

Gradient-Based Extremum Seeking Control Applied to a Dark Fermentation Process

Fernando López-Caamal* Héctor Hernández-Escoto*
Glenda Cea-Barcia** Ixbalank Torres***

* *Departamento de Ingeniería Química, Universidad de Guanajuato,
Noria Alta, C.P. 36050, Guanajuato, México*

** *Departamento de Ingeniería Ambiental, Universidad de Guanajuato,
Ex Hacienda el Copal Km 9 Carretera Irapuato-Silao, C.P. 36500,
Irapuato, México*

*** *Departamento de Ingeniería Electrónica, Universidad de
Guanajuato, Carr. Salamanca-Valle de Santiago, Km. 3.5+1.8, C.P.
36885, Salamanca, México*

Abstract: In this paper we use an extremum seeking control strategy to maximize the produced ethanol in a dark fermenter. Such a strategy avails of a continuous estimation of the reactor's input-output gradient to compute the dilution rate applied to the reactor. This dilution rate, however, is updated at discrete moments. We consider a scenario in which tequila vinasse is the raw material for this fermentation process; thereby reducing the concentrations of sugars in the vinasse and at the same time obtaining ethanol. Via numerical simulations we show the applicability of the strategy when the optimal concentration of ethanol varies in time as step functions.

Keywords: Alcoholic fermentation, Extremum Seeking Control, Differentiators, Super-Twisting Algorithm

1. INTRODUCTION

La fermentación es un proceso en el cual un microorganismo utiliza compuestos orgánicos para producir energía para su metabolismo. En condiciones anaerobias y sin presencia de luz, y dependiendo del microorganismo, los productos obtenidos varían desde etanol a acetato y lactato (Müller, 2001).

Como cualquier proceso bio/químico el substrato no se consume por completo y por tanto se tiene un remanente del mismo una vez terminado el proceso. Éste es el caso de la fermentación, en particular la que sucede en la industria tequilera, donde los residuos de la fermentación, denominados vinaza tequilera, llegan a tener un contenido de 4 a 20 [g /L] de azúcares reductores (López-López et al., 2010). Es en este contexto que consideramos esta vinaza como materia prima para un proceso de fermentación cuyo objetivo es producir la máxima cantidad de etanol.

Para lograr dicho objetivo en simulación numérica, utilizamos una estrategia de control de búsqueda de extremos. Dicha estrategia se basa en la estimación del gradiente entrada-salida del proceso, para realizar acciones de control de manera que el gradiente sea lo más cercano a cero y por tanto, la salida del proceso se encuentre cerca de un máximo o mínimo en el estado estacionario.

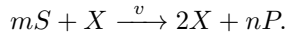
En este artículo, utilizamos los resultados mostrados en (Torres-Zúñiga et al., 2021) para maximizar la cantidad de etanol producida en un proceso de fermentación oscura, cuantificada a través de la productividad del reactor. Es decir, nuestra función objetivo para maximizar es el producto de la tasa de dilución multiplicada por la concentración de etanol producido en el reactor. Como variable de control utilizamos la tasa de dilución. Los resultados obtenidos por simulación numérica muestran que el controlador de búsqueda de extremos es capaz de seguir un óptimo variante en el tiempo en forma de funciones escalones, cuando éste se mantiene constante por un intervalo de tiempo suficientemente largo para permitir la convergencia.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se presenta el modelo del proceso de fermentación de interés y se discute la convexidad del mapa entrada-salida. En la sección 3 se presenta el problema de optimización a resolver y se describe el algoritmo de control de búsqueda de extremos. En la sección 4 se discuten los resultados. Finalmente, en la sección 5 se hacen algunas conclusiones sobre el trabajo desarrollado.

2. MODELO MATEMÁTICO

2.1 Modelo de fermentación

En esta sección consideramos un proceso fermentativo en el que el substrato S es consumido por la biomasa X dando como resultado el crecimiento de la biomasa y el alcohol P producto de la fermentación. Es decir



Al definir $\mathbf{c}(t) = ([S] [X] [P])^\top$ utilizamos la siguiente tasa de reacción

$$v_1(c_1, c_2) = k_1 \frac{c_1 c_2}{c_1^2 + k_2 c_1 + k_3} \left(1 - \frac{c_2}{k_4}\right)^{k_5}, \quad (1)$$

que representa una tasa de reacción de tipo Haldane (Andrews, 1968) con un término inhibitorio debido a altas concentraciones de biomasa (Andrietta, 1994). De esta manera el modelo matemático resulta

