

Observer-based supervision of the cardiovascular system with delayed measurements

F. Ramírez-Rasgado^{*,***} O. Hernández-González^{**}
C.M. Astorga-Zaragoza^{*} M. Farza^{***} O. Barreto-Arenas^{*}
M.E. Guerrero-Sánchez^{**}

^{*} *Tecnológico Nacional de México/ Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico*

^{**} *CONACYT-Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., México.*

^{***} *NORMANDIE UNIV, UNICAEN, ENSICAEN, LIS (UR 7478), 14000 Caen, Francia.*

Abstract: This paper presents the design of a chain observer for monitoring the cardiovascular system. The system presents delays in the measured output. The chain observer proposed in this work is capable of estimating the free-delay state vector. The structure of the observer consists of two subsystems: the first subsystem at the base estimates the state vector with delay and by means of the second subsystem it is possible to estimate the delay-free state vector. The proposed observer is applied for monitoring the dynamics of the cardiovascular system by obtaining the estimation of the state vector that is not available and reconstructing the output signal.

Keywords: Cardiovascular system, Delayed output, Linear system, Chain observer.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente las enfermedades cardiovasculares y los accidentes cerebrovasculares son la principal causa de mortalidad a nivel mundial Roth et al. (2020). A pesar de que se ha avanzado en las investigaciones para el diagnóstico y tratamiento de las enfermedades cardiovasculares, aún existe la necesidad de investigar y desarrollar nuevas tecnologías que contribuyan a la prevención, diagnóstico y tratamiento de estas enfermedades Zhou et al. (2018).

En los últimos años se han realizado investigaciones y aportaciones relevantes referentes al estudio de los modelos matemáticos que representan las dinámicas del corazón y a la aplicación de observadores a dichos modelos, con el propósito de llevar a cabo la supervisión de la actividad cardíaca y así obtener herramientas que detecten anomalías en el sistema cardiovascular. La implementación de observadores de estado en sistemas biológicos, ha sido una importante aportación desde el área de control automático, debido a que es posible supervisar las variables de interés en línea y a bajo costo. En Ghasemi et al. (2020) se presenta el desarrollo de un observador de entrada desconocida para la deconvolución de entrada en sistemas multicanal, se considera un caso de estudio para la estimación de la forma de onda de la presión aórtica central a partir de dos formas de onda del

pulso arterial periférico adquiridas de forma no invasiva. En Astorga-Zaragoza (2019) se presenta un observador de estados de entradas desconocidas, para supervisar el sistema cardiovascular. Se utiliza el modelo windkessel, presentado en espacio de estados en forma singular, el observador, es capaz de estimar la distensibilidad arterial y el flujo sanguíneo a través de la inercia arterial total, a partir de la medición de la presión aórtica. En Serrano-Cruz et al. (2018) se presenta el diseño de un observador singular de orden completo con el propósito de estimar la presión sistémica, la presión aórtica y el flujo aórtico del corazón. Se utiliza el modelo Windkessel de cuatro elementos en su representación de espacio de estados que describe la dinámica del corazón. En Belkhatir et al. (2014) y Ledezma and Laleg-Kirati (2015) se presenta un modelo de parámetros agrupados, representado en espacio de estados y mediante la generación de residuos por filtro de Kalman extendido, se lleva a cabo la detección de las anomalías, considerando la apertura y cierre anormales de la válvula y algunas variaciones de las resistencias vasculares. Si bien los observadores, utilizados para reconstruir los estados del sistema, han sido de gran utilidad para la supervisión y detección de anomalías, no se ha profundizado en la implementación de observadores para sistemas con retardo de tiempo.

Sin embargo, en los sistemas se presentan retardos por diversas causas: transmisión de datos, inercias no modeladas, redes de comunicación, medición por los sensores, por decir algunas. Estos se pueden presentar en la dinámica del sistema, salidas, entradas. Algunos ejemplos se muestran en (Farza et al., 2017; Borri et al., 2017; Ramírez-Rasgado et al., 2021; Farza et al., 2016).

