

A Novel Finite-Time Controller for the Tracking Problem on the Heisenberg System

Manuel Mera* Héctor Ríos**,*** Andrey Polyakov****

* *ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México. E-mail: mmerah@ipn.mx*

** *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México. E-mail: hríos@correo.itlalaguna.edu.mx*

*** *CONACYT, C.P. 03940, CDMX, México.*

**** *INRIA, Univ. Lille, CNRS, UMR 9189-CRISTAL, F-59000, Lille, France. E-mail: andrey.polyakov@inria.fr*

Abstract: In this paper, a novel second-order sliding-mode controller for the tracking problem on the Heisenberg system is proposed. The controller design takes into account a nonlinear change of coordinates and the selection of some particular sliding variables. These, ensure the tracking error convergence to zero in a finite time. One important characteristic of this design is the simplicity of the controller structure and the ease for tuning the gains and parameters. Additionally, the implementability of the approach is illustrated through some simulation results.

Keywords: Sliding-Mode Control, Heisenberg System, Nonholonomic Systems

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas no holónomos se han estudiado a profundidad en las últimas décadas, principalmente por el desarrollo de nuevas aplicaciones involucrando robots móviles (Li et al., 2020), motores de inducción (Ortega et al., 1998), barcos y vehículos marinos (Ghomam et al., 2010), así como otros vehículos no convencionales (Lambert et al., 2020; Takahashi et al., 2022). Otra razón importante por la que se han estudiado los sistemas no holónomos, es debido a que esta clase de sistemas no satisfacen la conocida condición necesaria de Brockett para la estabilización por realimentación suave (Brockett, 1982), por lo que el diseño de controles no suaves y variantes en el tiempo resulta no solamente interesante desde el punto de vista teórico, sino necesario para la regulación de esta clase de sistemas.

El sistema de Heisenberg, llamado de esta manera debido a que su campo vectorial genera el álgebra de Heisenberg (Vershik and Gershkovich, 1988; Bloch, 2003), también conocido como el integrador no holónimo, es un sistema no lineal difeomórfico a muchos modelos de sistemas físicos, algunos ejemplos de éstos se pueden encontrar en (Defoort et al., 2009; Rehan et al., 2019). Por esta razón, el sistema de Heisenberg y su forma canónica encadenada (Murray et al., 1994), se usan de manera frecuente como referencia para el diseño de controladores y el análisis de estabilidad

de sistemas no holónomos *e.g.*, (Marchand and Alamir, 2003; Defoort and Djemaï, 2010; Rocha et al., 2022).

Además, el problema de seguimiento para esta clase de sistemas aún representa un reto. Desde el punto de vista de la ingeniería, el problema de seguimiento en los sistemas no holónomos ha sido de particular interés debido a que muchas tareas que involucran robots móviles, tales como persecución, patrullaje y formación, requieren de controladores que aseguren el seguimiento preciso de las trayectorias dadas o calculadas. Por lo tanto, el desarrollo de controladores que aseguren la convergencia del error de seguimiento al origen en Tiempo-Finito (TF) ha resultado crítico (Shi et al., 2018; Thomas et al., 2018)

Una propiedad sobresaliente del enfoque de control por modos deslizantes, aunada a su naturaleza no suave, es la posibilidad de garantizar convergencia en TF y robustez a los sistemas en lazo cerrado. Por lo cual, se ha utilizado ampliamente para resolver los problemas de estabilización y seguimiento para esta clase de sistemas, por ejemplo (Bloch and Drakunov, 1996; Floquet et al., 2004; Mera et al., 2020).

Algunos resultados que consideran el enfoque de control por modos deslizantes para resolver el problema de seguimiento en esta clase de sistemas, incluyen el uso de modos deslizantes integrales (Defoort et al., 2009), el algoritmo de *super-twisting* (Rochel et al., 2022), y el algoritmo de

super-twisting modificado (Defoort and Djemaï, 2013). En general, el diseño de controladores por modos deslizantes involucra la selección metódica de las variables de deslizamiento así como de las ganancias. En este sentido, la mayoría de los resultados mencionados con anterioridad requieren la selección de varios parámetros o la solución de desigualdades lineales matriciales para obtener el diseño del controlador. En cambio, en este trabajo se presenta un controlador por modos deslizantes de segundo orden simple de sintonizar y con pocos parámetros que resuelve el problema de seguimiento en TF y globalmente para el sistema de Heisenberg.

