcal{L}_{D_\phi}$, $d_\theta \in \mathcal{L}_{D_\theta}$, $d_\psi \in \mathcal{L}_{D_\psi}$, $\dot{d}_\phi \in \mathcal{L}_{\bar{D}_\phi}$, $\dot{d}_\theta \in \mathcal{L}_{\bar{D}_\theta}$, $\dot{d}_\psi \in \mathcal{L}_{\bar{D}_\psi}$; con constantes conocidas y positivas D_j y \bar{D}_j , con $j = \phi, \theta, \psi$.

Suposición 2. El error de aproximación de la posición del objetivo, así como su primera y segunda derivada, están acotados, i.e., $\|\epsilon\| \leq \bar{\epsilon}$, $\|\dot{\epsilon}\| \leq \bar{\dot{\epsilon}}$ y $\|\ddot{\epsilon}\| \leq \bar{\ddot{\epsilon}}$; con constantes conocidas y positivas $\bar{\epsilon}$, $\bar{\dot{\epsilon}}$ y $\bar{\ddot{\epsilon}}$.

Vale la pena mencionar que las perturbaciones externas, como las ráfagas de viento, son generalmente modeladas como señales sinusoidales las cuales están claramente acotadas y son Lipschitz. Por otro lado, la restricción del error de aproximación ϵ se cumple siempre que el objetivo no se mueva demasiado rápido, i.e., mientras que la trayectoria que describe el objetivo sea continuamente diferenciable.

La dinámica del error está dada como

$$\dot{\epsilon}_\xi = \epsilon_\xi, \quad (6a)$$

$$\dot{\epsilon}_\xi = u_m g_\xi(\eta_1) - G - \Lambda_\xi \xi_2 - \ddot{\xi}_d - \ddot{\epsilon}(t) + d_\xi(t), \quad (6b)$$

$$\dot{\epsilon}_\eta = \epsilon_\eta, \quad (6c)$$

$$\dot{\epsilon}_\eta = J\tau + \Xi w_\eta(\eta_2) - \Lambda_\eta \eta_2 + d_\eta(t). \quad (6d)$$

Debido a la naturaleza subactuada del *Quad-Rotor*, no es posible controlar todas las posiciones y ángulos independientemente. Por lo tanto, las señales de referencia ϕ_\star y θ_\star , así como la entrada de control u , deben ser diseñadas apropiadamente con el fin de conseguir la posición deseada ξ_d . Para esto, se introduce el control virtual $\nu := (\nu_x, \nu_y, \nu_z)^T \in \mathbb{R}^3$ en la dinámica del error de posición, i.e.,

$$\dot{\epsilon}_\xi = \epsilon_\xi, \quad (7a)$$

$$\dot{\epsilon}_\xi = \nu + w_\xi(\eta_1, u, \nu) - \Lambda_\xi \xi_2 - \ddot{\xi}_d - \ddot{\epsilon}(t) + d_\xi(t), \quad (7b)$$

$$\dot{\epsilon}_\eta = \epsilon_\eta, \quad (7c)$$

$$\dot{\epsilon}_\eta = J\tau + \Xi w_\eta(\eta_2) - \Lambda_\eta \eta_2 + d_\eta(t), \quad (7d)$$

donde el término $w_\xi(\eta_1, u, \nu) := u_m g_\xi(\eta_1) - G - \nu$ se considera como una perturbación. Para esto se considera que el control virtual ν se selecciona como

$$\nu_x = u_m(c(\phi_\star)s(\theta_\star)c(\psi_d) + s(\phi_\star)s(\psi_d)), \quad (8a)$$

$$\nu_y = u_m(c(\phi_\star)s(\theta_\star)s(\psi_d) - s(\phi_\star)c(\psi_d)), \quad (8b)$$

$$\nu_z = u_m c(\phi_\star)c(\theta_\star) - g. \quad (8c)$$

El empuje principal u , así como las señales de referencia ϕ_\star y θ_\star , se calculan a partir de (8), i.e.,

$$u = m\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + (\nu_z + g)^2}, \quad (9a)$$

$$\phi_\star = \arcsin[u_z^{-1}(\nu_x s(\psi_d) - \nu_y c(\psi_d))], \quad (9b)$$

$$\theta_\star = \arctan[(\nu_z + g)^{-1}(\nu_x c(\psi_d) + \nu_y s(\psi_d))]. \quad (9c)$$