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \\ n \end{pmatrix} k_1 \frac{c_1 c_2}{c_1^2 + k_2 c_1 + k_3} \left(1 - \frac{c_2}{k_4}\right)^{k_5} + u(t) (\mathbf{c}_{in} - \mathbf{c}) \quad (2a)$$

$$y(t) = u(t) c_3(t), \quad (2b)$$

donde hemos seleccionado la productividad de etanol del reactor como la salida medida y la tasa de dilución como la entrada de control. Los parámetros utilizados en este modelo son los siguientes

$$k_1 = 922.8228 [g/(Lh)] \quad (3a)$$

$$k_2 = 1.8947 \times 10^3 [g/L] \quad (3b)$$

$$k_3 = 114.4452 [(g/L)^2] \quad (3c)$$

$$k_4 = 100 [g/L] \quad (3d)$$

$$k_5 = 0.9 [1] \quad (3e)$$

$$m = 30.3 \quad (3f)$$

$$n = 7. \quad (3g)$$

Al considerar que la materia prima del reactor es una vinaza tequilera, consideramos que

$$\mathbf{c}_{in} = \begin{pmatrix} s_{in}(t) \\ 0.4785 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con s_{in} una función escalón de diferentes niveles entre 4 y 20 [g/L]. El Modelo (2) puede ser escrito en manera compacta como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) = \mathbf{N}\mathbf{v}(\mathbf{c}) + \mathbf{u}(t) (\mathbf{c}_{in} - \mathbf{c}), \quad (4a)$$

donde

$$\mathbf{N} = (-m \ 1 \ n)^\top \quad (4b)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{c}) = k_1 \frac{c_1 c_2}{c_1^2 + k_2 c_1 + k_3} \left(1 - \frac{c_2}{k_4}\right)^{k_5}. \quad (4c)$$

2.2 Estados estacionarios y mapeo entrada-salida

En esta sección mostramos que el mapa entrada-salida del modelo en (2) es convexo y unimodal, de manera que el

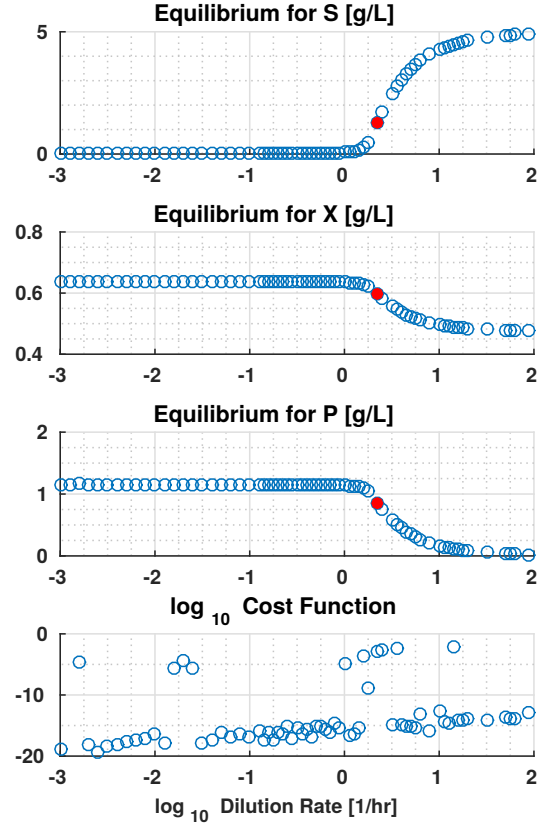


Fig. 1. Puntos de equilibrio con $s_{in} = 5$ [g /L].

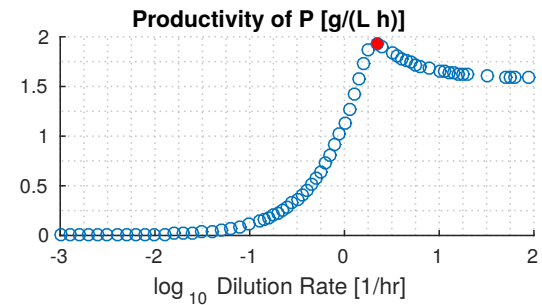


Fig. 2. Productividad con $s_{in} = 5$ [g /L].

problema de optimización pueda ser resuelto por medio de una estrategia de búsqueda de extremos.

