

## Level control of coupled tanks via nested predictors<sup>\*</sup>

Bogar Cervantes-Santamaría<sup>\*</sup> Liliam Rodríguez-Guerrero<sup>\*\*</sup>  
Víctor E. Pedraza-Vera<sup>\*\*</sup> Omar J. Santos-Sánchez<sup>\*\*</sup>  
Pablo A. López-Pérez<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Alumno de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) MEX (e-mail: ce429470@uaeh.edu.mx)*

<sup>\*\*</sup> *Área Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) MEX (e-mail: liliam\_rodriguez@uaeh.edu.mx, vpedraza@uaeh.edu.mx, omarj@uaeh.edu.mx)*

<sup>\*\*\*</sup> *Escuela Superior de Apan, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) MEX (e-mail: pablo\_lopez@uaeh.edu.mx)*

---

**Abstract:** In this paper, the liquid level of a coupled tank system is regulated by using predictive control, because the process is modeled as a Two Input-Two Output system with input delays. The delays are compensated by using nested predictors, and the gains are tuned based on the Linear Quadratic Regulator approach. A comparative analysis of the proposed control is performed via simulation routines, with a state feedback and a Proportional Integral control. The results show that the state predictors are able to compensate the input delays, avoiding the overshoot.

*Keywords:* Predictive control, Coupled tanks, Delayed system, PI control.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Muchos de los procesos industriales tienen un gran número de entradas/salidas, los cuales pueden ser expresados eficientemente como múltiples subsistemas con dos entradas y dos salidas, por sus siglas en inglés Two input-Two output (TITO) (Wang et al., 2000; Nordfeldt and Hägglund, 2006; Liu et al., 2005), por ejemplo, columnas de destilación binaria (Wood and Berry, 1973), tanques de agitación continua (Jin et al., 2016), reactores de polimerización (Chien et al., 1999) y sistemas de control de nivel de líquido con tanques acoplados, utilizados en muchas industrias como plantas petroquímicas, tratamiento y purificación de aguas residuales, bioprocesos y farmacéutica.

En dichos procesos existen retardos temporales inherentes, esto como resultado de fenómenos asociados con el transporte de información, materia o energía. El efecto de los retardos llega a ser de mayor importancia en sistemas interconectados y distribuidos (Murray, 2007), en donde los sensores, actuadores y controladores introducen múltiples retardos determinísticos y estocásticos. En sistemas interconectados, los retardos pueden surgir debido a la

disponibilidad de las redes de comunicación compartidas, tales como el internet y redes inalámbricas (Kelly, 2001). También se observan retardos en teleoperación, telecirugía, coordinación de vehículos no tripulados, el control descentralizado y colaborativo de múltiples agentes (Beard et al., 2006), entre muchas otras aplicaciones en control.

Los sistemas de tanques acoplados pueden modelarse matemáticamente utilizando modelos no lineales con retardo, por ejemplo, el trabajo presentado en (Shah and Patel, 2019), en donde se modela un sistema de cuatro tanques acoplados considerando retardos en el estado y en las entradas, haciendo uso de la aproximación de Pade para tratar con la compensación de los retardos y así aplicar un control robusto por modos deslizantes. Sin embargo, en la mayoría de los trabajos los retardos no son tomados en cuenta, por ejemplo en (Khan and Spurgeon, 2006; Almutairi and Zribi, 2006), se aplican controladores por modos deslizantes para regular el nivel del líquido.

En procesos de control, más del 95% de los lazos de control son de tipo PID (Åström, 1995) y para regular el nivel de líquido son del tipo PI y PID, utilizando modelos lineales, basado en el enfoque frecuencial, mediante funciones de transferencia de primero o segundo orden con retardo en la entrada, por ejemplo (Santana et al., 2018; Hajare

---

<sup>\*</sup> Este artículo es financiado mediante el proyecto Programa Anual Operativo 2022 (PAO, 2022) con clave 0503 de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

and Patre, 2015), aunque en la mayoría de estos casos es necesario usar desacopladores buscando reducir la interacción entre los lazos individuales, como en (Wang et al., 2000; Nordfeldt and Hägglund, 2006; Liu et al., 2005; Rajapandiyam and Chidambaram, 2012). Algunas otras técnicas, como control difuso (Ponce et al., 2015) y controles PI-PD de orden fraccional (Roy et al., 2017), se han aplicado a tanques acoplados.

La presencia de retardos puede ocasionar efectos indeseables en la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado, como oscilaciones o incluso inestabilidad (Sipahi et al., 2011), por lo cual es importante considerar técnicas de control que compensen dichos retardos. Algunas estrategias de control que también compensan los retardos en la entrada de un Sistema Lineal e Invariante en el Tiempo (SLIT) son el Predictor de Smith (Smith, 1959) para el caso escalar (enfoque frecuencial), la asignación del espectro finito (Manitius and Olbrot, 1979) y el método de reducción (Artstein, 1982), estos dos últimos para el caso multivariable y están basados en la predicción del estado para compensar el retardo en la entrada. La idea del control predictivo, para este tipo de sistemas, consiste en diseñar una ley de realimentación de estado que usa la predicción de éste hasta el tiempo de retardo, de tal modo que la ecuación característica del sistema en lazo cerrado tiene dimensión finita y la ganancia de realimentación es elegida tal que el sistema en lazo cerrado sea estable. La predicción del estado se calcula a partir de la solución de la ecuación diferencial que representa al SLIT, depende de los valores actuales del estado y el control, además de los valores pasados del control.