Se propone un controlador PD para el control virtual como

$$\nu = K_{p\xi} \bar{\epsilon}_\xi + K_{d\xi} \dot{\bar{\epsilon}}_\xi + \Lambda_\xi \xi_2 + \ddot{\xi}_d, \quad (10)$$

donde $K_{p\xi} := \text{diag}(k_{x1}, k_{y1}, k_{z1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $K_{d\xi} := \text{diag}(k_{x2}, k_{y2}, k_{z2}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Por otro lado, el control de orientación se diseña como

$$\tau = J^{-1} \bar{\tau} - \Xi w_\eta(\eta_2) + \Lambda_\eta \eta_2, \quad (11)$$

donde cada término de $\bar{\tau} := (\bar{\tau}_\phi, \bar{\tau}_\theta, \bar{\tau}_\psi) \in \mathbb{R}^3$ es diseñado por un CTC, i.e.,

$$\bar{\tau}_j = v_j - k_{j1}[e_j]^{\frac{1}{3}} - k_{j2}[\varepsilon_j]^{\frac{1}{2}}, \quad (12a)$$

$$\dot{v}_j = -k_{j3}[e_j]^0 - k_{j4}[\varepsilon_j]^0, \quad \forall j = \phi, \theta, \psi, \quad (12b)$$

donde una posible selección de ganancias está dada en Torres-González et al. (2017), i.e., $k_{j1} = 25\kappa_j^{\frac{2}{3}}$, $k_{j2} = 15\kappa_j^{\frac{1}{2}}$, $k_{j3} = 2.3\kappa_j$ y $k_{j4} = 1.1\kappa_j$, con cualquier $\kappa_j > \bar{D}_j$, ($j = \phi, \theta, \psi$).

Entonces, se puede demostrar que el elipsoide $\mathcal{E}(P) := \{\chi \in \mathbb{R}^6 : \chi^T P \chi \leq 1 + 2\gamma^{-1} \bar{\zeta} \|K_\xi^T K_\xi\|\}$, con $\chi := (e_\xi^T, \varepsilon_\xi^T)^T \in \mathbb{R}^6$, $K_\xi = (K_{p\xi}, K_{d\xi}) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$, $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $\bar{\zeta} = \|(\bar{\epsilon}, \bar{\dot{\epsilon}})\| \in \mathbb{R}$ y $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$, es exponencialmente atractivo para el sistema en lazo cerrado (7a) y (7b), mientras que la dinámica del error de orientación $(e_\eta, \varepsilon_\eta) = 0$ es Uniformemente Estable en Tiempo Finito (UFTS), donde el significado de todas estas variables son explicadas en el siguiente teorema

Teorema 1. Asumiendo que las Suposiciones 1 y 2 se satisfacen, y que los controladores (10)–(12) son implementados en el sistema (1). Entonces, asumiendo que existen matrices $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ y $X = X^T > 0 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, tal que la siguiente Desigualdad Lineal Matricial (LMI)

$$\begin{pmatrix} \Upsilon & B & B \\ \star & -\frac{\gamma}{2} Q_1 & 0_3 \\ \star & \star & -\frac{\gamma}{2} Q_2 \end{pmatrix} \leq 0, \quad (13)$$

$$\Upsilon = AX + BY + XA^T + Y^T B^T + BB^T + \gamma X,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{pmatrix},$$

es factible para unas constantes fijas $\gamma > 0$, $Q_1 = Q_1^T > 0$ y $Q_2 = Q_2^T > 0$, tal que $\lambda_{\max}^{-\frac{1}{2}}(Q_1) = D_\xi$ y $\lambda_{\max}^{-\frac{1}{2}}(Q_2) = \bar{\epsilon}$. Si las ganancias del controlador son seleccionadas como $K_\xi = YP$ y $P = X^{-1}$, entonces, el elipsoide $\mathcal{E}(P)$ es exponencialmente atractivo para el sistema en lazo cerrado (7a) y (7b), mientras que el error de seguimiento de orientación $(e_\eta, \varepsilon_\eta) = 0$ es UFTS. Vale la pena mencionar que es posible establecer un problema de optimización con el fin de minimizar el elipsoide atractivo $\mathcal{E}(P)$, donde éste representa el conjunto de convergencia del sistema en lazo cerrado de (7a) y (7b), con el fin de hacerlo lo más pequeño posible.