Para ello, calculamos los puntos de equilibrio por medio de la rutina de optimización no lineal *fminsearch*, cuya función objetivo a minimizar es

$$\bar{\mathbf{c}}(u) = \min \|\mathbf{N}\mathbf{v}(\mathbf{c}) + u(\mathbf{c}_{in} - \mathbf{c})\|_1, \quad (5)$$

considerando que \mathbf{c}_{in} es constante en el proceso de optimización. Es decir, la rutina de optimización no lineal busca minimizar cada elemento de $\mathbf{N}\mathbf{v}(\mathbf{c}) + u(\mathbf{c}_{in} - \mathbf{c})$ para estimar el punto de equilibrio para una tasa de dilución dada. Al repetir el procedimiento para un cierto

rango de tasas de dilución, las Figuras 1, 3 y 5 muestran la localización del punto de equilibrio para diferentes concentraciones de sustrato en el flujo de entrada del reactor. En estas figuras, el panel inferior se muestra el valor de la función objetivo (5) en escala logarítmica.

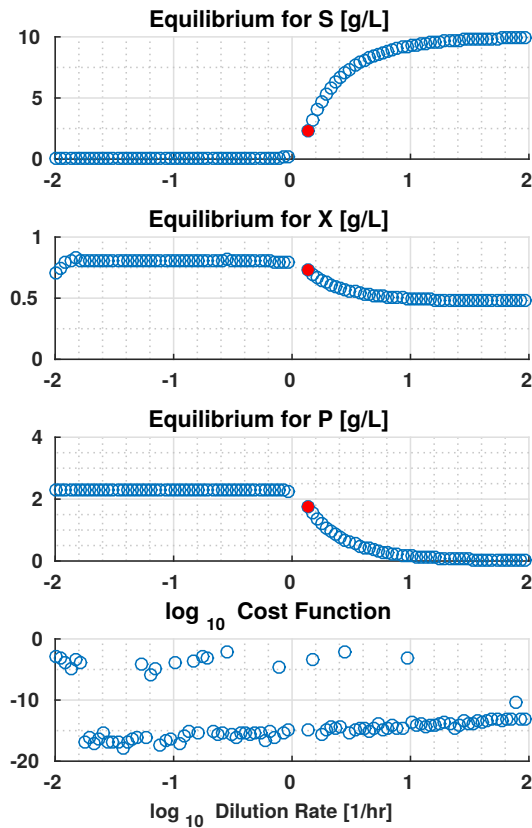


Fig. 3. Puntos de equilibrio con $s_{in} = 10$ [g /L].

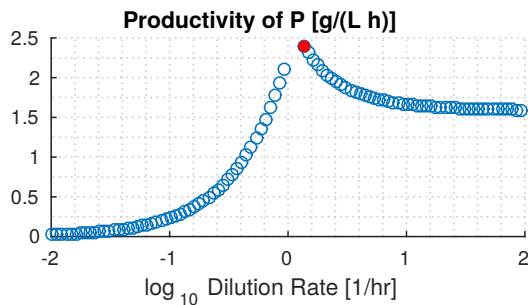


Fig. 4. Productividad con $s_{in} = 10$ [g /L].

Por otra parte, las Figuras 2, 4 y 6 muestran la convexidad del mapa productividad vs. tasa de dilución, de manera que este sistema con esta entrada y salida es candidato a ser controlado por medio de la estrategia de control de búsqueda de extremos, como se describe en la siguiente

sección. En las Figuras 1 a la 6 el marcador rojo indica las características de máxima productividad.

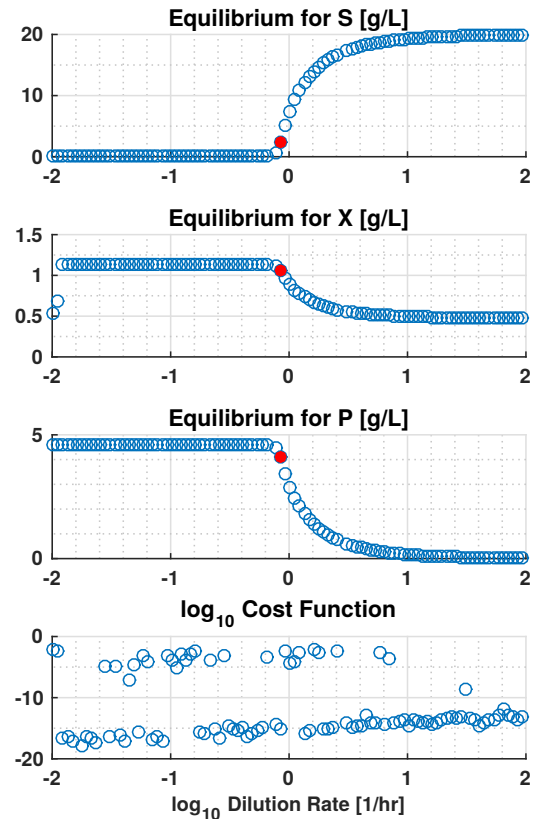


Fig. 5. Puntos de equilibrio con $s_{in} = 20$ [g /L].