El trabajo desarrollado en (Kwon and Pearson, 1980) presenta una ley de retroalimentación de estado basada en el enfoque del control óptimo, para un sistema lineal invariante en el tiempo solo con un retardo en el control, se minimiza un criterio de desempeño cuadrático que depende solo de la variable de control, primero calculan el control control óptimo para el sistema en lazo abierto y después realizan una transformación al lazo cerrado, bajo el criterio del control óptimo.

La contribución de este artículo consiste en obtener los controles predictivos mediante el enfoque temporal, para un proceso de tanques acoplados, en el cual se regula el nivel de líquido. El modelo matemático linealizado considera los retardos inherentes en las entradas, debido al tiempo de transporte del líquido en las tuberías de entrada a los tanques. Las ganancias se calculan mediante el enfoque del Regulador Cuadrático Lineal, del inglés Linear Quadratic Regulator (LQR), (Kirk, 2004) de modo que el sistema en lazo cerrado sea estable. Se muestran simulaciones para validar el resultado, además se compara con un control Proporcional Integral (PI) y una ley por retroalimentación de estado que no considera el tiempo de retardo.

El artículo se organiza de la siguiente forma: en la Sección 2 se plantea el problema y se muestran resultados

teóricos preliminares, en la Sección 3 se presentan los predictores anidados, en la Sección 4 se describe el sistema de tanques y su modelo matemático, en la Sección 5 se muestra la sintonización de los predictores y el PI, en la Sección 6 se presentan las simulaciones y comparaciones del desempeño del sistema. Finalmente, la Sección 7 está dedicada a las conclusiones.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La ecuación de estado que se considera para el sistema TITO es de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t - \tau_1) + B_2u_2(t - \tau_2), \quad (1)$$

en donde el estado  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  tiene condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , para el tiempo inicial  $t_0 \geq 0$ . Las funciones iniciales de las entradas  $u_1(t), u_2(t)$  son:

$$\begin{aligned} u_1(\theta) &= \psi_1(\theta), \quad \theta \in [-\tau_1, 0], \\ u_2(\theta) &= \psi_2(\theta), \quad \theta \in [-\tau_2, 0], \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\psi_1 \in PC([-\tau_1, 0])$ ,  $\psi_2 \in PC([-\tau_2, 0])$ , con  $PC$  el espacio de funciones continuas a tramos;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ , los retardos se suponen constantes, conocidos y satisfacen la relación  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ , ya que para el calculo de los controles predictivos, en la primera etapa debe considerarse en retardo más pequeño y en la segunda el más grande. Se supone que el sistema (1) es completamente controlable en el sentido de que para cada  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  existen controles admisibles  $u_1$  y  $u_2$ , tales que para un tiempo  $t_1 > t_0$ ,  $x(t_1; t_0, u_1, u_2) = x_1$ . También se supone que se puede medir o estimar todo el estado.

Partiendo de las ideas relacionadas al diseño de controladores por retroalimentación de estado, basados en predicción, como se presenta en (Krstic, 2009), primero se realiza el calculo de la solución del sistema (1) y posteriormente la predicción que se utiliza en la ley de control.

### 2.1 Predicción del estado

La solución del sistema (1) está dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi_1)}B_1u_1(\xi_1 - \tau_1)d\xi_1 \\ &\quad + \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi_2)}B_2u_2(\xi_2 - \tau_2)d\xi_2, \end{aligned} \quad (3)$$

y la predicción del estado  $x(t + \eta)$ , para  $\eta > 0$  dada, se calcula asignando  $t$  a  $t_0$  y  $t + \eta$  a  $t$ , además para la segunda y tercera integral se consideran los cambios de variable  $\delta_1 = \xi_1 - \tau_1 - t$  y  $\delta_2 = \xi_2 - \tau_2 - t$ , respectivamente. Entonces, la predicción de estado se representa como:

$$\begin{aligned} x(t + \eta) &= e^{A\eta}x(t) + \int_{-\tau_1}^{\eta - \tau_1} e^{A(\eta - \delta_1 - \tau_1)}B_1u_1(t + \delta_1)d\delta_1 \\ &\quad + \int_{-\tau_2}^{\eta - \tau_2} e^{A(\eta - \delta_2 - \tau_2)}B_2u_2(t + \delta_2)d\delta_2. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.2 Enfoque del Regulador Cuadrático Lineal

Note que cuando  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , el sistema (1) puede reescribirse como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5)$$

en donde

$$B = [B_1, B_2] \in \mathbb{R}^{n \times (m_1 \times m_2)}, \quad (6)$$

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T, \quad (7)$$

considerando las siguientes suposiciones:

- a) El par (A,B) del sistema sin retardo es controlable, por lo que existe una ley de control de realimentación de estado  $u(t) = Fx(t)$  tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (8)$$

es exponencialmente estable, con la ganancia

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, F_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, F_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, \quad (9)$$

y cada componente de control está dado por

$$u_1(t) = F_1 x(t), \quad (10)$$

$$u_2(t) = F_2 x(t). \quad (11)$$

- b) La ganancia  $F$ , dada por (9), puede calcularse mediante el enfoque LQR como  $F = -R^{-1}B^T P$ , en donde  $B$  está dada por (6),  $P > 0$  satisface la ecuación de Riccati (Kalman et al., 1960), tal que el control  $u(t)$  es óptimo, (Kirk, 2004) y minimiza al índice de desempeño.

$$J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t),$$

en donde  $Q \geq 0$  y  $R > 0$ .