Este artículo se enfoca en un esquema de supervisión de las dinámicas de un sistema cardiovascular a partir de las mediciones obtenidas en presencia de retardo de tiempo. El modelo del sistema cardiovascular se presenta en la sección 2, donde se considera la señal de salida considerando un caso práctico, es decir, se considera un retardo de medición presente en ella. La principal aportación de este trabajo se presenta en la Sección 3, donde se muestra el observador en cadena, este observador consta de dos subsistemas que logran la estimación del vector de estado de un sistema incluso cuando es alimentado con la señal en presencia de retardo. En esta sección se proponen los teoremas necesarios para asegurar la convergencia de los subsistemas que lo conforman y asegurar la convergencia al vector de estado libre de retardo. Posteriormente, en la Sección 4, se evalúa el desempeño del observador en cadena propuesto mediante la estimación del vector de estado de un sistema cardiovascular, con esto es posible supervisar sus dinámicas libres de retardo, aunque la medición de salida original está afectada por un retardo. Las conclusiones de este trabajo se presentan en la Sección 5.

2. MODELO DEL SISTEMA CARDIOVASCULAR

El modelo matemático windkessel propuesto en (Belkhatir et al., 2014), describe las dinámicas del corazón y hace una analogía del corazón con un circuito eléctrico. El voltaje (V) representa la presión arterial (P_{ar}) y la corriente (i) el flujo sanguíneo. La resistencia (R) representa la resistencia de las arterias al flujo sanguíneo, los condensadores (C) describen las propiedades de distensibilidad de la pared arterial y los inductores (L) la inercia sanguínea. Las ecuaciones que modelan matemáticamente la dinámica del corazón son:

$$\begin{aligned} \frac{dP_s(t)}{dt} &= -\frac{1}{RC}P_s(t) + \frac{1}{C}i(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= -\frac{r}{L}i_L(t) + \frac{r}{L}i(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde P_s es la presión sistémica, i_L es el flujo aórtico, R es la resistencia periférica total, C es compliancia de la aorta, $i(t)$ es el flujo sanguíneo, L es la inercia de la sangre, r es la impedancia de la entrada de la aorta. La salida del sistema es la presión arterial denotada por P_{ar} y se obtiene como se muestra a continuación:

$$P_{ar}(t) = P_s(t) + r[i(t) - i_L(t)] \quad (2)$$

2.1 Representación en espacio de estado

Considerando las ecuaciones (1) y (2), es posible representar el sistema en espacio de estados. Para esto se define el siguiente vector $x = [P_s, i_L]^T$, obteniendo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{P}_s \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_s \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{r}{L} \end{bmatrix} i(t) \\ P_{ar}(t) &= [1 \quad -r] \begin{bmatrix} P_s \\ i_L \end{bmatrix} + ri(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde la entrada del sistema es el flujo sanguíneo $u(t) = i(t)$. El sistema anterior en la forma de espacio de estados es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{r}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{r}{L} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad -r], D = [r] \end{aligned} \quad (5)$$

Sin embargo, en la realidad el obtener la salida $y(t)$ de esta forma, utilizando una medición no invasiva es difícil, ya que existe un retardo de tiempo que la afecta debido al tiempo de propagación de la onda de presión del corazón, hasta que el flujo es detectado por el dispositivo de medición como lo menciona Sharir et al. (1993). Por lo tanto, es necesario tener en consideración este retardo al momento de representar el sistema. Considerando esto el sistema (4), queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y_\tau(t) = Cx(t - \tau) + Du(t - \tau) \end{cases} \quad (6)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $y_\tau(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida con retardo del sistema. Se define $\tau > 0$ como el valor de retardo conocido que afecta a la salida del sistema. Es importante resaltar que el sistema cumple la siguiente suposición:

A1 El par A, C se asume como observable.

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR EN CADENA

En esta sección se presenta el diseño del observador en cadena para la estimación del vector de estado libre de retardo del sistema (6). El observador en cadena consta de dos subsistemas: un observador en la base y un predictor. La ventaja de esta estructura es que permite la estimación del vector libre de retardo, incluso cuando a este le llega la señal con retardo.

