

Necessary and sufficient stability conditions for time-delay systems: a comparison. *

Alejandro Castaño* Oscar Santos-Estudillo* Gerson Portilla*
 Sabine Mondié*

* Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 07360
 Mexico D.F., Mexico (e-mail:
 acastano,odelossantos,gportilla,smondie@ctrl.cinvestav.mx).

Abstract: We compare three existing criteria which provide necessary and sufficient stability conditions for linear time-delay systems. An outstanding property of these conditions, based on the delay Lyapunov matrix, is that the decision is made via a finite number of operations. The main ideas of each method are briefly introduced and tested on two illustrative examples. A discussion of the result is presented.

Keywords: stability criteria, time-delay systems, comparison

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la estabilidad de los sistemas con retardo ha tenido particular interés en las últimas décadas, motivado por la amplia variedad de fenómenos físicos y de ingeniería que permiten describir. Además, estudiarlos desde una perspectiva puramente teórica, representa un reto atractivo para los investigadores. Diversos criterios de estabilidad, tanto en el dominio de la frecuencia (ver por ejemplo, Neimark (1949)), como en el tiempo (Krasovskii (1956)) han sido desarrollados.

En Kharitonov and Zhabko (2003) se introducen las funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo, que dependen de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo. Esta es solución de un conjunto de ecuaciones, denominadas propiedad dinámica, algebraica y simétrica (Kharitonov (2013)).

En el marco de las funcionales de Lyapunov-Krasovskii, se han desarrollado resultados de estabilidad e inestabilidad para sistemas con retardos en Medvedeva and Zhabko (2013), Egorov (2014) y Egorov and Mondié (2014). Estos trabajos inspiraron los criterios de estabilidad verificables en un número de operaciones finitas, introducidos en Gomez et al. (2019), Bajodek et al. (2022) y Alexandrova (2022). La principal diferencia entre estos métodos radica en el tipo de aproximación de la condición inicial sustituida en la funcional. En Gomez et al. (2019), se emplea una discretización de la condición inicial que depende de la matriz fundamental, mientras que en Bajodek et al. (2022) esta se sustituye por la proyección de los primeros polinomios de Legendre. Finalmente en Alexan-

drova (2022) la condición inicial se construye a través de una aproximación lineal a pedazos.

En esta contribución se presenta un estudio comparativo de estos tres criterios finitos de estabilidad. En la Sección 2 se presentan preliminares y resultados claves como la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos, los teoremas de estabilidad e inestabilidad y la funcional de Lyapunov-Krasovskii. En la Sección 3 se presentan los criterios finitos de estabilidad. Empleando dos casos de estudio, se presenta en la Sección 4 un análisis comparativo de los tres criterios y se discuten los resultados obtenidos. El artículo finaliza con algunas conclusiones.

Notación: El espacio de funciones continuas a pedazos y continuas sobre $[-h, 0]$ se escribe como $\mathcal{H} = PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ y $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, respectivamente. Para la variable $\varphi \in \mathcal{H}$, se emplea la norma uniforme $\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$; $\text{vec}(X)$ significa la vectorización de la matriz X y $A \otimes B$ representa el producto de Kronecker. Las funciones $\lceil \cdot \rceil$ y $\lfloor \cdot \rfloor$ se denotan como la función techo y piso, respectivamente.

2. PRELIMINARES

Considere un sistema lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde A_0, A_1 son matrices en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y $h > 0$ es el retardo. La condición inicial se define como $\varphi \in \mathcal{H}$. La restricción de la solución $x(t, \varphi)$ del sistema (1) en el intervalo $[t-h, t]$ es $x_t(\varphi) : \theta \rightarrow x(t+\theta, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$. Para estudiar la estabilidad del sistema (1) se emplea la funcional de Lyapunov-Krasovskii con derivada prescrita introducida en Kharitonov (2013):

* El trabajo de todos los autores fue apoyado por el proyecto CONACYT A1-S-24796, Mexico.

$$v_0(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U^T(h+\tau)A_1\varphi(\tau)d\tau \\ + \int_{-h}^0 \varphi^T(\tau_1)A_1^T \int_{-h}^0 U(\tau_1-\tau_2)A_1\varphi(\tau_2)d\tau_2d\tau_1, \quad (2)$$

donde W es simétrica y definida positiva, y $U(\tau)$ es la matriz de Lyapunov para sistemas retardados definida por

$$U(\tau) = \int_0^\infty K(t)WK(t+\tau)d\tau, \quad \tau \geq 0. \quad (3)$$

En Kharitonov (2013), se demuestra que la matriz de Lyapunov del sistema (1), asociada a W existe y es única, sí y sólo sí, la condición de Lyapunov se satisface, es decir, el espectro del sistema no contiene valores propios s_1, s_2 tal que $|s_1 + s_2| = 0$. La derivada con respecto al tiempo de $v_0(\varphi)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (1) es