Corolario 1. Asumiendo que las Suposiciones 1 y 2 se satisfacen, y que los controladores (10)–(12) son implementados en el sistema (1). Entonces, asumiendo que existen matrices Y y $X = X^T > 0$, tal que el siguiente problema de optimización

$$\max_{Y, X} \log \{\det(X)\} \text{ sujeto a (13)}, \quad (14)$$

es factible para unas constantes fijas $\gamma > 0$, $Q_1 = Q_1^T > 0$ y $Q_2 = Q_2^T > 0$, tal que $\lambda_{\max}^{-\frac{1}{2}}(Q_1) = D_\xi$ y $\lambda_{\max}^{-\frac{1}{2}}(Q_2) = \bar{\epsilon}$. Si las ganancias del controlador son seleccionadas como $K_\xi = YP$ y $P = X^{-1}$, entonces, el elipsoide $\mathcal{E}(P)$ es exponencialmente atractivo para el sistema en lazo cerrado (7a) y (7b), mientras que el error de seguimiento de orientación $(e_\eta, \varepsilon_\eta) = 0$ es UFTS.

Para resumir, la estrategia propuesta permite al *Quad-Rotor* seguir a un objetivo móvil, ante la presencia de perturbaciones externas, y usando unicamente la posición del objetivo con retardos en el tiempo.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Para mostrar el desempeño de la estrategia propuesta, se presentan simulaciones numéricas usando MATLAB Simulink. Los parámetros del *Quad-Rotor* son tomados del prototipo de Quanser QBall2 dados por: $m = 1.79[\text{kg}]$, $J_x = J_y = 0.03[\text{Ns}^2/\text{rad}]$, $J_z = 0.04[\text{Ns}^2/\text{rad}]$, $a_x = a_y = a_z = 0.021[\text{Ns}/\text{kgm}]$ y $a_\phi = a_\theta = a_\psi = 0.3[\text{Ns}/\text{rad}]$.

La trayectoria del objetivo está dada por

$$\begin{aligned} x_d(t) &= 6s(\pi t/100) - 1, \\ y_d(t) &= 6c(\pi t/20) + 0.2t - 5, \end{aligned}$$

mientras que las otras referencias a seguir están dadas por $z_d(t) = 0.015 + 0.125 \tanh(t - 2) - 0.11 \tanh((t - 25)/10)$ y $\psi_d = 0$. Las perturbaciones externas están dadas como

$$\begin{aligned} d_x(t) &= 0.3s(\omega_1 t), & d_y(t) &= 0.3c(\omega_1 t), \\ d_z(t) &= -0.5 + 0.1(s(\omega_1 t) - s(\omega_2 t) + c(\omega_3 t)), \\ d_\phi(t) &= -0.5 + 0.2(s(\omega_1 t) - s(\omega_2 t) + c(\omega_2 t)), \\ d_\theta(t) &= -0.5 + 0.2(c(\omega_3 t) - s(\omega_1 t) + c(\omega_3 t)), \\ d_\psi(t) &= -0.5 + 0.2(c(\omega_3 t) - s(\omega_2 t) + c(\omega_3 t)), \end{aligned}$$

con $\omega_1 = 0.4[\text{rad}/\text{s}]$, $\omega_2 = 0.6[\text{rad}/\text{s}]$ y $\omega_3 = 0.8[\text{rad}/\text{s}]$.

Las ganancias del controlador de posición son calculadas resolviendo la LMI (13) por medio del solucionador SeDuMi en conjunto con YALMIP con $\gamma = 0.1$, $Q_1 = 0.7348I_3$ y $Q_2 = 1.4142I_3$. Las ganancias obtenidas están dadas por $K_{p\xi} := \text{diag}(-3.5216, -3.5184, -3.5334)$ y $K_{d\xi} := \text{diag}(-2.5040, -2.5049, -2.5059)$. Las ganancias del controlador de orientación son diseñadas basándose en Torres-González et al. (2017), con valores de $k_{j1} = 25\zeta_j^{\frac{2}{3}}$, $k_{j2} = 15\zeta_j^{\frac{1}{2}}$, $k_{j3} = 2.3\zeta_j$ y $k_{j4} = 1.1\zeta_j$, con $\zeta_j = 15$ y ($j = \phi, \theta, \psi$). Las condiciones iniciales están dadas como $\xi_1(0) = (0, -6, 0)^T$, $\xi_2(0) = \eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$, y las simulaciones son implementadas utilizando el método de integración de Euler con un paso de muestreo de 0.001[s].

Se considera que en cada intervalo de tiempo discreto t_k la posición del objetivo es medida, donde la posición sin el retraso en el tiempo es aproximada a través de (2). Se asume que existe un retraso en el tiempo en la medición de la posición del objetivo, causado por la velocidad de captura de la cámara y el tiempo de procesamiento de cada imagen. Se considera un retraso en el tiempo constante entre muestreos de $\delta = 0.5[\text{s}]$. De igual forma, se considera que la cámara detecta el objetivo en un tiempo $t = 2.5[\text{s}]$, donde el *Quad-Rotor* ha alcanzado una altura de 0.2[m]. En un escenario práctico se puede considerar una misión de reconocimiento preliminar para detectar al objetivo móvil.

