

# Robust estimation of multiplicative faults on actuators based on Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables<sup>1</sup>

P. Gasga\* S. Gómez-Peñate\* M. Bernal\*\*  
F. R. López-Estrada\*

\* *Tecnológico Nacional de México/IT Tuxtla Gutiérrez, TURIX  
Dynamics Diagnosis and Control Group, Carretera Panamericana Km  
1080, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México; samuel.gp@tuxtla.tecnm.mx*  
\*\* *Instituto Tecnológico de Sonora, 5 de Febrero 818 Sur, Col. Centro,  
Ciudad Obregón, Sonora, México.*

---

**Abstract:** In this paper, a simultaneous estimation of states and multiplicative faults on actuators is considered based on Takagi - Sugeno observer with unmeasurable premise variables. Observer design is derived of matrix linear inequalities deduced by method Lyapunov and a  $H_\infty$  performance criterion to minimize the effect of perturbation and uncertainty generated by the unmeasurable premise variables. The methodology is demonstrated by a nonlinear model of a helicopter to show performance of the observer in the presence of faults and disturbances.

*Keywords:* Estimation, Multiplicative fault, Takagi - Sugeno system, Unmeasurable premise, Robust observer.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El diagnóstico de fallas ha sido aplicado fuertemente en sistemas mecatrónicos. Dentro de esta teoría, se han desarrollado esquemas para la estimación de fallas con el objetivo de aumentar la confiabilidad en los sistemas, puesto que se tiene mayor información de la falla (Xia and Zheng, 2015) la cual es proporcionada por un observador cuando se diseñan algoritmos basados en modelos.

En trabajos recientes se han desarrollado métodos para la estimación de fallas sobre escenarios prácticos. En Reyes-Martínez et al. (2021) se desarrolla un observador que le permite estimar fallas aditivas del actuador de un generador de vapor. En Zhu and Li (2021) se diseña un observador proporcional integral para la estimación de fallas en actuadores en un helicóptero de tres grados de libertad. En la literatura, las fallas se categorizan en aditivas y multiplicativas. Las fallas multiplicativas generan cambios en los parámetros del sistema (Chen and Patton, 2012), mientras que en una falla aditiva el valor medio de la salida cambia. Cuando se presentan fallas multiplicativas en los actuadores, el efecto de las fallas se mezclan con la señal de entradas y se manifiesta como una pérdida de eficiencia (Ben Brahim et al., 2018).

Por tanto, en este trabajo se diseña un observador para estimar fallas multiplicativas con el objetivo de obtener el grado de degradación de los actuadores.

Existen métodos de estimación de fallas multiplicativas, por ejemplo; en Tan and Edwards (2004) se realiza una reconfiguración de las fallas multiplicativas a fallas aditivas para realizar el análisis mediante un observador por modos deslizantes (OMD). En Nguyen et al. (2015) se considera la entrada como un parámetro variable que modela a la falla multiplicativa en actuadores y de esa manera diseña un observador conmutado. Sin embargo, la técnica solo puede ser aplicado a sistemas con entrada única. Esta limitante se continuó estudiando en Rondono et al. (2016) a partir de un observador conmutado que estima las fallas multiplicativas en actuadores para sistemas de múltiples entradas. Por otro lado, muchos sistemas mecatrónicos son representados por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales (Nguyen et al., 2016) que incrementa la complejidad del análisis para realizar un diagnóstico de fallas. Frente a esta situación, los modelos Takagi-Sugeno (T-S) se han visto como una solución atractiva para tratar con sistemas no lineales. Los modelos T-S son conformados por una colección de modelos lineales e invariantes en el tiempo que son interpolados mediante funciones de ponderación que dependen de variables premisas (López-Estrada et al., 2019). Existen dos clasificaciones de variables premisas, las medibles y no

<sup>1</sup> Este trabajo fue financiado por el Tecnológico Nacional de México a través del programa Proyectos de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación, con clave de proyecto 13965.22-P.

medibles. Las premisas medibles comúnmente dependen de parámetros que se pueden medir, entradas e incluso de las salidas del sistema, pero esta suposición reduce drásticamente la implementación práctica, ya que en muchos casos las variables premisas pueden depender de las variables de estado que no se miden (Ichalal et al., 2008). Por tanto considerar modelos T-S con variables premisas no medibles tienen mayor aplicabilidad. Algunos autores han trabajado con estimación de fallas multiplicativas considerando premisas no medibles como en Bezzaoucha et al. (2013) se realiza una estimación de fallas multiplicativas con premisas no medibles y recientemente en Behzad et al. (2022) se diseña un observador para la estimación simultánea de fallas multiplicativas en sensores y procesos. No obstante, son pocos los trabajos que abordan estimación de fallas multiplicativas en los actuadores.