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -x^T(t)Wx(t), \quad t \geq 0.$$

Esta funcional admite una cota cúbica en el conjunto de funciones iniciales $\varphi \in \mathcal{H}$. En cambio, la funcional

$$v_1(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\tau)W\varphi(\tau)d\tau, \quad (4)$$

tiene una cota cuadrática útil en estudios de robustez y estimación de soluciones. En este caso

$$\frac{dv_1(x_t)}{dt} = -x^T(t-h)Wx(t-h), \quad t \geq 0.$$

A continuación, se presentan resultados recientes de estabilidad e inestabilidad sobre el conjunto compacto

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^k([-h, 0], \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\|_h = \|\varphi(0)\| = 1, \right. \\ \left. \|\varphi^{(l)}\|_h \leq M^l, \quad l = \overline{1, k} \right\},$$

donde $M = \|A_0\| + \|A_1\|$.

Lema 2.1. (Gomez et al. (2019)) Si el sistema (1) es inestable, entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que

$$v_1(\varphi) \leq -a_1 = -\frac{\lambda_{\min}(W)e^{2\hat{\alpha}h}}{4\hat{\alpha}} \cos^2(b),$$

donde $b \in (0, \frac{\pi}{2})$ es una solución de la ecuación

$$\sin^4(b)((\hat{\alpha}h)^2 + b^2) = (\hat{\alpha}h)^2, \quad (5)$$

y $\hat{\alpha}$ tiene el mismo significado como en el Lema 2.2.

Teorema 2.1. (Alexandrova, 2022) El sistema (1) es exponencialmente estable, si y solo si existe la funcional (2) y una constante $\mu > 0$ tal que

$$v_0(\varphi) \geq \mu, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Lema 2.2. (Alexandrova, 2022) Si el sistema (1) es inestable, entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que

$$v_0(\varphi) \leq -a_0 = -1/(4\hat{\alpha}).$$

Aquí, $\hat{\alpha}$ es tal que $\Re(s) \leq \hat{\alpha}$, donde s es un valor propio del sistema inestable (1). En particular, $\hat{\alpha} \leq M$ puede ser una cota aproximada.

En Egorov and Mondié (2014b) se presenta el siguiente lema de estabilidad exponencial. Es un resultado clave en

la demostración de los criterios de estabilidad explorados en este trabajo.

Lema 2.3. Si el sistema (1) es exponencialmente estable, entonces existe $\alpha > 0$ tal que,

$$v_1(\varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_h^2, \quad \varphi \in \mathcal{H}.$$

3. CONDICIONES DE ESTABILIDAD FINITAS

En esta sección se presentan los principios básicos de los métodos introducidos en Gomez et al. (2019), Bajodek et al. (2022) y Alexandrova (2022).

3.1 Condición en términos de la matriz de Lyapunov

En Gomez et al. (2019) se aproxima una función arbitraria φ por una función de la forma

$$\psi_r(\theta) = \sum_{i=1}^r K(\theta + \tau_i)\gamma_i, \quad \theta \in [-h, 0]. \quad (6)$$

La función (6) es construida a través del siguiente algoritmo presentado en Egorov (2014):

- (1) Sea $\tau_i = (i-1)\delta$, donde $\delta_r = \frac{h}{r-1}$ con $r \geq 2$.
- (2) Encuentre $\gamma_i, i = \overline{1, r}$ tal que $\varphi(-\tau_i) = \psi_r(-\tau_i)$.

Definiendo el error de aproximación $R_r = \varphi - \psi_r$, se presenta el siguiente resultado.

Lema 3.1. Egorov (2016). Para toda $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\|\varphi - \psi_r\|_h = \|R_r\|_h \leq \varepsilon_r = \frac{(M+L)e^{Lh}}{1/\delta_r + L},$$

donde L es tal que $\|\dot{K}(t)\| \leq L$.