Observador de la base:

A continuación, se propone el primer subsistema de la cadena dado por el siguiente observador:

$$\dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + Bu_0(t) - K(\hat{y}_{\tau_0}(t) - y_\tau(t)) \quad (7)$$

donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del observador, $u_0(t) = u(t - \tau)$ y $x_0(t) = x(t - \tau)$ representa la entrada y el vector de estado con retardo, respectivamente. El subíndice $(\cdot)_0$, representa al primer subsistema, es decir, \hat{x}_0 es la estimación del vector de estado por medio de la

base del observador en cadena. De igual forma, la señal de salida del primer subsistema se denota como $\hat{y}_{\tau_0}(t)$. Considerando esto se propone el siguiente teorema:

Teorema 1. Considere el sistema (6), el cual cumple con la suposición **A1**. Entonces, si existe $\mu > 0$, $\rho_0 > 0$ y $\forall \hat{x}(0) \in \mathcal{R}^n$, se tiene el siguiente error de estimación del observador (7):

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \sigma_0 e^{-\alpha_0 t} \|\tilde{x}_0(0)\| \triangleq \rho_0 e^{-\alpha_0 t} \quad (8)$$

donde las constantes positivas son $\sigma_0 = \sqrt{\lambda_M/\lambda_m}$, $\rho_0 = \sigma_0 \|\tilde{x}_0(0)\|$, $\alpha_0 = \frac{2\mu}{\lambda_M}$ y la ganancia del observador K satisface que la matriz $A - KC$ es Hurwitz. Entonces, el error de observación convergerá exponencialmente a cero, es decir, la trayectoria desconocida x_0 será estimada por el observador (7).

3.1 Prueba del Teorema 1

Primeramente se define el error de observación de la base de la cadena como $\tilde{x}_0 = \hat{x}_0 - x_0$, donde x_0 es el vector de estado del sistema con retardo, el cual queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_0(t) &= A x_0(t) + B u_0(t) \\ y_0(t) &= C x_0(t) + D u_0(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto, considerando (9) y (7), se obtiene el error de observación:

$$\dot{\tilde{x}}_0 = (A - KC)\tilde{x}_0 \quad (10)$$

Ahora, se procede a demostrar la estabilidad del observador de la base de la cadena. Para esto, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov $V(\tilde{x}_0, t) = \tilde{x}_0^T(t)P\tilde{x}_0(t)$. Derivando esta función con respecto al tiempo (t), se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{x}_0(t)) = 2\tilde{x}_0^T(t)P\dot{\tilde{x}}_0(t) = 2\tilde{x}_0^T(t)P(A - KC)\tilde{x}_0(t) \quad (11)$$

donde $A - KC$ es Hurwitz tal que existe una matriz P de $n \times n$ simétrica definida positiva (SDP) y $\mu > 0$, tal que:

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) \leq -2\mu I_{n \times n} \quad (12)$$

Considerando que $A - KC$ es Hurwitz y (12), entonces (11) queda:

$$\dot{V}(\tilde{x}_0(t)) \leq -2\mu \|\tilde{x}_0(t)\|^2 \triangleq -\frac{2\mu}{\lambda_M} V(\tilde{x}_0(t))$$

Usando el lema de comparación Khalil (2015), se tiene:

$$V(\tilde{x}_0(t)) \leq e^{-\alpha_0 t} \|\tilde{x}_0(t)\|$$

donde $\alpha_0 = \frac{2\mu}{\lambda_M}$. Regresando a términos del error $\|\tilde{x}_0\|$, se tiene:

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \sigma_0 e^{-\alpha_0 t} \|\tilde{x}_0(0)\| \triangleq \rho_0 e^{-\alpha_0 t}$$

donde $\sigma_0 = \sqrt{\lambda_M/\lambda_m}$ y $\rho_0 = \sigma_0 \|\tilde{x}_0(0)\|$. Es claro que de este análisis se puede asegurar que el error de observación en la base de la cadena convergerá exponencialmente a cero. Con esto se concluye la demostración del Teorema 1. ■

Predictor:

Ahora se procede a demostrar que el último subsistema del observador en cadena convergerá al estado libre de retardo. Este subsistema se llama predictor, el cual estima el estado x_1 que es el vector estado libre de retardo y logra reconstruir el vector del sistema (6). Primeramente se define el sistema x_1 , como se muestra a continuación:

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t) \quad (13)$$

El sistema (13) se puede reescribir como:

$$\dot{x}_1 = \bar{A}x_1 + (A - \bar{A})x_1 + Bu_1 \quad (14)$$

donde $\bar{A} = -\lambda I_{n \times n}$ es una matriz Hurwitz, $I_{n \times n}$ es una matriz identidad y $\lambda > 0$ es un número real positivo. Considerando la Ec. (14), el estado x_1 puede ser expresado como:

$$x_1(t) = e^{\bar{A}t} x_0(t) + \int_{t-\tau}^t e^{\bar{A}(t-s)} ((A - \bar{A})x_1(s) + Bu_1(s)) ds \quad (15)$$

Considerando la estructura del observador para el sistema con retardo dado por (6), se diseña el observador para x_1 :

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu_1(t) - G_1(t), \quad (16)$$

donde G_1 es el término de corrección que se abordará posteriormente.