La principal contribución de este trabajo es diseñar un observador T-S con variables premisas no medibles a partir de un estado aumentado que incluye el vector de estado del sistema y el vector de falla multiplicativa. De manera similar a Rotondo et al. (2016), las no linealidades y las entradas se capturan en un vector de variables premisas. Pero, en este trabajo las variables premisas se reescriben en su forma convexa a partir del método del sector no lineal. Además, el diseño del observador es robusto a perturbaciones e incertidumbre inducidas por las variables premisas no medibles.

El presente documento está organizado de la siguiente forma: En la Sección 2 se presenta el modelado T-S del sistema aumentado. En la Sección 3, se desarrolla la metodología del observador T-S para la estimación de las fallas multiplicativas. Los resultados del desempeño del observador se discuten en la Sección 4 a través de un modelo dinámico de un vehículo tipo helicóptero de dos grados de libertad. Finalmente, en la Sección 5 se mencionan las conclusiones.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere un sistema dinámico no lineal con perturbaciones y fallas en los actuadores, definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(z(t))x(t) + B(z(t))\Gamma_a(t)u(t) + Dd(t), \\ y(t) &= C(z(t))x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$  son el vector de estados, el vector de entradas, el vector de salidas y las perturbaciones, respectivamente. Las matrices  $A(z(t))$ ,  $B(z(t))$ ,  $C(z(t))$ , y  $D$  son conocidas y de dimensiones apropiadas.  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  es un vector de variables premisas que contiene las no linealidades del sistema. La matriz  $\Gamma_a(t)$  es desconocida y describe las fallas multiplicativas en los actuadores de la siguiente manera:

$$\Gamma_a(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n_u}(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Cada  $\gamma_n(t)$ ,  $\forall n \in \{1, 2, \dots, n_u\}$  representa las fallas en cada canal de entrada  $u_n(t)$ , debido a la pérdida de eficiencia de cada  $n$  actuador, es decir, el grado de degradación. De tal manera, que cuando  $0 \leq \gamma_n(t) \leq 1$ , representará una falla parcial en  $u_n(t)$ , dado por un porcentaje de degradación del actuador; por otra parte  $\gamma_n(t) = 1$ , denota la operación nominal cuando se encuentra  $u_n(t)$  libre de fallas; y cuando  $\gamma_n(t) = 0$  representa el 100% de degradación correspondiendo a una falla total. Por tanto, la acción de control en el canal  $u_n(t)$  se pierde totalmente.

Debido a la estructura diagonal de  $\Gamma_a(t)$ , el producto  $\Gamma_a(t)u(t)$ , se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\Gamma_a(t)u(t) = \bar{u}(t) \gamma(t), \quad (3)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \text{diag}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n_u}(t)), \\ \gamma(t) &= [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_{n_u}(t)]^T, \end{aligned}$$

tomando en cuenta a (3) es posible reescribir el sistema no lineal (1) como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(z(t))x(t) + B(z(t))\bar{u}(t)\gamma(t) + Dd(t), \\ y(t) &= C(z(t))x(t), \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\gamma(t)$  es el vector de fallas y  $D$  es una matriz que distribuye los efectos de la perturbación. Ahora, si se asume que las fallas en los actuadores son de variación lenta, es decir;  $\dot{\gamma}(t) = 0$  y considerando el vector de estado aumentado  $\zeta(t) = [x(t) \ \gamma(t)]^T$  se obtiene el siguiente sistema extendido:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \bar{A}(z(t), \bar{u}(t))\zeta(t) + \bar{D}d(t), \\ \bar{y}(t) &= \bar{C}(z(t))\zeta(t), \end{aligned} \quad (5)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \bar{A}(z(t), \bar{u}(t)) &= \begin{bmatrix} A(z(t)) & B(z(t))\bar{u}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}(z(t)) &= [C(z(t)) \ 0]. \end{aligned}$$