La aproximación ψ_r conduce a la solución

$$x(t, \psi_r) = \sum_{i=1}^r K(t + \tau_i)\gamma_i, \quad t \geq -h. \quad (7)$$

Véase Mondié et al. (2018). Al evaluar (7) en la funcional (4) y considerando el cambio de variable $t + \tau_i = s$ se obtiene

$$v_1(\psi_r) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \gamma_i^T \left(\int_{\tau_i-h}^\infty K^T(s)WK(s + \tau_j - \tau_i)dt \right) \gamma_j \\ = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \gamma_i^T \left(\int_0^\infty K^T(s)WK(s + \tau_j - \tau_i)dt \right) \gamma_j.$$

De esta manera, considerando (3), obtenemos

$$v_1(\psi_r) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \gamma_i^T U(\tau_j - \tau_i)\gamma_j = \gamma^T [U(\tau_j - \tau_i)]_{i,j=1}^r \gamma,$$

donde $\gamma = (\gamma_1^T \dots \gamma_r^T)^T$. Por tanto, por el Lema 2.3 se tiene que

$$\mathcal{K}_r = [U(\tau_j - \tau_i)]_{i,j=1}^r \geq 0,$$

y representa una condición de estabilidad análoga a la ya conocida en los sistemas libres de retardo. El resultado se enuncia a continuación.

Teorema 3.1. Gomez et al. (2019). El sistema (1) es exponencialmente estable sí y sólo sí la condición de Lyapunov se satisface y

$$\mathcal{K}_{\hat{r}} = [U(\tau_j - \tau_i)]_{i,j=1}^{\hat{r}} > 0, \quad (8)$$

con

$$\hat{r} = 1 + \lceil e^{Lh} h(M + L)(\alpha^* + \sqrt{\alpha^*(\alpha^* + 1)}) - Lh \rceil,$$

donde $L = \|A_0\|e^{\|A_0\|h}$, $M = \|A_0\| + \|A_1\|$ es la constante de Lipschitz, y $\alpha^* = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Los valores de α_1 y α_2 están determinados por

$$\alpha_1 = \frac{e^{-2hM} \lambda_{\min}(W)}{4M} \cos^2(b_0),$$

donde b_0 es la única raíz en el intervalo $[0, \pi/2]$ de la expresión (5), y

$$\alpha_2 = (1 + \|A_1\|h)^2 \|U(0)\| + h\|W\|.$$

3.2 Condición mediante aproximaciones de Legendre

En Bajodek et al. (2022) se hace uso de los polinomios de Legendre en el intervalo $[-h, 0]$, que forman una secuencia ortogonal y completa, descritos de la forma

$$l_k(\tau) = (-1)^k \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \left(\frac{\tau+h}{h}\right)^j, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En este enfoque, para cualquier función $\varphi \in \mathcal{H}$ y cualquier orden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, se obtiene una aproximación a través de los n primeros polinomios de Legendre definida como

$$\varphi_{\mathbf{n}}(\tau) = l_{\mathbf{n}}^T(\tau) \Phi_{\mathbf{n}}, \quad (9)$$

donde $\forall \theta \in [-h, 0]$,

$$l_{\mathbf{n}}(\theta) = [l_0(\theta)I_n \ l_1(\theta)I_n \ \dots \ l_{\mathbf{n}-1}(\theta)I_n]^T, \\ \Phi_{\mathbf{n}} = \underbrace{\text{diag}\left(\frac{1}{h}I_n, \dots, \frac{2\mathbf{n}-1}{h}I_n\right)}_{\mathbf{I}_{\mathbf{n}}} \otimes \int_{-h}^0 l_{\mathbf{n}}(\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

donde $\mathbf{I}_{\mathbf{n}}$ es la matriz de normalización y $\Phi_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^{n\mathbf{n}}$. Por tanto, la condición inicial $\varphi(\tau)$ se puede expresar como

$$\varphi(\tau) = l_{\mathbf{n}}^T(\tau) \Phi_{\mathbf{n}} + \tilde{\varphi}_{\mathbf{n}}(\tau)$$

donde $\tilde{\varphi}$ es el error residual de la aproximación. Para obtener a la condición necesaria de estabilidad se sustituye la aproximación (9) en la funcional (4), definiendo $W = I$. Se obtiene la funcional aproximada

$$v_{1_{\mathbf{n}}}(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \Phi_{\mathbf{n}}^T l_{\mathbf{n}}(\tau) I_n l_{\mathbf{n}}^T(\tau) \Phi_{\mathbf{n}} d\tau \\ + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U(-h-\tau) A_1 l_{\mathbf{n}}^T(\tau) \Phi_{\mathbf{n}} d\tau \\ + \int_{-h}^0 \Phi_{\mathbf{n}}^T l_{\mathbf{n}}(\tau_1) A_1^T \int_{-h}^0 U(\tau_1-\tau_2) A_1 l_{\mathbf{n}}^T(\tau_2) \Phi_{\mathbf{n}} d\tau_2 d\tau_1.$$