La estimación de la posición del objetivo es mostrada en la Fig. 2, donde la línea sólida representa la trayectoria del objetivo, la línea punteada representa la medición de la posición del objetivo a través de un retenedor de orden cero, mientras que la línea segmentada representa

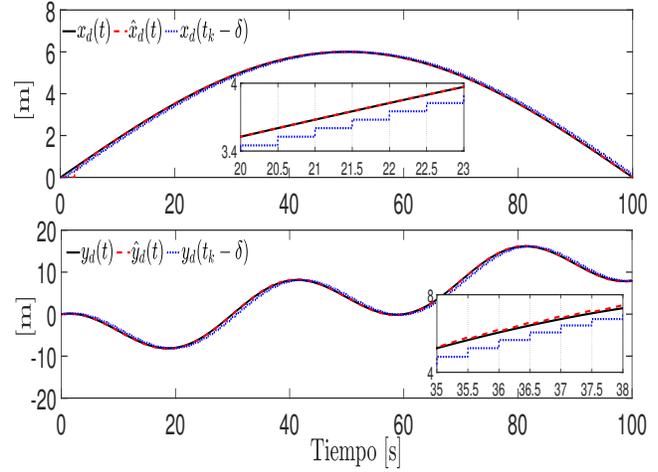


Figura 2. Estimación de la trayectoria del objetivo

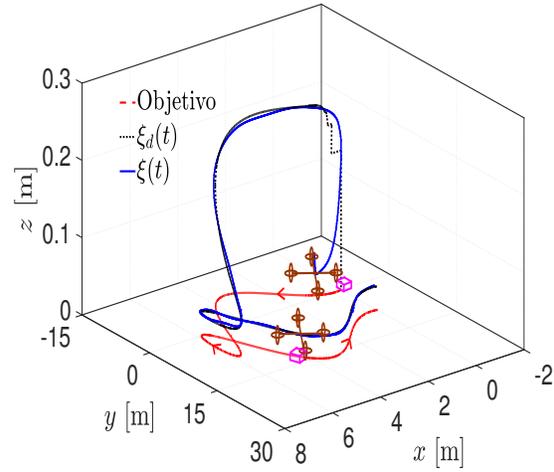


Figura 3. Seguimiento del *Quad-Rotor* al objetivo móvil la estimación de la posición del objetivo sin retrasos en el tiempo.

La tarea de seguimiento del *Quad-Rotor* al objetivo móvil es mostrada en la Fig. 3, donde, a pesar de la presencia de perturbaciones externas y retrasos en el tiempo en la medición de la posición del objetivo, la estrategia propuesta permite al *Quad-Rotor* cumplir la tarea. Aproximadamente a la mitad de la tarea el *Quad-Rotor* desciende aproximándose al objetivo utilizando como referencia la estimación de su posición sin retrasos en el tiempo.

Finalmente, las señales de control, generadas por el controlador propuesto, son mostradas en la Fig. 4, donde el empuje principal se mantiene estable y los momentos angulares se mantienen en valores cercanos a cero.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo contribuye con el diseño de un controlador para el seguimiento de un *Quad-Rotor* a un objetivo móvil, considerando perturbaciones externas y retardos en el tiempo en las mediciones de posición del objetivo. Se asume que una cámara monocular proporciona una

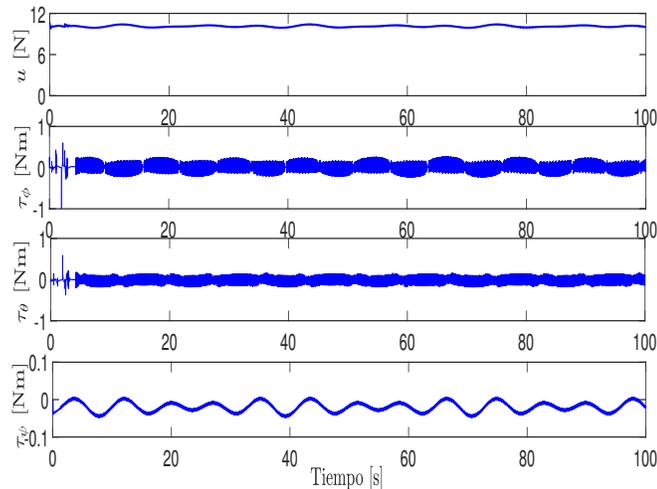


Figura 4. Señales de control

imagen detectando al objetivo. Se considera que existe un retraso en el tiempo conocido en la medición de la posición objetivo, causado por la velocidad de captura de la cámara y el tiempo de procesamiento de cada imagen. Para estimar la posición del objetivo, sin retrasos en el tiempo, se propone un modelo de identificación para predecir la posición actual del objetivo. El controlador de posición está diseñado a través de un método constructivo que asegura la convergencia exponencial a una vecindad del origen. Por otro lado, se asegura que la dinámica del error de seguimiento de orientación converge a cero en un tiempo finito. Se presentan simulaciones numéricas para mostrar el desempeño de la estrategia propuesta.