Sin embargo, reescribir el sistema (5) a una representación T-S, se tiene como ventaja de usar herramientas y métodos de sistemas lineales para el diseño del observador. Por tanto, en (5) se identifican las no linealidades, las entradas del sistema y se capturan en un nuevo vector de variables premisas  $\xi(t) = [z(t) \ u(t)]^T = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \dots \ \xi_p(t)]$ . Considerando el método de la transformación del sector no lineal (Ohtake et al., 2003), las variables premisas  $\xi_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  se acotan en sus valores mínimos  $\xi_j^0$  y máximos  $\xi_j^1$ , donde  $p$  es el número de variables premisas que contiene el sistema aumentado. Con los valores mínimos y máximos de las variables premisas del sistema, es posible construir los siguientes pares de funciones de peso:

$$\mu_0^j(\xi(t)) = \frac{\xi_j^1 - \xi_j(t)}{\xi_j^1 - \xi_j^0}, \quad \mu_1^j(\xi(t)) = 1 - \mu_0^j(\xi(t)), \quad (6)$$

y cada  $\xi_j(t)$  podrá reescribirse como una suma convexa:

$$\begin{aligned}\xi_j(t) &= \mu_0^j(\xi_j(t))\xi_j^0 + \mu_1^j(\xi_j(t))\xi_j^1 \\ &= \sum_{i_j=0}^1 \mu_{i_j}^j(\xi_j(t))\xi_j^{i_j}, \quad i_j \in \{0, 1\}.\end{aligned}\quad (7)$$

Con el sistema extendido en (5) y la representación en (7) se obtiene el modelo T-S extendido:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))\bar{A}_i\zeta(t) + \bar{D}d(t), \\ \bar{y}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))\bar{C}_i\zeta(t),\end{aligned}\quad (8)$$

donde  $\bar{A}_i$  y  $\bar{C}_i$  son modelos LIT y el número de modelos locales es  $r = 2^p$ . Las funciones de ponderación se construyen como el producto de las funciones de pesos, es decir:

$$\mu_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_{i_j}^j(\xi_j(t)), \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}.\quad (9)$$

Las funciones de ponderación satisfacen la propiedad de suma convexa:

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1.\quad (10)$$

### 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR T-S

Con el objetivo de estimar el estado y las fallas en el sistema no lineal (1), se propone el siguiente observador T-S para el sistema aumentado (8) bajo la suposición de que es observable:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\zeta}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \left( \bar{A}_i\hat{\zeta}(t) + \bar{L}_i(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)) \right), \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t))\bar{C}_i\hat{\zeta}(t),\end{aligned}\quad (11)$$

donde  $\hat{\zeta}(t)$  es el vector de estado estimado del sistema aumentado.  $\mu_i(\hat{\xi}(t))$  son las funciones de ponderación que dependen de las variables premisas no medibles y la matriz  $\bar{L}_i$  son las ganancias del observador a determinar. Se define el error de estimación como:

$$e(t) = \zeta(t) - \hat{\zeta}(t).\quad (12)$$

Usando (8) y (11), se obtiene la dinámica del error de estimación:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))\bar{A}_i\zeta(t) + \bar{D}d(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \left( \bar{A}_i\hat{\zeta}(t) + \bar{L}_i(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)) \right).\end{aligned}\quad (13)$$

Para evidenciar la incertidumbre debido a las variables premisas no medibles, a la Ecuación (13) se le adiciona y resta el término:

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \left( \bar{A}_i - \bar{L}_i \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t))\bar{C}_j \right) \zeta(t),\quad (14)$$