Las principales ventajas de este enfoque se pueden resumir en:

- El control resultante asegura convergencia global y uniforme en TF del error de seguimiento al origen, para cualquier trayectoria deseada que satisfaga las restricciones no holónomas del sistema.
- La sencillez de la estructura del controlador facilita su implementación, esto incluye la selección de los parámetros y la sintonización.
- El esquema de control se puede aplicar directamente a muchos sistemas físicos con ajustes mínimos.

La estructura restante del artículo es la siguiente. Algunas definiciones relevantes y nociones teóricas importantes se pueden encontrar en la Sección 2 La exposición del problema se puede encontrar en la Sección 3. En la Sección 4, se presenta el diseño propuesto para el controlador. En la sección 5, se incluye un simulación de una posible implementación del esquema de control. Finalmente, algunos comentarios finales y una breve discusión de las posibles extensiones de este resultado se dan en la Sección 6.

Notación: Se denotan las funciones trigonométricas $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$, $\arcsin(\theta)$ y $\arctan(\theta)$ como $s(\theta) := \sin(\theta)$, $c(\theta) := \cos(\theta)$, $\arcs(\theta) := \arcsin(\theta)$ y $\arct(\theta) := \arctan(\theta)$, respectivamente. Se define $|s|^\gamma := |s|^\gamma \text{sign}(s)$, para $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y cualquier $s \in \mathbb{R}$.

2. PRELIMINARES

Considerando el sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado. La función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se asume local uniformemente acotada en t . Para f localmente medible pero discontinua respecto a x , las soluciones se entienden en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). Esto es, $x(t, x_0)$ es una solución de (1) si es absolutamente continua, y si satisface la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in K[f](t, x) = \overline{\text{co}} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu N = 0} f(t, B(x, \varepsilon) \setminus N),$$

donde $\overline{\text{co}}(M)$ representa la cerradura convexa del conjunto M , $B(x, \varepsilon)$ representa una bola centrada en x con radio ε , μ es la medida de Lebesgue. Notando que las intersecciones se toman sobre todos los conjuntos N de medida cero, para todo $\varepsilon > 0$.

Definición 1. (Orlov, 2004), (Zimenko et al., 2018). Sea el origen un equilibrio de (1). Entonces, el sistema (1) es Global Uniformemente Estable en Tiempo-Finito (GUETF) si satisface:

- Estabilidad de Lyapunov: existe una función $\alpha \in \kappa$ tal que $\|x(t, x_0)\| \leq \alpha(\|x_0\|)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
- Atractividad en Tiempo-Finito: existe una función localmente acotada $T : \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $x(t, x_0) = 0$, para todo $t \geq T(x_0)$ y cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La dinámica del sistema de Heisenberg está dada por las siguientes ecuaciones

$$\dot{x} = u_1, \quad (2a)$$

$$\dot{y} = u_2, \quad (2b)$$

$$\dot{z} = xu_2 - yu_1, \quad (2c)$$

donde $X = (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ es el estado del sistema, y las entradas de control están dadas por $U = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Notando que la ecuación de estado (2c) es de hecho una restricción no holónoma

$$\dot{z} - x\dot{y} + y\dot{x} = 0.$$

Para el problema de seguimiento, las trayectorias de referencia factibles $X_d \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^3)$ para el sistema (2), requieren que se satisfaga la restricción no holónoma correspondiente para $X_d = (x_d, y_d, z_d)^\top$, i.e.,

$$\dot{z}_d - x_d \dot{y}_d + y_d \dot{x}_d = 0. \quad (3)$$

Adicionalmente a la restricción no holónoma, se asume que existen constantes positivas, $\bar{v}_{1d}$, $\underline{v}_{2d}$ y $\bar{v}_{2d}$, tales que

$$|\dot{x}_d(t)| \leq \bar{v}_{1d}, \quad (4a)$$

$$0 < \underline{v}_{2d} \leq |(z_d(t) - x_d(t)y_d(t))\dot{x}_d(t) - 2\dot{y}_d(t)| \leq \bar{v}_{2d}, \quad (4b)$$

para todo $t \geq 0$. Estas cotas son sólo condiciones sobre las trayectorias factibles para el caso de seguimiento.