Definiendo

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{n}} = \int_{-h}^0 U^T(h+\tau) A_1 l_{\mathbf{n}}^T(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}} = \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 l_{\mathbf{n}}(\tau_1) A_1^T U(\tau_1-\tau_2) A_1 l_{\mathbf{n}}^T(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{n}}^{-1} = \int_{-h}^0 l_{\mathbf{n}}(\tau) l_{\mathbf{n}}^T(\tau) d\tau,$$

simetizando el segundo término y reduciendo la expresión obtenemos

$$v_{1_{\mathbf{n}}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \Phi_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U(0) & \mathbf{Q}_{\mathbf{n}} \\ * & \mathbf{T}_{\mathbf{n}} + \mathbf{I}_{\mathbf{n}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \Phi_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}.$$

Entonces, el Lema 2.3 sugiere la condición,

$$\mathbf{P}_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} U(0) & \mathbf{Q}_{\mathbf{n}} \\ * & \mathbf{T}_{\mathbf{n}} + \mathbf{I}_{\mathbf{n}}^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

y la evaluación de la estabilidad del sistema se reduce a la evaluación de la positividad definida de la matriz $\mathbf{P}_{\mathbf{n}}$. El resultado principal de Bajodek et al. (2022) es mostrar que para una aproximación suficientemente fina, las condiciones se vuelven suficientes:

Teorema 3.2. Bajodek et al. (2022) El sistema (1) es exponencialmente estable sí y sólo sí, la matriz

$$\mathbf{P}_{\mathcal{N}(\mathcal{E}(\eta_0))} = \mathbf{P}_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} U(0) & \mathbf{Q}_{\mathbf{n}} \\ * & \mathbf{T}_{\mathbf{n}} + \mathbf{I}_{\mathbf{n}}^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (10)$$

donde $\mathcal{N}(\varepsilon)$ está dado por

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}(\eta_0)) = \max \left(4, 1 + \left\lceil \frac{hM}{2} e^{1+\mathcal{W}} \left(-\frac{\ln(\mu\mathcal{E}(\eta_0))}{\frac{hM}{2}e} \right) \right\rceil \right),$$

con

$$\rho = \max \left(2, \left\lceil \frac{hM}{2} \right\rceil \right), \quad \mu = \left(\frac{e}{\rho} \right)^{\rho} \left(\frac{hM}{2} \right)^{\rho-2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \pi \right)^{-1}$$

y \mathcal{W} es la función Lambert. Además

$$\mathcal{E}(\eta_0) = \frac{\eta_0}{(\kappa_1 + \kappa_2) + \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + (h + \kappa_2)\eta_0}},$$

con

$$\kappa_1 = h \max_{\tau \in [0, h]} \|U(\tau)A_1\|, \quad \kappa_2 = h^2 \max_{\tau \in [-h, h]} \|U(\tau)A_1\|.$$

3.3 Condición mediante aproximación lineal a pedazos

En Alexandrova (2022) se discretiza el intervalo $[-h, 0]$ en los puntos $\theta_j = -j\Delta$, $j = \overline{0, N}$, y se considera una aproximación lineal a trozos de la función φ :

$$l_N(s + \theta_j) = \varphi(\theta_j) \left(1 + \frac{s}{\Delta} \right) - \varphi(\theta_{j+1}) \frac{s}{\Delta}, \\ s \in [-\Delta, 0], \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Sea $\eta_N(\theta) = \varphi(\theta) - l_N(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, el error de esta aproximación. Se introduce el vector $\hat{\varphi} = (\varphi^T(0), \varphi^T(\theta_1), \dots, \varphi^T(\theta_N))^T$, y denote sus componentes por $\hat{\varphi}_j = \varphi(\theta_j)$, $j = \overline{0, N}$.

Ahora, se calcula el valor de $v_0(l_N)$, el cual sirve como la aproximación de la funcional (2). Se muestra además que $v_0(l_N)$ representa una forma cuadrática con respecto al vector $\hat{\varphi}$.

Se aproxima el segundo sumando de (2) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_2(l_N) &= 2\varphi(0)^T \sum_{k=1}^N \int_{-\Delta}^0 U^T(s+k\Delta) A_1 \\ &\quad \times \left(\varphi(\theta_{N-k}) \left(1 + \frac{s}{\Delta}\right) - \varphi(\theta_{N-k+1}) \frac{s}{\Delta} \right) ds \\ &= 2\widehat{\varphi}_0^T \sum_{k=1}^N (\mathcal{M}_k \widehat{\varphi}_{N-k} + \mathcal{N}_k \widehat{\varphi}_{N-k+1}), \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{M}_k = \int_{-\Delta}^0 U^T(s+k\Delta) \left(1 + \frac{s}{\Delta}\right) ds A_1,$$

$$\mathcal{N}_k = \int_{-\Delta}^0 U^T(s+k\Delta) \left(-\frac{s}{\Delta}\right) ds A_1.$$