Sustituyendo el valor de  $\hat{y}(t)$  y  $\bar{y}(t)$  se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))\bar{A}_i\zeta(t) + \bar{D}d(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \left( \bar{A}_i\hat{\zeta}(t) + \bar{L}_i \left( \sum_{j=1}^r \mu_j(\xi(t))\bar{C}_j\zeta(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t))\bar{C}_j\hat{\zeta}(t) \right) \right) + \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \left( \bar{A}_i - \right. \\ &\quad \left. \bar{L}_i \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t))\bar{C}_j \right) \zeta(t) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \left( \bar{A}_i - \right. \\ &\quad \left. \bar{L}_i \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t))\bar{C}_j \right) \zeta(t),\end{aligned}\quad (15)$$

y realizando las siguientes manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t)) (\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C}_j) e(t) + \\ &\quad \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \right) \bar{A}_i\zeta(t) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \\ &\quad \bar{L}_i \left( \sum_{j=1}^r \mu_j(\xi(t)) - \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t)) \right) \bar{C}_j\zeta(t) + \bar{D}d(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t)) (\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C}_j) e(t) + \\ \Delta_A(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t))\bar{L}_i\Delta_C(t) + \bar{D}d(t),\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\Delta_A(t) &= \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \right) \bar{A}_i\zeta(t), \\ \Delta_C(t) &= \left( \sum_{j=1}^r \mu_j(\xi(t)) - \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t)) \right) \bar{C}_j\zeta(t),\end{aligned}$$

los cuales son incertidumbres debido a las variables premisas no medibles.

Entonces, considerando  $d(t)$ ,  $\Delta_A(t)$  y  $\Delta_C(t)$  como componentes de un vector de perturbaciones/incertidumbres, la dinámica del error  $\dot{e}(t)$  queda expresado como:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t))\mu_j(\hat{\xi}(t)) \left( (\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C}_j) e(t) \right. \\ &\quad \left. + G_i\omega(t) \right),\end{aligned}\quad (16)$$

con:

$$G_i = [\bar{D} \quad I \quad -\bar{L}_i] \quad \text{y} \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ \Delta_A(t) \\ \Delta_C(t) \end{bmatrix}.$$

El error de estimación es afectado por el término  $\omega(t)$  y su efecto se puede minimizar con el siguiente problema de optimización:

$$\sup_{\|\omega(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|e_y(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|\omega(t)\|_{\mathcal{L}_2}} < \beta, \quad (17)$$

donde  $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  es el vector de residuo y  $\beta$  es el nivel de atenuación. A continuación el Teorema 1 da las condiciones suficientes para garantizar la estimación de las fallas que se encuentran inmerso en el sistema (8).

*Teorema 1.* Dado el observador (11) y el modelo T-S aumentado (8), si existe una matriz  $P = P^\top$  y matrices  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , tales que las LMIs se satisfagan para:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(P\bar{A}_i - M_i\bar{C}_j) & PG_i & \bar{C}_j^\top \\ G_i^\top P & -\beta^2 I & 0 \\ \bar{C}_j & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

donde el operador  $\mathbf{H}(P\bar{A}_i - M_i\bar{C}_j)$  será empleado para denotar  $P\bar{A}_i - M_i\bar{C}_j + \bar{A}_i^\top P - \bar{C}_j^\top M_i^\top$  y las ganancias del observador estarán dadas por  $\bar{L}_i = P^{-1}M_i$ .

**Demostación:** Considerando una función cuadrática de Lyapunov  $V(e(t)) = e(t)^\top P e(t)$ , se garantiza la convergencia asintótica a cero del error de estimación, si existe una matriz  $P$  simétrica y definida positiva y además, la derivada  $\dot{V}(e) = \dot{e}(t)^\top P e(t) + e(t)^\top P \dot{e}(t) < 0$ .

Para garantizar robustez del observador ante perturbaciones e incertidumbres, se agrega el criterio (17), tal que:

$$\dot{V}(e(t)) + e_y(t)^\top e_y(t) - \beta^2 \omega(t)^\top \omega(t) < 0. \quad (19)$$