El problema consiste en calcular, a partir de (10) y (11), los controles predictores que compensen los retardos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  del sistema (1) tal que el lazo cerrado sea de la forma (8) y satisfaga las suposiciones a) y b). Posteriormente, aplicar dichos controles al sistema de tanques acoplados para regular el nivel de líquido.

## 3. PREDICTORES ANIDADOS

La síntesis de los controladores se realiza en dos etapas, las cuales se describen en la prueba de la siguiente proposición:

*Proposición 1.* Para el sistema (1), los controles predictores.

$$\begin{aligned} u_1(t) = & F_1 e^{A\tau_1} x(t) + F_1 \int_{-\tau_1}^0 e^{-A\delta_1} B_1 u_1(t + \delta_1) d\delta_1 \\ & + F_1 \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2} e^{A(\tau_1 - \tau_2 - \delta_2)} B_2 u_2(t + \delta_2) d\delta_2 \end{aligned} \quad (12)$$

y

$$\begin{aligned} u_2(t) = & F_2 e^{\bar{A}(\tau_2 - \tau_1)} (e^{A\tau_1} x(t) \\ & + \int_{-\tau_1}^0 e^{-A\delta_1} B_1 u_1(t + \delta_1) d\delta_1 \\ & + \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2} e^{A(\tau_1 - \tau_2 - \delta_2)} B_2 u_2(t + \delta_2) d\delta_2) \quad (13) \\ & + F_2 \int_{\tau_1 - \tau_2}^0 e^{-\bar{A}\delta_2} B_2 u_2(t + \delta_2) d\delta_2, \end{aligned}$$

donde  $\bar{A} = A + B_1 F_1$ , compensan los retardos en las entradas y el sistema en lazo cerrado (1), (12) y (13) es exponencialmente estable para  $t \geq \tau_2$ .

**Prueba.** Para compensar el retardo  $\tau_1$ , el primer control predictivo se define como:

$$u_1(t) = F_1 x(t + \tau_1), \quad (14)$$

y la predicción del estado  $x(t + \tau_1)$  puede calcularse a partir de (4) para  $\eta = \tau_1$ , obteniendo

$$\begin{aligned} x(t + \tau_1) = & e^{A\tau_1} x(t) + \int_{-\tau_1}^0 e^{-A\delta_1} B_1 u_1(t + \delta_1) d\delta_1 \\ & + \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2} e^{A(\tau_1 - \tau_2 - \delta_2)} B_2 u_2(t + \delta_2) d\delta_2, \end{aligned} \quad (15)$$

por lo que el control tiene la forma (12) tal que el lazo cerrado del sistema (1) con el control (12) satisface

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + B_2 u_2(t - \tau_2), \quad t \geq \tau_1, \quad (16)$$

con  $\bar{A} = A + B_1 F_1$ .

El segundo control predictivo está definido por:

$$u_2(t) = F_2 x(t + \tau_2). \quad (17)$$

y la predicción del estado  $x(t + \tau_2)$  se calcula a partir de la solución en la forma de Cauchy del sistema (16) como sigue.

$$x(t) = e^{\bar{A}(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\bar{A}(t-\xi)} B_2 u_2(\xi - \tau_2) d\xi, \quad (18)$$

para esta solución, se considera que  $t_0$  es  $t + \tau_1$  y  $t$  es  $t + \tau_2$ , entonces

$$\begin{aligned} x(t + \tau_2) = & e^{\bar{A}(\tau_2 - \tau_1)} x(t + \tau_1) \\ & + \int_{t + \tau_1}^{t + \tau_2} e^{\bar{A}(t + \tau_2 - \xi)} B_2 u_2(\xi - \tau_2) d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

para la integral del segundo término del lado derecho se considera el cambio de variable  $\delta_2 = \xi - \tau_2 - t$ , entonces

$$\begin{aligned} x(t + \tau_2) = & e^{\bar{A}(\tau_2 - \tau_1)} (e^{A\tau_1} x(t) \\ & + \int_{-\tau_1}^0 e^{-A\xi} B_1 u_1(t + \delta_1) d\delta_1 \\ & + \int_{-\tau_2}^{\tau_1 - \tau_2} e^{A(\tau_1 - \tau_2 - \delta_2)} B_2 u_2(t + \delta_2) d\delta_2) \\ & + \int_{\tau_1 - \tau_2}^0 e^{-\bar{A}\delta_2} B_2 u_2(t + \delta_2) d\delta_2 \end{aligned} \quad (20)$$

y el control tiene la forma (13), tal que el sistema en lazo cerrado (1), (12) y (13)

$$\dot{x}(t) = (A + B_1F_1 + B_2F_2)x(t)$$

es exponencialmente estable y coincide con (8) para  $t \geq \tau_2$ , por lo que las ganancias  $F_1$  y  $F_2$  se calculan a partir del enfoque LQR, de acuerdo a la suposición b).