Dada una trayectoria factible $X_d \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^3)$, para unas condiciones iniciales $X(0) = X_0$, se define el error de seguimiento como $E := X - X_d$. Entonces, el problema de seguimiento en TF para el sistema de Heisenberg se puede plantear como el diseño de una señal de control U , tal que $\|E(t)\| = 0$, para todo $t \geq T_s$, con $T_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

4. DISEÑO DEL CONTROL PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

4.1 Transformación de Coordenadas

Con el fin de facilitar el diseño de las superficies se propone la siguiente transformación no lineal de estados y entradas (Bloch, 2003)

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2yc(x) + (z - xy)s(x) \\ 2ys(x) + (z - xy)c(x) \end{pmatrix}, \quad (5a)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ (z - xy)u_1 - 2u_2 \end{pmatrix}. \quad (5b)$$

Es posible mostrar que tal transformación es global y biyectiva puesto que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\frac{1}{2}(\xi_2 c(\xi_1) + \xi_3 s(\xi_1)) \\ \frac{1}{2}\xi_1(\xi_2 c(\xi_1) + \xi_3 s(\xi_1)) - \xi_2 s(\xi_1) + \xi_3 c(\xi_1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -\frac{1}{2}(v_2 + (z - xy)v_1) \end{pmatrix},$$

está bien definida para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3$. Entonces, la dinámica en las nuevas coordenadas ξ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= v_1, \\ \dot{\xi}_2 &= v_2 c(\xi_1), \\ \dot{\xi}_3 &= v_2 s(\xi_1). \end{aligned}$$

Para el problema de seguimiento, se considera una trayectoria deseada generada en las coordenadas $\xi \in \mathbb{R}^3$, por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{1d} &= v_{1d}, \\ \dot{\xi}_{2d} &= v_{2d} c(\xi_{1d}), \\ \dot{\xi}_{3d} &= v_{2d} s(\xi_{1d}), \end{aligned}$$

para unas entradas de referencia $v_{1d} \in \mathbb{R}$ y $v_{2d} \in \mathbb{R}_+$, las cuales de acuerdo a (4), satisfacen $|v_{1d}(t)| \leq \bar{v}_{1d}$ y $0 < \underline{v}_{2d} < v_{2d}(t) \leq \bar{v}_{2d}$, para todo $t \geq 0$. Entonces, el vector de error de seguimiento $e = (e_1, e_2, e_3)^\top$ en las nuevas coordenadas se puede definir como

$$\begin{aligned} e_1 &= \xi_{1d} - \xi_1, \\ e_2 &= (\xi_{2d} - \xi_2) c(\xi_1) + (\xi_{3d} - \xi_3) s(\xi_1), \\ e_3 &= (\xi_{3d} - \xi_3) c(\xi_1) - (\xi_{2d} - \xi_2) s(\xi_1), \end{aligned}$$

y por lo tanto, las dinámicas del error de seguimiento son

$$\dot{e}_1 = \tau_1, \quad (6a)$$

$$\dot{e}_2 = v_1 e_3 + \tau_2, \quad (6b)$$

$$\dot{e}_3 = -v_1 e_2 + v_{2d} s(e_1), \quad (6c)$$

donde se definen las entradas de control virtual τ_1 y τ_2 como

$$\tau_1 = v_{1d} - v_1, \quad (7a)$$

$$\tau_2 = v_{2d} c(e_1) - v_2. \quad (7b)$$

4.2 Diseño de las Variables Deslizantes

En el diseño del controlador para el problema de seguimiento, se consideran las siguientes variables deslizantes

$$s_1 = e_1 + \left[|e_1|^2 + k_3 \arcs \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} \arctan(e_3) \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (8a)$$

$$s_2 = e_2, \quad (8b)$$

con $k_3 > 0$. Entonces las entradas de control virtual, τ_1 y τ_2 se diseñan como

$$\tau_1 = -(v_{2d}(t)|e_3| + k_1(t)) [s_1]^0, \quad (9a)$$

$$\tau_2 = -(v_1 e_3 + k_2) [s_2]^0, \quad (9b)$$

donde los parámetros k_1 y k_2 se diseñan más adelante.

Observación 1. El modo deslizante en la superficie $s_1 = 0$, impone una relación particular entre e_1 y e_3 . La dinámica restringida de e_1 en la superficie $s_1 = 0$, respecto a e_3 , genera una entrada de control virtual a través del término $s(e_1)$ que permite llevar a e_3 hacia cero en TF.

El siguiente Teorema da las condiciones para la selección de las ganancias con el objetivo de alcanzar GUETF.