Sustituyendo la dinámica del error en (19), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) \left( (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_j) e(t) + \right. \right. \\ & \left. \left. G_i \omega(t) \right) \right)^\top P e(t) + e(t)^\top P \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) \left( (\bar{A}_i - \right. \right. \\ & \left. \left. \bar{L}_i \bar{C}_j) e(t) + G_i \omega(t) \right) \right) + e_y(t)^\top e_y(t) - \beta^2 \omega(t)^\top \omega(t) < 0, \\ & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) e(t)^\top \left( (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_j)^\top P + P(\bar{A}_i - \right. \\ & \left. \bar{L}_i \bar{C}_j) \right) e(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) \left( e(t)^\top \bar{C}_j^\top \bar{C}_j e(t) + \right. \\ & \left. \omega(t)^\top G_i^\top P e(t) + e(t)^\top P G_i \omega(t) \right) - \beta^2 \omega(t)^\top \omega(t) < 0, \end{aligned}$$

con la propiedad convexa (10), factorizando a la izquierda y derecha por el vector  $\bar{X} = \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$  y su traspuesta  $\bar{X}^\top$ , se obtiene:

$$\bar{X}^\top \left[ \mathbf{H}(P(\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_j)) + \bar{C}_j^\top \bar{C}_j \quad PG_i \\ G_i^\top P \quad -\beta^2 I \right] \bar{X} < 0, \quad (20)$$

Debido a los términos no lineales de la desigualdad (20), se hace la sustitución  $M_i = PL_i$ , tal que se llega a expresar en términos de LMIs como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(P\bar{A}_i - \bar{M}_i\bar{C}_j) + \bar{C}_j^\top \bar{C}_j & PG_i \\ G_i^\top P & -\beta^2 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(P\bar{A}_i - \bar{M}_i\bar{C}_j) & PG_i \\ G_i^\top P & -\beta^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_j^\top \\ 0 \end{bmatrix} [\bar{C}_j \quad 0] < 0. \quad (21)$$

Finalmente aplicando el complemento de Schur en (21) se obtienen las LMIs descrita en (18) por el Teorema 1.

#### 4. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados de la efectividad del observador T-S (11), para estimar la pérdida de eficiencia en actuadores de un helicóptero de dos grados de libertad (2GDL). El modelo matemático no lineal presentado en Sadala and Patre (2018) se reescribe en la forma (4). Las matrices  $A(z(t))$ ,  $B(z(t))$ ,  $C(z(t))$ ,  $D$ ,  $\bar{u}(t)$  y el vector  $\gamma(t)$ , se presentan a continuación:

$$A(z(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-mglz_1(t)}{\eta} & -B_p & 0 & \frac{-ml^2z_2(t)}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2ml^2z_4(t) & 0 & -B_yz_3(t) \end{bmatrix},$$

$$B(z(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{pp}}{\eta} & \frac{k_{py}}{\eta} \\ 0 & 0 \\ k_{yp}z_3(t) & k_{yy}z_3(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & 0 \\ 0 & u_2(t) \end{bmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix},$$

donde las no linealidades y las entradas  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  se capturan en las variables premisas:  $\xi_1(t) = z_1(t) = \frac{\cos x_1(t)}{x_1(t)}$ ,  $\xi_2(t) = z_2(t) = x_4(t) \cos x_1(t) \sin x_1(t)$ ,  $\xi_3(t) = z_3(t) = \frac{1}{J_y + ml^2 \cos^2 x_1(t)}$ ,  $\xi_4(t) = z_4(t) = \frac{x_4(t) \cos x_1(t) \sin x_1(t)}{J_y + ml^2 \cos^2 x_1(t)}$ ,  $\xi_5(t) = u_1(t) = V_{mp}(t)$  y  $\xi_6(t) = u_2(t) = V_{my}(t)$ . El parámetro  $\eta = (J_p + ml^2)$ , el ángulo pitch es  $x_1(t)$ , el ángulo en yaw es  $x_3(t)$  y las velocidades angulares son  $x_2(t)$ ,  $x_4(t)$ , por tanto, el vector  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^\top$ . Y con el planteamiento de este modelo no lineal se puede llegar al sistema aumentado en (5), donde el estado aumentado es  $\zeta(t) = [x(t), \gamma(t)]^\top$ . Los valores de los parámetros usados en la simulación se muestran en la Tabla 1 (Sadala and Patre, 2018).