La ecuación del predictor para el sistema (16) es:

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \bar{A}\hat{x}_1(t) + Bu_1(t) + (A - \bar{A})\hat{x}_1(t) - G_1(t) \quad (17)$$

donde \bar{A} es igual a lo presentado en la Ec. (14). Por lo tanto, la predicción \hat{x}_1 es:

$$\hat{x}_1(t) = e^{\bar{A}t} \hat{x}_1(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t e^{\bar{A}(t-s)} ((A - \bar{A})\hat{x}_1(s) + Bu_1(s) - G_1(s)) ds. \quad (18)$$

Ahora, considerando el predictor (18) y observador (7) se tiene:

$$\hat{x}_1(t) = e^{\bar{A}t} \hat{x}_0(t) + r_1(t) + \int_{t-\tau}^t e^{\bar{A}(t-s)} ((A - \bar{A})\hat{x}_1(s) + Bu_1(s)) ds \quad (19)$$

donde r_1 es una función vectorial diferencial a lo largo del tiempo que deben ser determinadas simultáneamente con el término de corrección G_j , considerando que se cumpla la Ec.(19) para cualquier $t \geq 0$. Es importante resaltar que r_1 solo aparece durante el diseño del predictor, pero no está presente en su ecuación final.

3.2 Determinación del término de corrección

Restando la Ec.(19) de la Ec.(18) se obtiene:

$$e^{\bar{A}t} (\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t)) - r_1(t) = e^{\bar{A}t} \int_{t-\tau}^t e^{-\bar{A}s} G_1(s) ds.$$

Diferenciando con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}t} (\dot{\hat{x}}_1(t - \tau) - \dot{\hat{x}}_0(t)) - \dot{r}_1(t) &= \\ \bar{A}e^{\bar{A}t} (\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t)) - \bar{A}r_1(t) + G_1(t) &= \\ -e^{\bar{A}t} G_1(t - \tau) & \end{aligned} \quad (20)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $\dot{\hat{x}}_0(t)$ y $\dot{\hat{x}}_1(t - \tau)$ mostrada en la Ec. (16) y despejando G_1 se obtiene:

$$G_1(t) = e^{\bar{A}\tau} (G_0(t) + A(\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t)) - \bar{A}(\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t)) - (\dot{r}_1 - \bar{A}r_1)) \quad (21)$$

Si se elige r_1 tal que $\dot{r}_1 = \bar{A}r_1$, el término de corrección queda de la siguiente manera:

$$G_1(t) = e^{\bar{A}\tau} (G_0(t) + A(\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t)) - \bar{A}(\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t))) \quad (22)$$

Es necesario recalcar que la matriz \bar{A} es Hurwitz, entonces existe un número $\beta \geq 1$ tal que:

$$\forall t \geq 0: \|e^{\bar{A}t}\| \leq \beta e^{-\bar{a}t}, \quad (23)$$

donde $\bar{a} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} |\mathcal{R}(\lambda_i(\bar{A}))|$, $i = 1, \dots, n$, son los n valores propios de la matriz \bar{A} con valores negativos.

Las ecuaciones del observador en cadena (Observador de la base y predictor) para el sistema (6) son las siguientes:

$$OBS \begin{cases} \dot{\hat{x}}_j(t) = A\hat{x}_j(t) + Bu_j(t) - G_j(t), & j = 0, 1 \\ \dot{G}_0(t) = K(C\hat{x}_0(t) - y_r(t)), \\ G_1(t) = e^{\bar{A}\tau} (G_0(t) + A(\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t)) - \bar{A}(\hat{x}_1(t - \tau) - \hat{x}_0(t))) \end{cases} \quad (24)$$

donde \bar{A} es una matriz Hurwitz, que sirve como parámetro de ajuste del observador y está definida con anterioridad.