#### 4. TANQUES ACOPLADOS

El sistema mostrado en la Fig. 1 consta de dos tanques acoplados con forma de cilindro, cada tanque tiene su propio sistema de bombeo que recoge líquido de un depósito inferior a las partes superiores. El flujo de bombas es controlado por la variación de Modulación por Ancho de Pulsos. El nivel de líquido se mide mediante sensores de presión, el rango de señal es de 0 V a 5 V. El voltaje de cada bomba es una variable de entrada y el nivel de líquido en cada tanque es la variable de salida.

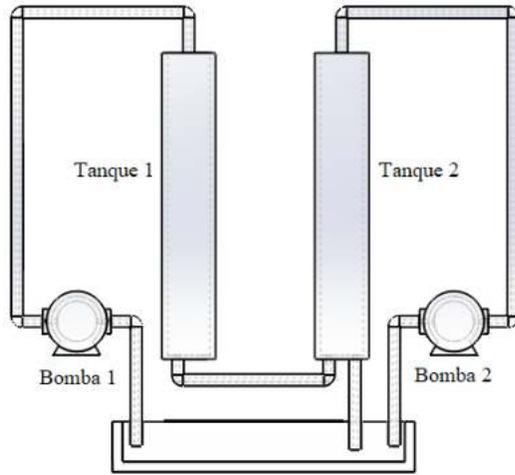


Fig. 1. Sistema de tanques acoplados.

Las especificaciones de la planta se muestran en la Tabla 1 que es una reconfiguración de los tanques Quanser (Quanser, 2020).

Tabla 1. Parámetros de la plataforma

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
$c_{bi}$	Constante de flujo de la bomba	3.3	$\text{cm}^3/(\text{s V})$
-	Máximo voltaje	12	V
$h_i$	Altura de los tanques	30	cm
$a_b$	Área interior de los tanques	15.553	$\text{cm}^2$
$a_c$	Área de conexión en los tanques	0.181	$\text{cm}^2$
$a_s$	Área de salida del tanque 2	0.246	$\text{cm}^2$

Se consideran los retardos  $\tau_1 = 5\text{s}$  y  $\tau_2 = 9\text{s}$ , medidos mediante la respuesta al escalón.

##### 4.1 Modelado matemático del sistema de tanques

El modelo matemático no lineal se obtiene del principio de conservación de masa (Çengel, 2012):  $m_{\text{acumulada}} =$

$m_{\text{entrada}} - m_{\text{salida}}$ , debido a que se utiliza un fluido con volumen específico constante, también se tiene conservación de volumen para obtener la dinámica del sistema y se obtiene la razón de cambio instantánea del volumen como:

$$\dot{V}(t) = q_e(t) - q_s(t), \quad (21)$$

en donde  $q_e(t)$  representa el flujo de entrada y  $q_s(t)$  el flujo de salida. Aplicando (21) al tanque 1, teniendo en cuenta que el flujo entrada (de la bomba 1) satisface una relación proporcional con la constante del flujo de la bomba ( $c_{b1}$ ) con el voltaje aplicado  $\mu_1(t)$ . Además, existe un retardo  $\tau_1$  en la entrada debido al transporte del fluido. El caudal de salida  $q_c(t)$  es el punto de conexión entre ambos tanques, por lo tanto:

$$\dot{V}_1(t) = c_{b1}\mu_1(t - \tau_1) - q_c(t). \quad (22)$$

El flujo de conexión entre los tanques se modela a partir del principio de Torricelli (Çengel, 2006), dependiendo de la diferencia de altura se obtiene la dirección del flujo. Así, si la altura  $h_1(t) > h_2(t)$  el flujo se alimenta del tanque 1 al tanque 2; y en caso contrario el sentido del flujo también se invierte, por lo cual se considera a la función signo, con lo cual se obtiene

$$q_c(t) = a_c \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} \text{sgn}(h_1(t) - h_2(t)), \quad (23)$$

en donde  $h_1(t)$  representa la altura del tanque 1 y  $h_2(t)$  la altura del tanque 2,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  es la constante gravitacional y  $a_c$  es el área de conexión entre los tanques.

Sustituyendo (23) en (22) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & c_{b1}\mu_1(t - \tau_1) \\ & - a_c \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} \text{sgn}(h_1(t) - h_2(t)). \end{aligned} \quad (24)$$

De manera similar, calculando (21) para el tanque 2, se obtiene

$$\dot{V}_2(t) = c_{b2}\mu_2(t - \tau_2) + q_c(t) - q_s(t),$$

donde  $c_{b2}$  es la constante de la bomba,  $\tau_2$  es el retardo en la entrada 2,  $q_c$  es el caudal en la conexión y  $q_s$  es el caudal de salida. Se sustituye (23) en la ecuación anterior, y con el principio de Torricelli (Çengel, 2006) en la salida del tanque, tomando en cuenta que el área de salida del tanque 2 es  $a_s$  se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & c_{b2}\mu_2(t - \tau_2) \\ & + a_c \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} \text{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \\ & - a_s \sqrt{2gh_2(t)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Dado que el área transversal  $a_b$  es constante e igual en ambos tanques se tiene  $V(t) = a_b h(t)$ . La ecuación anterior se aplica a (24) y (25), con lo que se obtiene el siguiente modelo no lineal que representa la razón de cambio de la altura del líquido con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) = & \frac{c_{b1}}{a_b} \mu_1(t - \tau_1) \\ & - \frac{a_c}{a_b} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} \text{sgn}(h_1(t) - h_2(t)), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_2(t) = & \frac{c_{b2}}{a_b} \mu_2(t - \tau_2) \\ & + \frac{a_c}{a_b} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} \operatorname{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \quad (27) \\ & - \frac{a_s}{a_b} \sqrt{2gh_2(t)}. \end{aligned}$$