Realizando operaciones similares para los demás sumandos de (2), obtenemos

$$\begin{aligned} v_0(l_N) &= \widehat{\varphi}_0^T U(0) \widehat{\varphi}_0 + 2\widehat{\varphi}_0^T \sum_{k=1}^N (\mathcal{M}_k \widehat{\varphi}_{N-k} + \mathcal{N}_k \widehat{\varphi}_{N-k+1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\widehat{\varphi}_{N-k}^T \mathcal{P}_{k-j} \widehat{\varphi}_{N-j} + 2\widehat{\varphi}_{N-k}^T \mathcal{Q}_{k-j} \widehat{\varphi}_{N-j+1} \\ &\quad + \widehat{\varphi}_{N-k+1}^T \mathcal{R}_{k-j} \widehat{\varphi}_{N-j+1}). \end{aligned}$$

Aquí,

$$\mathcal{P}_l = A_1^T \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 \widehat{U}_l(s_1 - s_2) \left(1 + \frac{s_1}{\Delta}\right) \left(1 + \frac{s_2}{\Delta}\right) ds_2 ds_1 A_1, \quad 4.1 \text{ Ejemplo 1}$$

$$\mathcal{Q}_l = A_1^T \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 \widehat{U}_l(s_1 - s_2) \left(1 + \frac{s_1}{\Delta}\right) \left(-\frac{s_2}{\Delta}\right) ds_2 ds_1 A_1,$$

$$\mathcal{R}_l = A_1^T \int_{-\Delta}^0 \int_{-\Delta}^0 \widehat{U}_l(s_1 - s_2) \left(\frac{s_1 s_2}{\Delta^2}\right) ds_2 ds_1 A_1,$$

para $l = \overline{-(N-1), N-1}$ y $\widehat{U}_l(s_1 - s_2) = U(s_1 - s_2 + l\Delta)$.

Observación 3.1. Las matrices \mathcal{M}_k , \mathcal{N}_k , \mathcal{P}_l , \mathcal{Q}_l , \mathcal{R}_l pueden ser calculadas a través de un método recursivo, usando las propiedades de la matriz de Lyapunov.

Finalmente, $v(l_N)$ se puede expresar en una forma cuadrática dada por

$$v_0(l_N) = \widehat{\varphi}^T \Lambda_N \widehat{\varphi}.$$

Aquí, la matriz Λ_N es una matriz a bloques y esta conformada por \mathcal{M}_k , \mathcal{N}_k , \mathcal{P}_l , \mathcal{Q}_l , \mathcal{R}_l . El error de la aproximación lineal a pedazos admite la cota

$$\|\eta_N(s + \theta_j)\| \leq \frac{1}{2} K^2 (-s)(s + \Delta), \quad s \in [-\Delta, 0],$$

para todo $j = \overline{0, N-1}$. Ahora, se denota

$$\Upsilon_N = v_0(\varphi) - v_0(l_N) = v_0(\varphi) - \widehat{\varphi}^T \Lambda_N \widehat{\varphi}.$$

Entonces, es posible probar que el error de la funcional aproximada es acotado por

$$|\Upsilon_N| \leq \delta_N = \frac{c_1}{N^2} + \frac{c_2}{N^4},$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{6} K^2 h^3 (M_1 + hM_2), \quad c_2 = \frac{1}{144} K^4 h^6 M_2$$

$$M_1 = \max_{\theta \in [0, h]} \|U^T(\theta) A_1\|, \quad M_2 = \max_{\theta \in [-h, h]} \|A_1^T U(\theta) A_1\|.$$

Esto conduce a la siguiente condición suficiente y necesaria de estabilidad:

Teorema 3.3. El sistema (1) es exponencialmente estable, si y solo si la condición de Lyapunov se mantiene y

$$\min_{\|\widehat{\varphi}_0\|=1, \|\widehat{\varphi}_j\| \leq 1, j=\overline{1, N}} \widehat{\varphi}^T \Lambda_{N^*+1} \widehat{\varphi} > 0, \quad (11)$$

con

$$N^* = \left\lceil \sqrt{\frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4a_0 c_2}}{2a_0}} \right\rceil.$$

4. ANÁLISIS COMPARATIVO SOBRE PROBLEMAS DE REFERENCIA NUMÉRICAS

Se presentan los resultados obtenidos a través de los tres métodos anteriormente descritos, aplicados a dos ejemplos. El cálculo de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardos asociada a la matriz simétrica $W = I$ se obtiene mediante el método semianalítico (Kharitonov (2013)). Las fronteras de estabilidad/inestabilidad se obtienen analíticamente mediante método de D-Particiones (Neimark, 1949). La implementación numérica de los tres criterios de estabilidad fue realizada en Matlab R2021a, en el equipo Lenovo Y530, intel i7 a 2.20 GHz con 16 GB de RAM.