Remarca 1. La elección de los valores propios de la matriz K es arbitraria pero se tiene que cumplir que sea Hurwitz. Sin embargo, entre más alejados se encuentren del origen más rápido convergerá el estado observado al original con retardo, pero en el caso de que existan perturbaciones en la salida del sistema el efecto de estas se verá amplificado. La elección de λ afecta directamente la convergencia del predictor en la cadena. Al igual que el caso anterior, se da un balance entre velocidad de convergencia y sensibilidad a la perturbación en la salida.

Teorema 2. Considere el sistema (6), sujeto a la suposición **A1**, existe una constante $\eta > 0$ y un retardo $\tau > 0$ tal que :

$$\eta\tau < 1, \text{ con } \eta = \beta\|\bar{A} - A\| \quad (25)$$

Entonces, el error de observación del predictor es:

$$\|\tilde{x}_1\| \leq \rho_1 e^{-\bar{a}t}, \quad t \geq 0 \quad (26)$$

donde:

$$\rho_1 = \frac{\eta}{1 - \eta\tau} \int_{-\tau}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds + \beta\chi_m\rho_0\|\tilde{x}_0(0)\| + \frac{\beta}{1 - \eta\tau}\chi_m\|r_1(0)\| \quad (27)$$

y la función r_1 es $\dot{r}_1 = \bar{A}r_1$; ρ_0 se definió previamente; y χ_m es:

$$\chi_m = \frac{e^{-\bar{a}\tau}}{1 - \eta\tau}. \quad (28)$$

3.3 Prueba del Teorema 2

Primeramente, se define $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1$ como el error de estimación. Considerando (15) y (19) se tiene:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = e^{\bar{A}\tau}\tilde{x}_0(t) + r_1(t) + \int_{t-\tau}^t e^{\bar{A}(t-s)} ((A - \bar{A})\tilde{x}_1(s)) ds \quad (29)$$

Seleccionando $\dot{r}_1 = \bar{A}r_1$ y tomando en cuenta a (23), se obtiene:

$$\|r_1(t)\| = \|e^{\bar{A}t}r_1(0)\| \leq \beta e^{\bar{a}t}\|r_1(0)\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (30)$$

De acuerdo a la hipótesis de inducción, \tilde{x}_0 convergerá a un valor acotado, es decir, existe $\rho_0, \bar{\alpha}_0 > 0$, tal que: $\|\tilde{x}_0\| \leq \rho_0 e^{-\bar{\alpha}_0 t}$. Por lo que, la desigualdad (26) es obtenida por inducción. Realizando algunas manipulaciones matemáticas y usando el Lema A.1 de Farza et al. (2018), se obtiene:

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \rho_1 e^{-\bar{a}t} \quad (31)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{1 - \eta\tau} (\beta(e^{-\bar{\alpha}_0}\rho_0\|\tilde{x}_0(0)\| + \|r_1(0)\|) \\ &\quad + \eta \int_{-\tau}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds) \\ &= \frac{\eta}{1 - \eta\tau} \int_{-\tau}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds + \beta\chi_m\rho_0\|\tilde{x}_0(0)\| \\ &\quad + \frac{\beta}{1 - \eta\tau}\chi_m\|r_1(0)\| \end{aligned}$$

con $\eta = \beta\|\bar{A} - A\|$, χ_m dada por la Ec. (28) y siendo $\bar{a} \leq \alpha_0$. Con esto se permite obtener de igual manera las ecuaciones del Teorema 2. ■

4. RESULTADOS

Se evalúa el desempeño del observador con retardo de tiempo, para el sistema windkessel de cuatro elementos presentado en la Ec. (6). Como se planteó anteriormente la salida del sistema presenta un retardo. El objetivo es estimar el vector de estado, es decir, los estados no medibles: la presión sistémica y el flujo aórtico, libres de retardo. Los parámetros utilizados son los normales para una persona sana de acuerdo a (Astorga-Zaragoza, 2019) se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1. Parámetros de persona sana

Parámetro	Unidades	Valor
R	[mmHg · s/ml]	0.95
C	[ml/mmHg]	1.50
r	[mmHg · s/ml]	0.033
L	[mmHg · s ² /ml]	0.01

Por lo que las matrices mostradas en la Ec. (5), quedan de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} -0.7018 & 0 \\ 0 & -3.3000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ 3.3000 \end{bmatrix} \\ C = [1 \quad -0.0330], \quad D = [1] \quad (32)$$