**Linealización.** Se desea linealizar alrededor del punto de operación, el cual se elige como  $h_{10} > h_{20} > 0$ . Para determinar las entradas  $\mu_{10}$  y  $\mu_{20}$  que mantendrán las variables de estado en tales puntos, se utilizan (26) y (27), donde la razón de cambio en dichos puntos es 0. Así, de (26) se tiene

$$0 = \frac{c_{b1}}{a_b} \mu_{10} - \frac{a_c}{a_b} \sqrt{2g|h_{10} - h_{20}|} \operatorname{sgn}(h_{10} - h_{20})$$

lo que lleva a  $\mu_{10} = \frac{a_c}{c_{b1}} \sqrt{2g(h_{10} - h_{20})}$  y de la misma manera se calcula

$$\mu_{20} = \frac{a_s}{c_{b2}} \sqrt{2gh_{20}} - \frac{a_c}{c_{b2}} \sqrt{2g(h_{10} - h_{20})}.$$

Para la linealización se aproxima las funciones mediante la serie de Taylor. Para la dinámica de la altura 1 se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) \approx & \frac{c_{b1}}{a_b} \mu_{10} - \frac{a_c}{a_b} \sqrt{2g(h_{10} - h_{20})} \\ & + \frac{c_{b1}}{a_b} \frac{d\mu_1}{d\mu_1} \Big|_{\mu_1=\mu_{10}} (\mu_1(t) - \mu_{10}) \\ & - \frac{a_c}{a_b} \frac{d}{dh_1} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} \dots \\ & \operatorname{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \Big|_{h_1=h_{10}, h_2=h_{20}} (h_1(t) - h_{10}) \\ & - \frac{a_c}{a_b} \frac{d}{dh_2} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} \dots \\ & \operatorname{sgn}(h_1(t) - h_2(t)) \Big|_{h_1=h_{10}, h_2=h_{20}} (h_2(t) - h_{20}). \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene el modelo lineal simplificado

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) \approx & \frac{c_{b1}}{a_b} (\mu_1(t) - \mu_{10}) \\ & - \frac{a_c}{a_b} \sqrt{\frac{g}{2(h_{10} - h_{20})}} (h_1(t) - h_{10}) \\ & + \frac{a_c}{a_b} \sqrt{\frac{g}{2(h_{10} - h_{20})}} (h_2(t) - h_{20}). \end{aligned}$$

Para la altura 2 se realiza de manera similar y se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{h}_2(t) \approx & \frac{c_{b2}}{a_b} (\mu_2(t) - \mu_{20}) \\ & + \frac{a_c}{a_b} \sqrt{\frac{g}{2(h_{10} - h_{20})}} (h_1(t) - h_{10}) \\ & - \left[ \frac{a_c}{a_b} \sqrt{\frac{g}{2(h_{10} - h_{20})}} + \frac{a_s}{a_b} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} \right] (h_2(t) - h_{20}). \end{aligned}$$

**Representación en espacio de estado:** Las variables de estado y las entradas se definen como

$$\begin{aligned} x_1(t) = & h_1(t) - h_{10}, \quad x_2(t) = h_2(t) - h_{20} \\ u_1(t) = & \mu_1(t) - \mu_{10}, \quad u_2(t) = \mu_2(t) - \mu_{20}, \end{aligned}$$

y se define

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 = & \frac{a_c}{a_b} \sqrt{\frac{g}{2(h_{10} - h_{20})}}, \quad \tilde{a}_2 = \tilde{a}_1 + \frac{a_s}{a_b} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}}, \\ \tilde{b}_1 = & \frac{c_{b1}}{a_b}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{c_{b2}}{a_b}, \end{aligned}$$

obteniendo un sistema de la forma (1) con

$$A = \begin{bmatrix} -\tilde{a}_1 & \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}.$$

## 5. SINTONIZACIÓN DE LOS CONTROLES

Para la sintonización de los controles se escogen los parámetros mostrados en la Tabla 1 y Tabla 2. El proceso de linealización en el punto de operación da como resultado la siguiente ecuación en espacio estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -0.1152 & 0.1152 \\ 0.1152 & -0.1937 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2122 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t - \tau_1) \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2122 \end{bmatrix} u_2(t - \tau_2) \end{aligned}$$

Tabla 2. Parámetros de los controles.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
Tiempo de muestreo	$T_s$	0.1	s
Referencia 1	$r_1$	25	cm
Referencia 2	$r_2$	20	cm
Retardo en la entrada 1	$\tau_1$	5	s
Retardo en la entrada 2	$\tau_2$	9	s
Matriz Q	$Q$	$\begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 4.1 \end{bmatrix}$	
Matriz R	$R$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	
Tolerancia de error	-	5	%