REFERENCIAS

Chen, F., Lei, W., Zhang, K., Tao, G., and Jiang, B. (2016a). A novel nonlinear resilient control for a quadrotor uav via backstepping control and nonlinear disturbance observer. *Nonlinear Dynamics*, 85(2), 1281–1295.

Chen, J., Liu, T., and Shen, S. (2016b). Tracking a moving target in cluttered environments using a quadrotor. *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 446–453.

Dydek, Z.T., Annaswamy, A.M., and Lavretsky, E. (2013). Adaptive control of quadrotor uavs: A design trade study with flight evaluations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(4), 1400–1406.

Falcón, R., Ríos, H., Mera, M., and Dzul, A. (2020). Attractive ellipsoid-based robust control for quadrotor tracking. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(9), 7851–7860.

García-Carrillo, L.R., Dzul-López, A., Lozano, R., and Pégard, C. (2013). *Quad Rotorcraft Control*. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag London Heidelberg New York Dordrecht, London.

González, I., Salazar, S., and Lozano, R. (2014). Chattering-free sliding mode altitude control for a quad-rotor aircraft: Real-time application. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 73(1), 137–155.

Guo J., Chen Z., W.J.Z.P. (2022). *A Ground Moving Target Tracking System for a Quadrotor in GPS-Denied*

Environments. Springer, Singapore.

Jia, Z., Yu, J., Mei, Y., Chen, Y., Shen, Y., and Ai, X. (2017). Integral backstepping sliding mode control for quadrotor helicopter under external uncertain disturbances. *Aerospace Science and Technology*, 68, 299–307.

Lin, F., Dong, X., Chen, B.M., Lum, K.Y., and heng Lee, T. (2012). A robust real-time embedded vision system on an unmanned rotorcraft for ground target following. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 59, 1038–1049.

Liu, H., Zhao, W., Zuo, Z., and Zhong, Y. (2017). Robust control for quadrotors with multiple time-varying uncertainties and delays. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(2), 1303–1312.

Liu, Y., Wang, Q., Hu, H., and He, Y. (2019). A novel real-time moving target tracking and path planning system for a quadrotor uav in unknown unstructured outdoor scenes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 49, 2362–2372.

Lozano, R., Castillo, P., Garcia, P., and Dzul, A. (2004). Robust prediction-based control for unstable delay systems: Application to the yaw control of a mini-helicopter. *Automatica*, 40(4), 603–612.

Merino, L., Caballero, F., de Dios, J., Maza, I., and Ollero, A. (2012). An unmanned aircraft system for automatic forest fire monitoring and measurement. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 65(1), 533–548.

Ordaz, J., Salazar, S., Mondie, S., Romero, H., and Lozano, R. (2013). Predictor based position control of a quad-rotor with delays in GPS and vision measurements. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, 70, 13–26.

Penin, B., Giordano, P.R., and Chaumette, F. (2018). Vision-based reactive planning for aggressive target tracking while avoiding collisions and occlusions. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3, 3725–3732.

Quintero, S.A. and Hespanha, J.P. (2014). Vision-based target tracking with a small uav: Optimization-based control strategies. *Control Engineering Practice*, 32, 28–42.

Ríos, H., Falcón, R., González, O., and Dzul, A. (2019). Continuous sliding-modes control strategies for quadrotor robust tracking: Real-time application. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66, 1264 – 1272.

Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Springer New York.

Torres-González, V., Sanchez, T., Fridman, L.M., and Moreno, J.A. (2017). Design of continuous twisting algorithm. *Automatica*, 80, 119–126.

Wang, S., Polyakov, A., and Zheng, G. (2020). On generalized homogenization of linear quadrotor controller. In *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 6190–6195.

Wang, S., Polyakov, A., and Zheng, G. (2022). Quadrotor stabilization under time and space constraints using implicit pid controller. *Journal of the Franklin Institute*, 359(4), 1505–1530.

Zheng, E.H., Xiong, J.J., and Luo, J.L. (2014). Second order sliding mode control for a quadrotor uav. *ISA Transactions*, 53(4), 1350–1356.