Las variables premisas están definidas en función del estado del sistema, por lo que cada variable de estado se encuentra acotada dentro de los rangos de funcionamiento del sistema físico, de esta manera:  $x_1(t) \in [-\pi/3, \pi/4]$  rad,  $x_4(t) \in [-2, 2]$  rad/s y los límites de las variables premisas son:  $\xi_1(t) \in [\xi_1^0, \xi_1^1] = [-0.47, 0.90]$ ,  $\xi_2(t) \in [\xi_2^0, \xi_2^1] = [0.866, 1]$ ,  $\xi_3(t) \in [\xi_3^0, \xi_3^1] = [14.90, 18.13]$ ,  $\xi_4(t) \in [\xi_4^0, \xi_4^1] = [-15.70, 14.90]$ .

Mientras que las variables premisas que corresponden a las entradas se acotan en la siguiente región  $\xi_5(t) \in [\xi_5^0, \xi_5^1] = [5, 18]$ ,  $\xi_6(t) \in [\xi_6^0, \xi_6^1] = [-15, -3]$ .

Tabla 1. Parámetros del helicóptero 2GDL

Descripción	Parámetro	Valor	Unidad
Masa del vehículo	$m$	1.3872	kg
Momento de inercia en pitch	$J_p$	0.0384	kgm <sup>2</sup>
Momento de inercia en yaw	$J_y$	0.0432	kgm <sup>2</sup>
Amortiguamiento pitch	$B_p$	0.8	N/V
Amortiguamiento yaw	$B_y$	0.318	N/V
Par empuje en eje pitch ( $m_p$ )	$k_{pp}$	0.204	Nm/V
Par empuje en eje yaw ( $m_y$ )	$k_{yy}$	0.072	Nm/V
Par empuje en eje pitch ( $m_y$ )	$k_{py}$	0.0068	Nm/V
Par empuje en eje yaw ( $m_p$ )	$k_{yp}$	0.0219	Nm/V
Longitud	$l$	0.186	m

Debido a que el sistema es inestable se necesita diseñar un sistema de control. Cuando se tiene un modelo T-S, una técnica común que se encuentra en la literatura, se conoce como compensación paralela distribuida (PDC por sus siglas en inglés)(Wang and Tanaka, 2004), la cual se compone de ganancias por retroalimentación de estado interpoladas mediante las mismas funciones de ponderación del modelo T-S. Para poner a prueba la robustez del observador se consideran dos perturbaciones  $d_1(t) = e^{-0.8t}(1.8 + \sin 5t)$ , en  $t \geq 70s$  y  $d_2(t) = e^{-0.8t}(1.5 \sin 5t + \sin 3t)$  en  $t \geq 25s$ . Las condiciones iniciales en  $x(0) = [\pi/9 \ 0 \ \pi/6 \ 0]^T$  y  $\hat{z}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ . Las fallas que se consideran en el análisis son de tipo abrupta y representan una pérdida de efectividad en los actuadores. Su ocurrencia en el tiempo es definida de la siguiente manera:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} 0\% & t < 60s \\ 20\% & t \geq 60s \end{cases}, \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} 0\% & t < 40s \\ 50\% & t \geq 40s \end{cases}$$

Las ganancias se obtuvieron resolviendo las LMIs del Teorema 1 a través de la herramienta YALMIP y del solucionador SEDUMI. Se obtuvo un nivel de atenuación  $\beta = 0.7746$ , lo que garantiza que el efecto de las perturbaciones en el error de estimación son atenuadas. Para la matriz  $P$  se obtuvo:

$$P = \begin{bmatrix} 15.57 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 33.81 & 1.45 & 9.28 & 10.10 & -2.11 \\ 0.00 & 1.45 & 33.68 & 129.41 & 0.40 & -53.96 \\ 0.00 & 9.28 & 129.41 & 559.72 & 1.52 & -220.55 \\ 0.00 & 10.10 & 0.40 & 1.52 & 20.28 & -0.32 \\ 0.00 & -2.11 & -53.96 & -220.55 & -0.32 & 95.62 \end{bmatrix}$$

Por limitaciones de espacio no se presentan todas las ganancias del observador. De manera ilustrativa se presenta a  $\bar{L}_1$ , como resultado es:

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 15.0417 & -0.0001 & 0.000 \\ 16.1273 & 27.4031 & 4.7159 \\ 0.0933 & 1.0331 & 67.1712 \\ 0.5960 & 5.8732 & 281.3083 \\ 0.6490 & 17.8456 & 0.5743 \\ -0.1355 & -1.2241 & -108.3620 \end{bmatrix},$$

y de acuerdo con el modelo, se calcularon 64 ganancias. En la Figura 1 muestra la ley de control de los dos actuadores, se observa que a pesar de que tiene presente una falla en cada actuador, se mantiene dentro de sus límites mínimos y máximos. En la Figura 2 se observa la estimación de las fallas el cual resultan converger rápidamente en un tiempo menor a 5 s. No obstante, en el segundo 70s de la primera falla  $\gamma_1(t)$  hay una cresta pronunciada producida por  $d_1(t)$  con una magnitud de 0.05, y en el segundo 25s, de la segunda falla  $\gamma_2(t)$  pertenece a  $d_2(t)$ . La Figura 3 presenta el estado no disponible y los errores de estimación de las fallas multiplicativas. El comportamiento de los estados que se tienen disponibles se ilustra en la Figura 4, respectivamente se aprecia el desempeño del observador.

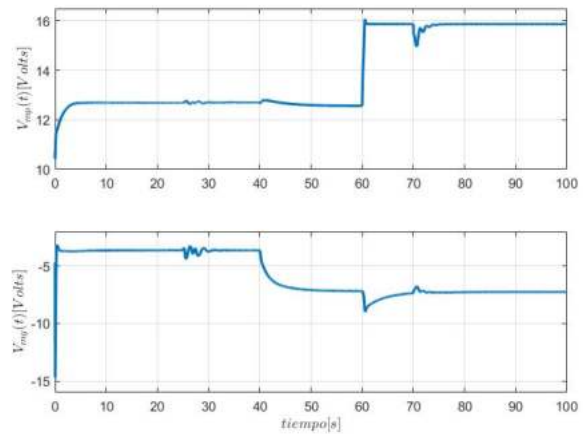


Figura 1. Entradas de control.

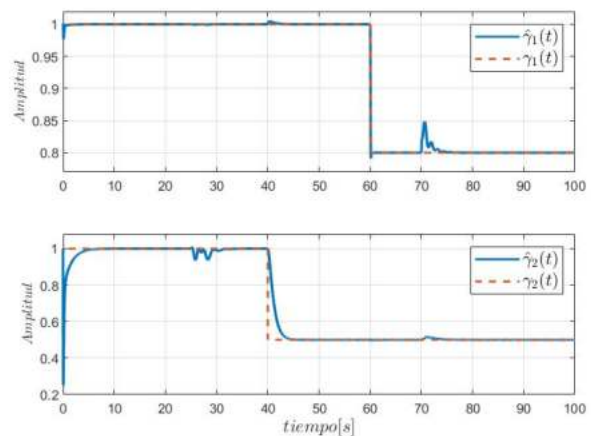


Figura 2. Estimación de las fallas multiplicativas.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un observador T-S para una estimación de los estados y fallas multiplicativas

utilizando el método del sector no lineal. La metodología planteada obtuvo un buen desempeño en la convergencia de los estados y las fallas multiplicativas. El observador demostró ser suficientemente robusto en presencia de la perturbación e incertidumbre. Una investigación futura es desarrollar estrategias de control tolerante a fallas basadas en el diagnóstico de fallas propuesto.

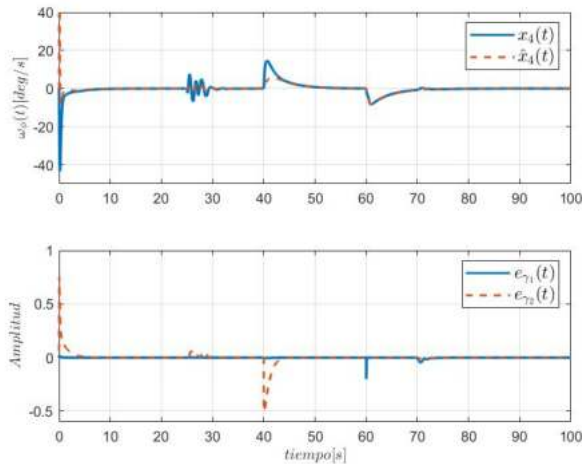


Figura 3. Estimación del estado  $x_4(t)$  y los errores de estimación de las fallas  $e_{\gamma_1}(t)$  y  $e_{\gamma_2}(t)$ .