### 5.1 Ganancias de realimentación de estado para los predictores

Las ganancias de realimentación se sintonizan mediante el enfoque LQR, para ello se utilizó el comando *lqr* de Matlab, obteniendo así las siguientes ganancias

$$F_1 = [-0.2398 \quad -0.2843] \quad F_2 = [-0.2843 \quad -1.3591].$$

### 5.2 Control PI

Con la finalidad de comparar el desempeño del sistema se utiliza un control PI. El sistema de tanques acoplados también puede representarse como

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{11} e^{-\tau_1 s}}{T_{11}s+1} & \frac{K_{12} e^{-\tau_2 s}}{T_{12}s+1} \\ \frac{K_{21} e^{-\tau_1 s}}{T_{21}s+1} & \frac{K_{22} e^{-\tau_2 s}}{T_{22}s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.547 e^{-5s} & 2.705 e^{-9s} \\ 28.63s+1 & 34.2s+1 \\ 2.705 e^{-5s} & 2.705 e^{-9s} \\ 34.2s+1 & 24.12s+1 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, para poder implementar dos controladores PI al sistema de tanques, es necesario desacoplarlo, es decir, expresar al sistema de modo que cada variable de entrada afecte únicamente una variable de salida.

El desacoplador utilizado es el propuesto en (Wang et al., 2000), que de acuerdo con los resultados en

(Rajapandiyam and Chidambaram, 2012) el sistema desacoplado puede ser aproximado nuevamente a funciones de transferencias de primer orden con retardo en el tiempo

$$G(s)D(s) = \begin{bmatrix} G_{11}^*(s) & 0 \\ 0 & G_{22}^*(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_1^* e^{-\tau_1^* s}}{T_1^* s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{K_2^* e^{-\tau_2^* s}}{T_2^* s + 1} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

El desacoplador del sistema tiene la forma de

$$D(s) = \begin{bmatrix} e^{-4s} & \frac{-(77.46s+2.705)e^{-4s}}{155.5s+4.547} \\ \frac{-(65.26s+2.705)}{92.53s+2.705} & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que el sistema desacoplado puede ser aproximado como

$$G(s)D(s) \approx \begin{bmatrix} \frac{1.841 e^{-7.33s}}{19.05s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1.096 e^{-5.99s}}{16.05s+1} \end{bmatrix}.$$

Una vez desacoplado, es necesario sintonizar las ganancias de los dos controles PI, para ello se utiliza el método propuesto en (He et al., 2000), el cual también se basa en enfoque LQR, de modo que se aplica un PI óptimo. Los controles PI tiene la forma

$$C_i = Kp + \frac{Ki}{s}$$

con  $i = 1, 2$ . Las ganancias del control  $PI_1$  son  $Kp_1 = 0.5929$  y  $Ki_1 = 0.0577$ , las ganancias del control  $PI_2$  son  $Kp_2 = 0.9414$  y  $Ki_2 = 0.1053$ .

## 6. RESULTADOS

Los controles predictores (12) y (13) fueron simulados en Matlab-Simulink, aproximando las integrales con el método del trapecio.

### 6.1 Referencia escalón

En la Fig. 2 y la Fig. 3 se muestran los resultados en simulación de la altura del líquido en el tanque 1 y 2, con un referencia de altura deseada de 25cm y 20cm, respectivamente. Se aplican los controles predictivos propuestos, un control por realimentación de estado y un control PI óptimo. Para todas las figuras, en la primera subgráfica se muestra el nivel del tanque, seguida de la señal de control y finalmente el error.

Observe que todos los controles son capaces de llevar el nivel de líquido a la referencia deseada. Sin embargo, el control PI es el que ocasiona un mayor sobreimpulso y mayor tiempo de establecimiento; el control por realimentación de estado mantiene el nivel de líquido oscilando alrededor de la referencia; mientras que los controles predictores hacen que el nivel tenga una respuesta suave y sin oscilaciones.

En la Tabla 3 se muestran algunas características de las respuesta transitoria del sistema simulado (integral del valor absoluto del error, valor absoluto del control aplicado, máximo sobre impulso, tiempo de subida) las cuales sirven para evaluar el desempeño de los controles.

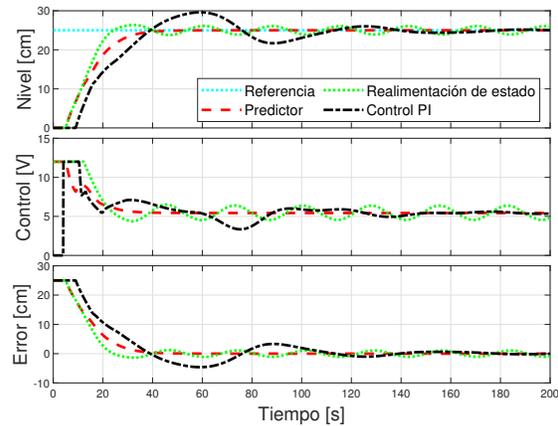


Fig. 2. Respuesta del tanque 1 ante una referencia de tipo escalón.