Teorema 1. Sean las entradas de control (9), con las variables deslizantes (8), aplicadas a las dinámicas del error de seguimiento del sistema de Heisenberg (6). Si los parámetros del controlador se diseñan como

$$k_1(t) = \frac{k_3 v_{2d}(t)}{\pi}, \quad (10)$$

$$k_2 > 0, \quad (11)$$

$$k_3 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right], \quad (12)$$

entonces, para una trayectoria deseada satisfaciendo (3), el sistema (6) es GUETF.

Por lo tanto, tomando en cuenta el diseño de las entradas de control virtual (9) y las expresiones dadas en (7), las entradas de control real u_1 y u_2 se diseñan como:

$$u_1 = \tau_1 - v_{1d}(t), \quad (13a)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} [\tau_2 + (z - xy)u_1 - v_{2d}(t)c(e_1)]. \quad (13b)$$

Observación 2. Es claro que la GUETF del sistema (6) con las entradas de control (13) implica, por la biyectividad de la transformación (5), que si $e(t) = 0$ para todo $t \geq T$ y alguna $T < \infty$, entonces $X(t) = X_d(t)$ para todo $t \geq T$.

Es importante recalcar que el controlador propuesto (13) es discontinuo, esto puede representar un problema potencial dependiendo de la aplicación. Sin embargo, es posible implementar este control aproximando la función sign por una función continua. Una función conocida que se ha empleado con este objetivo es la siguiente

$$[s]^0 \approx \frac{s}{|s| + \delta},$$

donde el parámetro $\delta > 0$ es una constante muy pequeña.

5. SIMULACIONES

Las simulaciones se llevaron a cabo en MATLAB usando el método de discretización de Euler con un paso de integración de 0.001[s]. La trayectoria deseada a seguir se generó a partir de la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -0.1s(t), \\ \dot{y}_d &= -0.1c(0.5t) - 0.5, \end{aligned}$$

junto con la relación dada para $\dot{z}$ de la ecuación (3), y las condiciones iniciales $X_d(0) = (0, 0, 0)^\top$.

Las condiciones iniciales seleccionadas para el sistema de Heisenberg son $X(0) = (0.2, 0.5, 1)^\top$. Mientras que, las entradas de control u_1 y u_2 se diseñaron de acuerdo a (13), con las ganancias dadas por el Teorema 1 con $k_3 = \pi/8$, $k_2 = 0.1$ y k_1 de acuerdo a (10). Las señales de control se muestran en las Figuras 1 y 2.

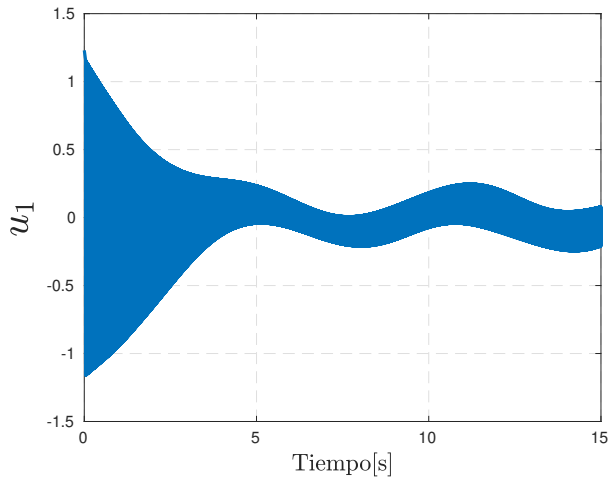


Figura 1. Entrada de Control u_1

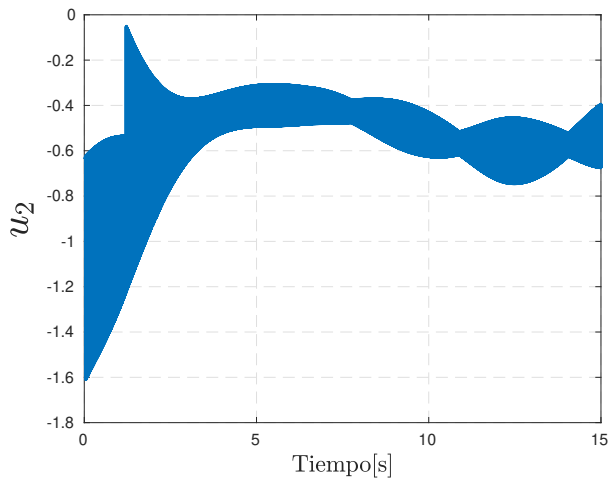


Figura 2. Entrada de Control u_2

El error de seguimiento del sistema en las coordenadas originales se presenta en la Figura 3. La comparación entre las trayectorias deseadas y la generada por el sistema se muestra en la Figura 5. Finalmente las variables deslizantes se presentan en la Figura 6.