Considerando lo antes mencionado la matriz de observabilidad es:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0330 \\ -0.7017 & 0.1089 \end{bmatrix} \therefore \text{rank}(\mathcal{O}) = 2. \quad (33)$$

Por lo que se cumple la suposición **A1**. Considerando lo anterior, se resuelve la LMI propuesta en el Teorema 1, obteniendo la matriz K de ganancia del observador:

$$K = \begin{bmatrix} 0.8003 \\ 0.1672 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Las condiciones iniciales para el sistema original son $x(0) = [75, 50]^T$ y para los subsistema del observador en cadena son $\hat{x}_i(s) = [100, 200]^T$, $s \in [-\tau, 0]$, $i = 0, 1$. Se considera que el retardo que presenta el sistema es $\tau = 1s$, el parámetro de ajuste $\lambda = 10$ y la señal de entrada $i(t)$ es la presentada en Serrano-Cruz et al. (2018).

En las Figuras (1)-(3) se muestra la supervisión de las dinámicas del sistema cardiovascular. En la Figura 1 se muestra la presión arterial disponible del sistema ($P_{ar}(t-\tau)$) y como es que con el observador en cadena se logra supervisar la presión libre de retardo ($\hat{P}_{ar}(t)$) que es la señal del sistema libre de retardo. En las Figuras 2 y 3 se muestran la estimación de la presión sistémica y del flujo aórtico del sistema libre de retardo. Es importante resaltar que estos dos estados no están disponibles y se obtienen a partir de la salida ($P_{ar}(t-\tau)$). En la Figura 4 se muestra que la norma del error de estimación $\|\hat{x}\| = \|\hat{x}_1 - x\|$ converge a cero.

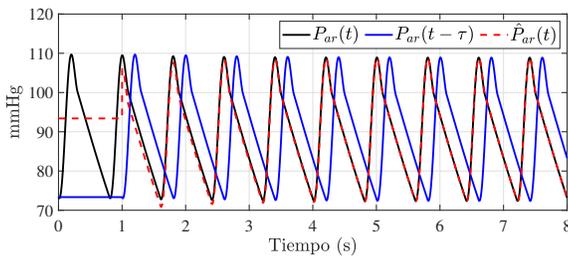


Fig. 1. Supervisión de la presión arterial P_{ar} por medio del último subsistema de la cadena.

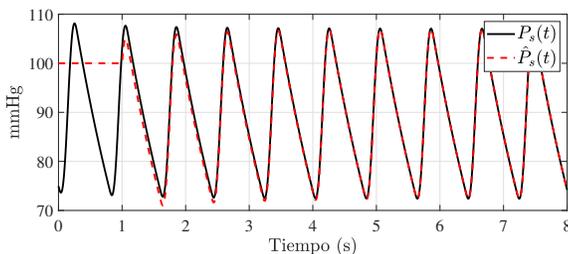


Fig. 2. Supervisión de la presión sistémica P_s por medio del último subsistema de la cadena

5. CONCLUSIÓN

En este artículo se logró el diseño de un observador en cadena para un sistema lineal. Este observador tiene la

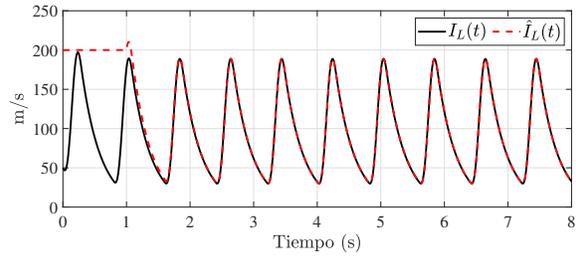


Fig. 3. Supervisión del flujo aórtico $I_L(t)$ por medio del último subsistema de la cadena