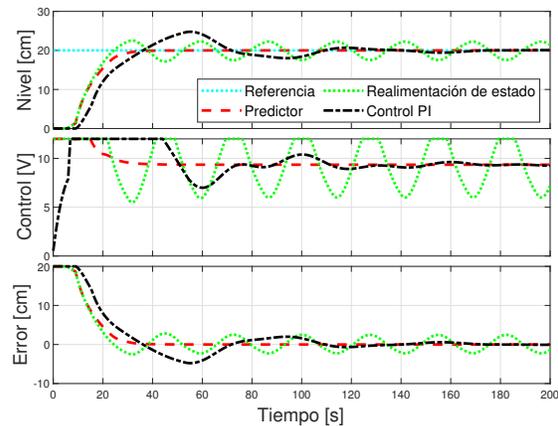


Fig. 3. Respuesta del tanque 2 ante una referencia de tipo escalón.

Tabla 3. Análisis de desempeño para referencia de tipo escalón.

Método	Integral del error absoluto	Integral del control aplicado	Máximo sobre impulso %	Tiempo de subida (s)	Tiempo de establecimiento (s)	Error en estado estacionario (mm)						
Control predictor	IAE <sub>1</sub>	IAE <sub>2</sub>	$ u_1(t) $	$ u_2(t) $	$Mp_1$	$Mp_2$	$t_{r1}$	$t_{r2}$	$t_{s1}$	$t_{s2}$	$e_{ss1}$	$e_{ss2}$
Realimentación	452.7	554.5	1196	1894	5.47	12.81	22.0	22.9	34.7	-	9.56	22.52
Control PI	725.5	565.8	1131	1927	18.43	23.88	36.7	33.7	103.7	103.7	0.26	0.61

Observe que todos los controles se sintonizan con el enfoque LQR, el PI utiliza menor cantidad de control, sin embargo los predictores presentan valores muy cercanos, menor IAE y no se presenta sobreimpulso.

### 6.2 Referencia rampa

En la Fig. 4 y la Fig. 5 se muestran los resultados de la simulación del tanque 1 y 2 respectivamente, aplicando los diferentes controles a analizar.

Se observa que todos los controles tienen dificultad de seguir la referencia rampa al inicio pero conforme avanza

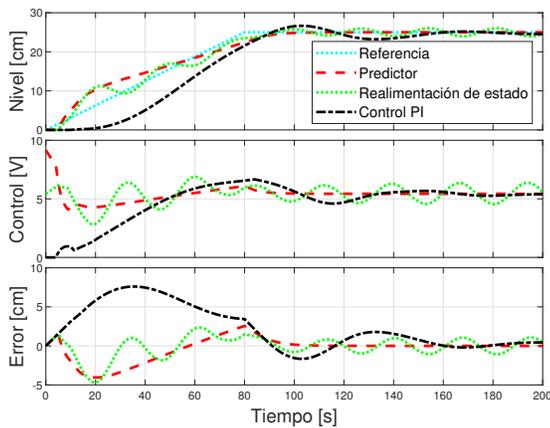


Fig. 4. Respuesta del tanque 1 ante una referencia rampa.

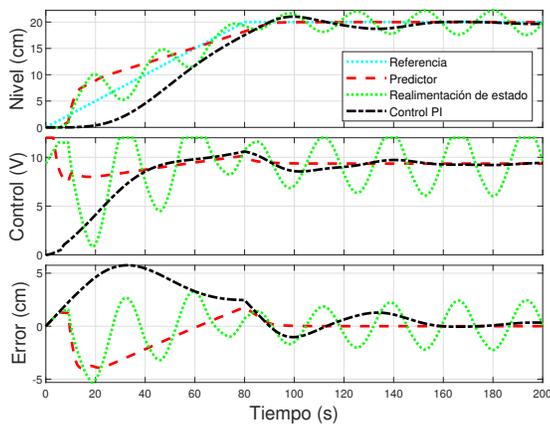


Fig. 5. Respuesta del tanque 2 ante una referencia de tipo rampa.

el tiempo son capaces de alcanzarla. El control PI es el que ocasiona un mayor sobre impulso. El control por realimentación de estados mantiene el nivel de líquido oscilando alrededor de la referencia. En la gráfica de control se observa que el control por realimentación de estado permanece oscilando durante toda la simulación, mientras los demás no. Finalmente se muestra la gráfica de error del sistema donde claramente el error del PI es el más grande.

En la Tabla 4 se muestran algunas características de las respuesta transitoria del sistema simulado.

Tabla 4. Análisis de desempeño ante una referencia de tipo rampa.

Método	Integral del error absoluto		Integral del control aplicado		Máximo sobre impulso %		Tiempo de subida (s)		Tiempo de establecimiento (s)		Error en estado estacionario (mm)	
	IAE <sub>1</sub>	IAE <sub>2</sub>	u <sub>1</sub> (t)	u <sub>2</sub> (t)	M <sub>p1</sub>	M <sub>p2</sub>	t <sub>r1</sub>	t <sub>r2</sub>	t <sub>s1</sub>	t <sub>s2</sub>	e <sub>ss1</sub>	e <sub>ss2</sub>
Control predictor	177.7	158.2	1075	1849	0.00	0.00	86.7	85.2	86.6	85.1	0.00	0.00
Re alimentación	201.7	307.7	1080	1822	4.29	11.23	84.1	72.7	84.0	-	4.57	22.41
Control PI	513.1	366.2	952	1670	6.63	5.16	87.0	86.1	144.3	141.7	4.42	3.32

## 7. CONCLUSIONES

Los controladores predictores anidados son capaces de compensar el retardo en las entradas, evitando el sobre impulso. Además de evitar las oscilaciones que genera utilizar una realimentación de estado sin compensación de retardo.