Se analiza el sistema (1) estudiado en Bajodek et al. (2022) con un retardo y se definen las matrices

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(10+K) & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Los criterios de estabilidad son evaluados para valores de $(K, h) \in \mathcal{D}_1 = \{(K, h) : -4 \leq K \leq 10, 0 \leq h \leq 20\}$ y los resultados son representados en el plano de parámetros como se muestra en la Figura 1.

4.2 Ejemplo 2

Se considera el sistema (1) presentado en Gomez et al. (2019) con

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & p \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde p es un parámetro de diseño. Los resultados de la evaluación del conjunto $(p, h) \in \mathcal{D}_2 = \{(p, h) : -10 \leq p \leq 10, 0 \leq h \leq 2\}$ se muestra en la Figura 2. Para el Ejemplo 1 y 2, la Tabla 1 compara valores de \hat{r} , \mathbf{n}^* y N^* calculados para algunos valores extraídos de los respectivos conjuntos. En la Tabla 2 se incluye el tiempo de cómputo requerido por cada criterio para obtener (de forma práctica) la región exacta de estabilidad. Para ambos ejemplos, en las figuras 1 y 2, los puntos en el plano de parámetros representan las configuraciones de valores para las que se cumple la positividad de las matrices

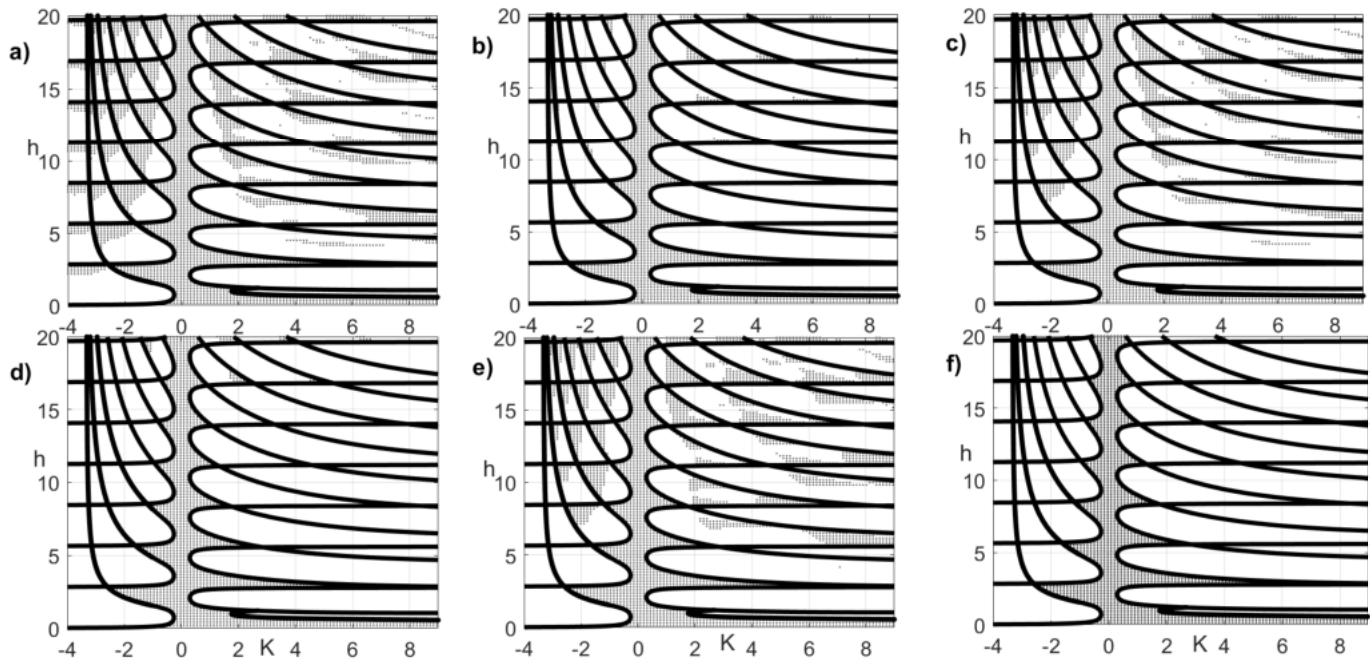


Fig. 1. Ejemplo 1: condición (8) con a) $r = 1$, b) $r = 2$; condición (10) con c) $n = 1$, d) $n = 10$; condición (11) con e) $N = 3$ y f) región exacta de estabilidad.