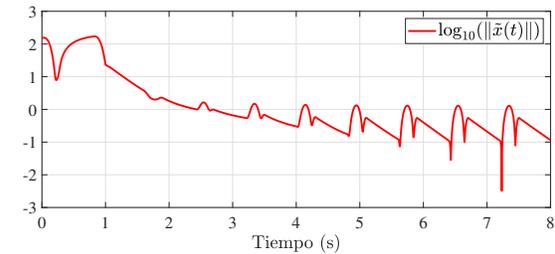


Fig. 4. Norma del error de observación

característica de que es capaz de estimar el vector de estado libre de retardo incluso en presencia de que la señal con la que se alimenta está afectada por retardos de tiempo. Se asegura que el error de observación convergerá exponencialmente a cero. El observador en cadena se utiliza para la supervisión de las dinámicas de un sistema cardiovascular sin la afectación del retardo. Para trabajos futuros se considerarán incertidumbres en el modelo simulando las variaciones de cada paciente y posibles enfermedades cardiacas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es financiado por el Tecnológico Nacional de México, a través del proyecto "Supervisión de procesos con retardo mediante el diseño de esquemas de estimación de variables basada en observadores" con clave: 14259-P.

REFERENCIAS

- Astorga-Zaragoza, C.M. (2019). Observer-based monitoring of the cardiovascular system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 67(3), 501–505.
- Belkhatir, Z., Laleg-Kirati, T.M., and Tadjine, M. (2014). Residual generator for cardiovascular anomalies detection. In *2014 European Control Conference (ECC)*, 1862–1868. IEEE.
- Borri, A., Cacace, F., De Gaetano, A., Germani, A., Manes, C., Palumbo, P., Panunzi, S., and Pepe, P. (2017). Luenberger-like observers for nonlinear time-delay systems with application to the artificial pancreas: The attainment of good performance. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(4), 33–49.
- Farza, M., Hernández-González, O., Menard, T., M'Saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2016). Cascade

- predictors design for a class of nonlinear uncertain systems with delayed state—application to bioreactor. In *2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, 753–760. IEEE.
- Farza, M., Hernández-González, O., Menard, T., M'saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2017). Observer design for a class of uncertain systems with delayed outputs. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 1427–1432.
- Farza, M., Hernández-González, O., Ménard, T., Targui, B., M'saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2018). Cascade observer design for a class of uncertain nonlinear systems with delayed outputs. *Automatica*, 89, 125–134.
- Ghasemi, Z., Jeon, W., Kim, C.S., Gupta, A., Rajamani, R., and Hahn, J.O. (2020). Observer-based deconvolution of deterministic input in coprime multichannel systems with its application to noninvasive central blood pressure monitoring. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 142(9), 091006.
- Khalil, H.K. (2015). *Nonlinear control*, volume 406. Pearson New York.
- Ledezma, F.D. and Laleg-Kirati, T.M. (2015). A first approach on fault detection and isolation for cardiovascular anomalies detection. In *2015 American Control Conference (ACC)*, 5788–5793. IEEE.
- Ramírez-Rasgado, F., Hernández-González, O., Farza, M., Astorga-Zaragoza, C.M., and Guerrero-Sánchez, M.E. (2021). Observer design for a class of non uniformly observable systems using mixed time-continuous and sampled delayed measurements of the outputs. In *2021 9th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, 243–248.
- Roth, G.A., Mensah, G.A., Johnson, C.O., Addolorato, G., Ammirati, E., Baddour, L.M., Barengo, N.C., Beaton, A.Z., Benjamin, E.J., Benziger, C.P., et al. (2020). Global burden of cardiovascular diseases and risk factors, 1990–2019: update from the gbd 2019 study. *Journal of the American College of Cardiology*, 76(25), 2982–3021.
- Serrano-Cruz, D.A., Astorga-Zaragoza, C.M., Guerrero-Ramírez, G.V., García-Beltran, C.D., Osorio-Gordillo, G.L., and Ortiz-Rangel, E. (2018). Estimación de variables del sistema cardiovascular mediante un observador para sistemas singulares. In *Proc. Congreso Nacional de Control Automático AMCA*, 108–113.
- Sharir, T., Marmor, A., Ting, C.T., Chen, J.W., Liu, C.P., Chang, M.S., Yin, F., and Kass, D.A. (1993). Validation of a method for noninvasive measurement of central arterial pressure. *Hypertension*, 21(1), 74–82.
- Zhou, S.s., Jin, J.p., Wang, J.q., Zhang, Z.g., Freedman, J.H., Zheng, Y., and Cai, L. (2018). mirnas in cardiovascular diseases: potential biomarkers, therapeutic targets and challenges. *Acta Pharmacologica Sinica*, 39(7), 1073–1084.