Los resultados de las simulaciones ilustran claramente las propiedades de convergencia en TF del controlador por modos deslizantes de segundo orden propuesto, con las ganancias dadas en el Teorema 1. Adicionalmente, se recalca que la sintonización de los parámetros del controlador es muy sencilla pues basta con seleccionar la ganancia k_3 dentro del rango dado en el Teorema 1 y cualquier valor positivo para la ganancia k_2 . La ganancia k_1 no requiere de sintonización.

6. CONCLUSIÓN

Se propuso un controlador para el problema de seguimiento de trayectorias en sistema de Heisenberg. El diseño está

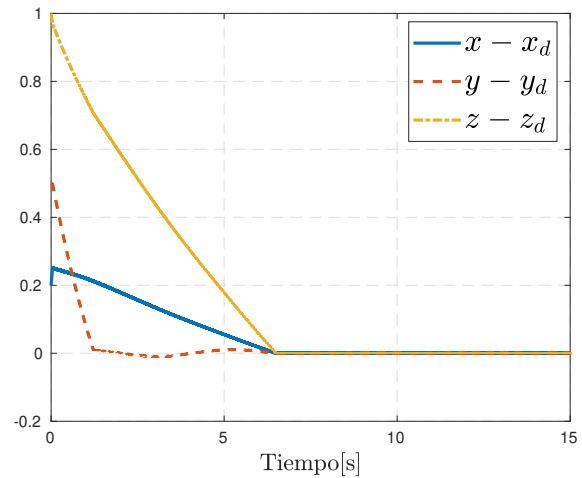


Figura 3. Error de Seguimiento.