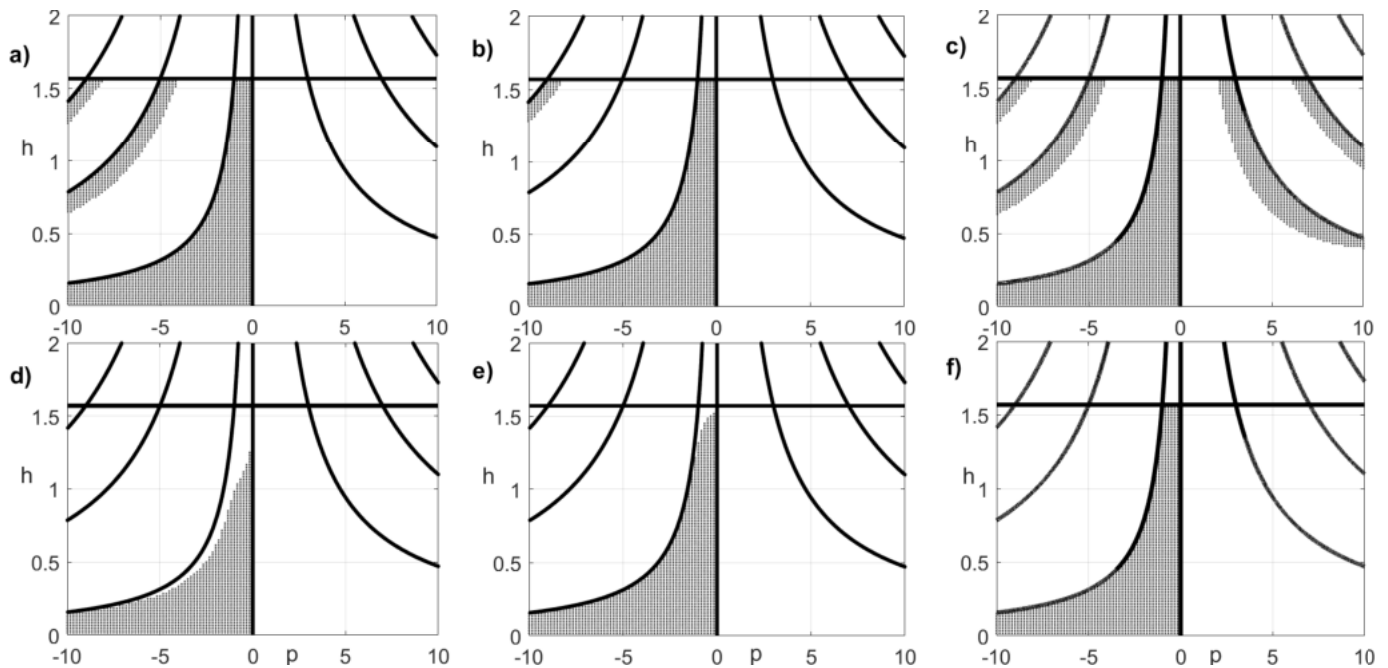


Fig. 2. Ejemplo 2: condición (8) con a) $r = 3$, b) $r = 5$; condición (10) con c) $n = 1$, condición (11) con d) $N = 2$, e) $N = 10$ y f) región exacta de estabilidad.

K_r , \mathbf{P}_n y Λ_N respectivamente. La evaluación de cada uno de los criterios es realizada con diferentes grados de precisión en las aproximaciones de la condición inicial. Esto es, elevando progresivamente los valores de r , \mathbf{n} y N , respectivamente. De forma práctica, en la Figura 1f y 2f, los criterios expresados en (8) y (10) alcanzan la suficiencia, mientras que el criterio expresado en (11) alcanza la necesidad y, por tanto, de acuerdo con los teoremas 3.1, 3.2 y 3.3, se concluye que el sistema es exponencialmente estable en esos puntos del plano de parámetros. Las líneas continuas en el plano representan las D-particiones del sistema.

Tabla 1. Comparación de \hat{r} , \mathbf{n}^* y N^* para alcanzar las condiciones necesarias y suficientes.