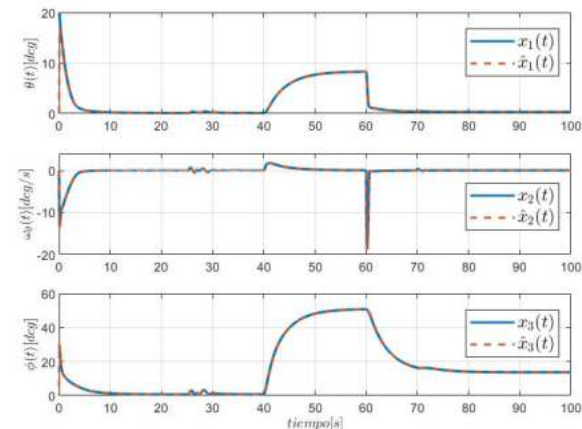


Figura 4. Comportamiento de las variables de estados disponibles.

## REFERENCIAS

- Behzad, H., Sadrnia, M.A., Casavola, A., Ramezani, A., and Darabi, A. (2022). Multiplicative fault estimation based on the energetic approach for linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 95(3), 703–715.
- Ben Brahim, A., Dhahri, S., Ben Hmida, F., and Sellami, A. (2018). Multiplicative fault estimation-based adaptive sliding mode fault-tolerant control design for nonlinear systems. *Complexity*, 2018.
- Bezzaoucha, S., Marx, B., Maquin, D., and Ragot, J. (2013). State and multiplicative sensor fault estimation for nonlinear systems. In *2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, 456–461. IEEE.
- Chen, J. and Patton, R.J. (2012). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, volume 3. Springer Science & Business Media.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2008). Design of observers for takagi-sugeno systems with immeasurable premise variables: an  $\mathcal{L}_2$  approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 2768–2773.
- López-Estrada, F.R., Rotondo, D., and Valencia-Palomo, G. (2019). A review of convex approaches for control, observation and safety of linear parameter varying and takagi-sugeno systems. *Processes*, 7(11), 814.
- Nguyen, M.Q., Sename, O., and Dugard, L. (2015). A switched lpv observer for actuator fault estimation. *IFAC-PapersOnLine*, 48(26), 194–199.
- Nguyen, M.Q., Sename, O., and Dugard, L. (2016). Comparison of observer approaches for actuator fault estimation in semi-active suspension systems. In *2016 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, 227–232. IEEE.
- Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H.O. (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4), 333–341.
- Reyes-Martínez, J., Astorga-Zaragoza, C.M., Madrigal-Espinosa, G., Chadli, M., Vargas-Méndez, R.A., Osorio-Gordillo, G.L., and Reyes-Reyes, J. (2021). Actuator fault compensation based on a takagi-sugeno pi observer: Application to a thermoelectric steam generator. *International Journal of Fuzzy Systems*, 1–12.
- Rotondo, D., López-Estrada, F.R., Nejjari, F., Ponsart, J.C., Theilliol, D., and Puig, V. (2016). Actuator multiplicative fault estimation in discrete-time lpv systems using switched observers. *Journal of the Franklin Institute*, 353(13), 3176–3191.
- Sadala, S. and Patre, B. (2018). A new continuous sliding mode control approach with actuator saturation for control of 2-dof helicopter system. *ISA transactions*, 74, 165–174.
- Tan, C.P. and Edwards, C. (2004). Multiplicative fault reconstruction using sliding mode observers. In *2004 5th Asian Control Conference (IEEE Cat. No. 04EX904)*, volume 2, 957–962. IEEE.
- Wang, H.O. and Tanaka, K. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- Xia, Y. and Zheng, W.X. (2015). Novel parameter estimation of autoregressive signals in the presence of noise. *Automatica*, 62, 98–105.
- Zhu, X. and Li, D. (2021). Robust fault estimation for a 3-dof helicopter considering actuator saturation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 155, 107624.