Los controladores propuestos presentan mejor desempeño que un control PI, presentando un IAE menor, así como, mejor seguimiento de trayectoria. También cabe mencionar que cuenta con la ventaja de que el control predictor no requiere el proceso de desacoplado del PI.

Como trabajo futuro se realizará en análisis de robustez ante incertidumbres en los parámetros de las matrices y en los retardos.

## REFERENCES

- Almutairi, N.B. and Zribi, M. (2006). Sliding mode control of coupled tanks. *Mechatronics*, 16(7), 427–441. doi:10.1016/j.mechatronics.2006.03.001.
- Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4), 869–879.
- Beard, R.W., McLain, T.W., Nelson, D.B., Kingston, D., and Johanson, D. (2006). Decentralized cooperative aerial surveillance using fixed-wing miniature uavs. *Proceedings of the IEEE*, 94(7), 1306–1324.
- Çengel, Y. (2006). *Mecánica de fluidos : fundamentos y aplicaciones*. McGraw Hill, México.
- Çengel, Y. (2012). *Termodinámica*. McGraw-Hill, México, D.F, 7ma edition.
- Chien, I.L., Huang, H.P., and Yang, J.C. (1999). A simple multiloop tuning method for PID controllers with no proportional kick. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 38(4), 1456–1468.
- Hajare, V. and Patre, B. (2015). Decentralized PID controller for TITO systems using characteristic ratio assignment with an experimental application. *ISA Transactions*, 59, 385–397. doi:10.1016/j.isatra.2015.10.008.
- He, J.B., Wang, Q.G., and Lee, T.H. (2000). PI/PID controller tuning via LQR approach. *Chemical Engineering Science*, 55(13), 2429–2439. doi:10.1016/s0009-2509(99)00512-6.
- Jin, Q., Wang, Q., and Liu, L. (2016). Design of decentralized proportional integral derivative controller based on decoupler matrix for two-input/two-output process with active disturbance rejection structure. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(6), 1687814016652563.
- Kalman, R.E. et al. (1960). Contributions to the theory of optimal control. *Bol. soc. mat. mexicana*, 5(2), 102–119.
- Kelly, F. (2001). *Mathematical Modelling of the Internet*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Khan, M.K. and Spurgeon, S.K. (2006). Robust MIMO water level control in interconnected twin-tanks using second order sliding mode control. *Control Engineering Practice*, 14(4), 375–386. doi: 10.1016/j.conengprac.2005.02.001.

- Kirk, D.E. (2004). *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation.
- Krstic, M. (2009). Delay compensation for nonlinear, adaptive, and pde systems.
- Kwon, W. and Pearson, A. (1980). Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Transactions on Automatic control*, 25(2), 266–269.
- Liu, T., Zhang, W., and Gu, D. (2005). Analytical multi-loop PI/PID controller design for two-by-two processes with time delays. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 44(6), 1832–1841.
- Manitius, A. and Olbrot, A. (1979). Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4), 541–552.
- Murray, R. (2007). Recent research in cooperative control of multi-vehicle systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 129, 571–598. doi: 10.1115/1.2766721.
- Nordfeldt, P. and Hägglund, T. (2006). Decoupler and pid controller design of tito systems. *Journal of Process Control*.
- Ponce, H., Ponce, P., Bastida, H., and Molina, A. (2015). A novel robust liquid level controller for coupled-tanks systems using artificial hydrocarbon networks. *Expert Systems with Applications*, 42(22), 8858–8867. doi: 10.1016/j.eswa.2015.07.041.
- Quanser (2020). Coupled tanks. <https://www.quanser.com/products/coupled-tanks/#overview>.
- Rajapandiyan, C. and Chidambaram, M. (2012). Controller design for mimo processes based on simple decoupled equivalent transfer functions and simplified decoupler. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51(38), 12398–12410. doi:10.1021/ie301448c. URL <https://doi.org/10.1021/ie301448c>.
- Roy, P., Kar, B., and Roy, B.K. (2017). Fractional order PI-PD control of liquid level in coupled two tank system and its experimental validation. *Asian Journal of Control*. doi:10.1002/asjc.1487.
- Santana, H., Coelho, S., and Almeida, O. (2018). Application of multivariable PID controllers in a coupled tank system. 664–671. doi: 10.1109/INDUSCON.2018.8627072.
- Shah, D. and Patel, D.M. (2019). Design of sliding mode control for quadruple-tank mimo process with time delay compensation. *Journal of Process Control*, 76, 46–61.
- Sipahi, R., Niculescu, S.I., Abdallah, C.T., Michiels, W., and Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time delay. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(1), 38–65.
- Smith, O. (1959). A controller to overcome dead time. *ISA Journal*, 6, 28–33.
- Wang, Q.G., Huang, B., and Guo, X. (2000). Auto-tuning of TITO decoupling controllers from step tests. *ISA Transactions*.
- Wood, R. and Berry, M. (1973). Terminal composition control of a binary distillation column. *Chemical Engineering Science*.
- Åström, K. J., H.T. (1995). *PID controllers: theory, design, and tuning*. ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society.