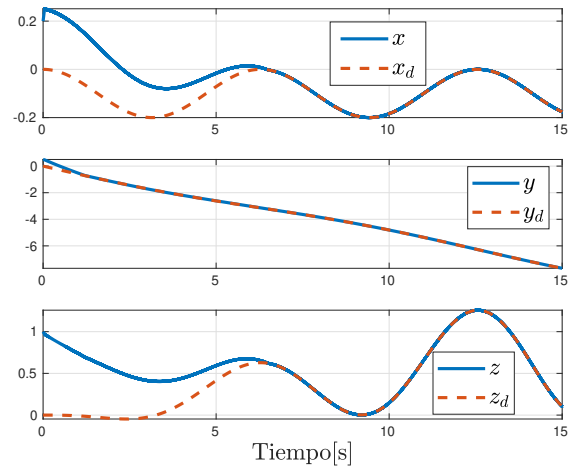


Figura 4. Trayectorias Deseadas vs Trayectorias del Sistema por Coordenada

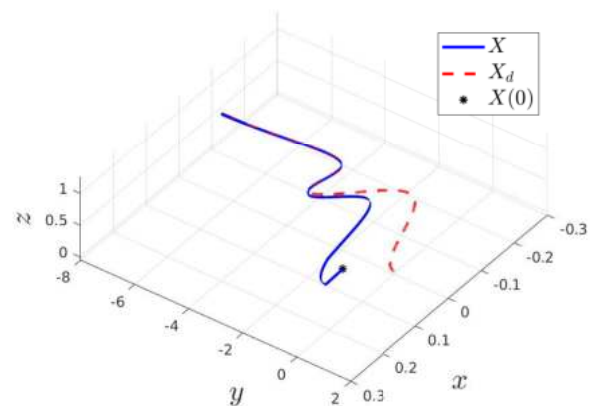


Figura 5. Trayectoria Deseada vs Trayectoria del Sistema

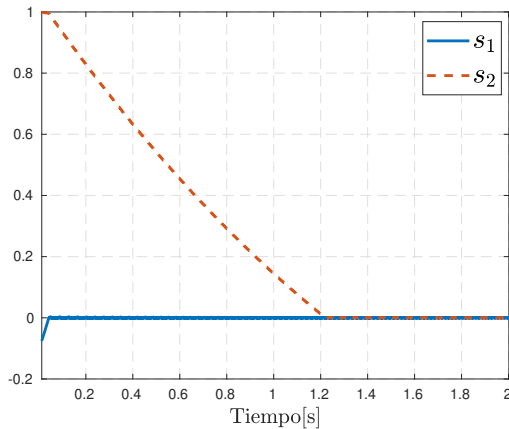


Figura 6. Variables Deslizantes

basado en el enfoque por modos deslizantes, considerando dos variables deslizantes. El controlador resultante asegura la convergencia de las trayectorias del sistema a cualquier trayectoria deseada factible en tiempo finito. El trabajo a futuro incluye el desarrollo de una versión robusta de este controlador considerando perturbaciones aditivas (término de arrastre) y multiplicativas (incertidumbres paramétricas), así como la implementación en sistemas físicos difeomórficos al sistema de Heisenberg.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado en parte por el proyecto SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597 y el proyecto ECOS NORD M20M04. El trabajo de Manuel Mera fue apoyado en parte por el proyecto IPN-SIP 20220241. El trabajo de Héctor Ríos fue apoyado en parte por CONACYT Programa de Investigadoras e Investigadores por México CVU 270504 Proyecto 922 y en parte por Proyectos TecNM.

REFERENCIAS

Bloch, A. and Drakunov, S. (1996). Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding modes. *Systems & Control Letters*, 29(2), 91–99.

Bloch, A.M. (2003). Nonholonomic mechanics. In *Nonholonomic mechanics and control*, 207–276. Springer.

Brockett, R.W. (1982). Control theory and singular riemannian geometry. In *New directions in applied mathematics*, 11–27. Springer.

Defoort, M. and Djemaï, M. (2010). Finite-time controller design for nonholonomic mobile robot using the heisenberg form. In *2010 IEEE International Conference on Control Applications*, 1269–1274. IEEE.

Defoort, M. and Djemaï, M. (2013). A Lyapunov-based design of a modified super-twisting algorithm for the heisenberg system. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 30(2), 185–204.

Defoort, M., Floquet, T., Perruquetti, W., and Drakunov, S.V. (2009). Integral sliding mode control of an extended

heisenberg system. *IET control theory & applications*, 3(10), 1409–1424.

Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers.

Floquet, T., Drakunov, S.V., and Perruquetti, W. (2004). Sliding mode control of extended heisenberg systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(13), 609–614.

Ghommam, J., Mnif, F., and Derbel, N. (2010). Global stabilisation and tracking control of underactuated surface vessels. *IET control theory & applications*, 4(1), 71–88.

Lambert, N.O., Schindler, C.B., Drew, D.S., and Pister, K.S. (2020). Nonholonomic yaw control of an underactuated flying robot with model-based reinforcement learning. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 6(2), 455–461.

Li, L., d’Andrea-Novell, B., and Quadrat, A. (2020). Longitudinal and lateral control for four wheel steering vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 15713–15718.

Marchand, N. and Alamir, M. (2003). Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *Automatica*, 39(2), 343–348.

Mera, M., Ríos, H., and Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102, 104548.

Murray, R.M., Li, Z., and Sastry, S.S. (1994). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press.

Orlov, Y. (2004). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4), 1253–1271.

Ortega, R., Perez, J.A.L., Nicklasson, P.J., and Sira-Ramirez, H.J. (1998). *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer Science & Business Media.

Rehan, M., Reyhanoglu, M., and van Steen, J. (2019). Trajectory tracking of a knife-edge on a flat surface. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, 1648–1652. IEEE.

Rocha, E., Castaños, F., and Moreno, J.A. (2022). Robust finite-time stabilisation of an arbitrary-order nonholonomic system in chained form. *Automatica*, 135, 109956.

Rochel, P., Ríos, H., Mera, M., and Dzul, A. (2022). Trajectory tracking for uncertain unicycle mobile robots: A super-twisting approach. *Control Engineering Practice*, 122, 105078.

Shi, S., Xu, S., Yu, X., Li, Y., and Zhang, Z. (2018). Finite-time tracking control of uncertain nonholonomic systems by state and output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(6), 1942–1959.

Takahashi, Y., Sakamoto, H., and Sakai, S. (2022). Kinematics control of electromagnetic formation flight using angular-momentum conservation constraint. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 45(2), 280–295.

Thomas, M., Bandyopadhyay, B., and Vachhani, L. (2018). A finite-time sliding mode observer for a class of perturbed nonholonomic systems. In *IECON 2018-44th*

Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 2165–2170. IEEE.

Vershik, A. and Gershkovich, V.Y. (1988). Nonholonomic problems and the theory of distributions. *Acta Applicandae Mathematica*, 12(2), 181–209.

Zimenko, K., Polyakov, A., and Efimov, D. (2018). On finite-time robust stabilization via nonlinear state feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(16), 4951–4965.