Ejemplo 1					
Parámetros		M1	M2	M3	
h	K	\hat{r}	\mathbf{n}^*	N^*	Resultado
0.05	-3.8167	59076348	10	8	Inestable
0.05	-3.45	52305741	10	9	Inestable
0.15	5	7.3e+55	19	25	Estable
0.1	2	2.1e+16	13	8	Estable
Ejemplo 2					
h	p	\hat{r}	\mathbf{n}^*	N^*	Resultado
0.8	-1	2180	8	2	Estable
0.5	-0.6	156	6	1	Estable
0.2	4	861	7	1	Inestable
1	-4	370811927	18	14	Inestable

M1: método de Gomez et al. (2019); M2: método de Bajodek et al. (2022) y M3: método de Alexandrova (2022)

Tabla 2. Comparación en tiempos de cómputo.

Ejemplo 1					
M1		M2		M3	
r	Tiempo (s)	\mathbf{n}	Tiempo (s)	N	Tiempo (s)
3	5.836	25	585.881	15	139.338
Ejemplo 2					
6	5.3951241	3	12.9813327	35	4094.095

M1: método de Gomez et al. (2019); M2: método de Bajodek et al. (2022) y M3: método de Alexandrova (2022).

4.3 Discusión

Es evidente que los valores de \hat{r} , \mathbf{n}^* y N^* dependen del retardo y de los parámetros del sistema. Además, a través de los ejemplos analizados, los valores de \mathbf{n}^* y N^* son significativamente más pequeños que los valores obtenidos para \hat{r} , como se muestra en la Tabla 1.

Es importante remarcar que el cálculo de la matriz $\mathbf{P}_{\mathbf{n}^*}$ y Λ_{N^*} requiere de un mayor tiempo de cómputo en comparación con K_r . Sin embargo, al resultar el valor de \hat{r} mayor que el respectivo valor de \mathbf{n}^* para la misma configuración de parámetros, el tiempo de cómputo final de $\mathbf{P}_{\mathbf{n}^*}$ es mucho menor que el de K_r . En comparación con el cómputo de la matriz Λ_{N^*+1} , el tiempo de ejecución en esta matriz es menor que el consumido por $\mathbf{P}_{\mathbf{n}^*}$. Esto debido a que el cálculo de integrales de la matriz de Lyapunov se calcula de manera recursiva usando sus propiedades.

Finalmente, se recalca que los valores de \hat{r} , \mathbf{n}^* y N^* utilizados en la práctica para alcanzar la suficiencia y necesidad de las condiciones son significativamente más pequeños que los obtenidos analíticamente. La principal diferencia entre las condiciones de estabilidad comparadas en este trabajo surge del conservatismo que cada una de ellas presenta. Una de las causas de esto, es el uso de la constante M (presente en todos los métodos), que es una cota demasiado grande. Adicional a esto, los resultados alternativos basados en relaciones recursivas para el cálculo de los términos integrales, pueden inducir errores numéricos que incrementan con la dimensión de \mathbf{n} y N , comprometiendo los resultados de estabilidad de dichos criterios.

REFERENCES

- Alexandrova, I.V. (2022). A finite lyapunov matrix-based stability criterion via piecewise linear approximation. *Submitted to MTNS 2022*.
- Bajodek, M., Gouaisbaut, F., and Seuret, A. (2022). Necessary and sufficient stability condition for time-delay systems arising from legendre approximation. *Hal-03435028v2*.
- Egorov, A.V. (2014). A new necessary and sufficient stability condition for linear time-delay systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3), 11018–11023.
- Egorov, A.V. (2016). A finite necessary and sufficient stability condition for linear retarded type systems. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, 3155–3160. IEEE.
- Egorov, A.V. and Mondié, S. (2014). Necessary stability conditions for linear delay systems. *Automatica*, 50(12), 3204–3208.
- Egorov, A. and Mondié, S. (2014b). Necessary conditions for the exponential stability of time-delay systems via the lyapunov delay matrix. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(12), 1760–1771.
- Gomez, M.A., Egorov, A.V., and Mondié, S. (2019). Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems. *Automatica*, 108, 108475.
- Kharitonov, V.L. (2013). *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Basel: Birkhäuser.
- Kharitonov, V.L. and Zhabko, A.P. (2003). Lyapunov–krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39(1), 15–20.
- Krasovskii, N. (1956). On the application of the second method of lyapunov for equations with time delays. *Prikl. Mat. Mekh*, 20(3), 315–327.
- Medvedeva, I.V. and Zhabko, A.P. (2013). Constructive method of linear systems with delay stability analysis. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(3), 1–6.
- Mondié, S., Egorov, A.V., and Gomez, M.A. (2018). Stability conditions for time delay systems in terms of the lyapunov matrix. *IFAC-PapersOnLine*, 51(14), 136–141.
- Neimark, J. (1949). D-subdivisions and spaces of quasipolynomials. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 13(5), 349–380.