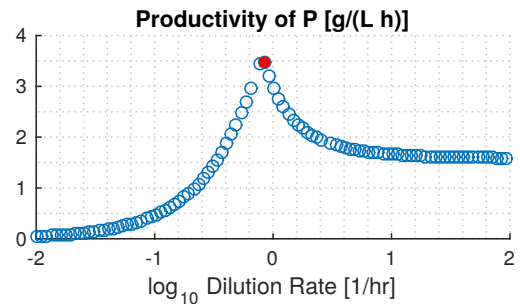


Fig. 6. Productividad con $s_{in} = 20$ [g /L].

3. CONTROL DE BÚQUEDA DE EXTREMOS

En la sección previa se demostró que el mapa *Productividad vs. Tasa de Dilución* en estado estacionario es convexo y, por lo tanto, factible para implementar estrategias de control de búsqueda de extremos. Como se describió previamente, nuestro objetivo es maximizar en estado estacionario la productividad de etanol dentro del

reactor, actualizando en línea la tasa de dilución. Tal problema de optimización puede ser planteado como:

$$\begin{aligned} & \max_{u \in \mathbb{R}_+} J(u) & (6) \\ \text{subject to } & \begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) = \mathbf{N}\mathbf{v}(\mathbf{c}) + u(\mathbf{c}_{\text{in}} - \mathbf{c}) \\ J(t) = c_3(t)u(t). \end{cases} \end{aligned}$$

donde $J(u)$ es el mapa de entrada-salida *desconocido* en estado estacionario. Para resolver este problema de optimización, utilizamos nuestra estrategia de búsqueda de extremos basada en el algoritmo Super-Twisting (Torres-Zúñiga et al., 2021).

Consideremos el algoritmo Super-Twisting

$$\begin{aligned} u(t) &= -\lambda|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) + u_1(t), & (7) \\ \dot{u}_1(t) &= -\alpha \text{sign}(\sigma), \end{aligned}$$

donde $\alpha, \lambda > 0$, y σ es una variable deslizante (Shtessel et al., 2014).

Considerando $\sigma := -dJ/du$, el controlador de búsqueda de extremos basado en el algoritmo (7) genera la entrada de control $u(t)$ que maximiza la función objetivo $J(u(t))$ en estado estacionario (Torres-Zúñiga et al., 2021).

El algoritmo de búsqueda de extremos (7) requiere del gradiente dJ/du . En este trabajo es calculado por medio de un diferenciador basado en el algoritmo Super-Twisting (López-Caamal and Moreno, 2019). Definamos el vector

$$\boldsymbol{\theta} := \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \quad (8)$$

cuya primera derivada respecto al tiempo está dada por

$$\boldsymbol{\omega} := \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{u} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Debido a que $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ es acotado elemento por elemento, una estimación en tiempo finito de $\boldsymbol{\omega}(t)$ se puede obtener por medio de

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) &= -k_1\boldsymbol{\phi}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) + \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}(t) &= -k_2\boldsymbol{\phi}_2(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ($\hat{\boldsymbol{\omega}}$, resp.) denota la estimación de $\boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\omega}$, resp.), y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{x}) &:= (\eta\|\mathbf{x}(t)\|_2^{-p} + \beta + \gamma\|\mathbf{x}(t)\|_2^q)\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{0}) := \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\phi}_2(\mathbf{x}) &:= (\eta(1-p)\|\mathbf{x}(t)\|_2^{-p} + \beta + \gamma(1+q)\|\mathbf{x}(t)\|_2^q)\boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\|\mathbf{x}(t)\|_2 := \sqrt{\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{x}(t)}$. Adicionalmente, $\eta, \beta, \gamma > 0$, $\frac{1}{2} \geq p > 0$, y $q > 0$; además, k_1 y k_2 deben ser propuestos de manera que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 1 \\ -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

sea Hurwitz. Así, el estimado del gradiente del mapa entrada-salida puede ser calculado como

$$\frac{dJ}{du} := \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_2}. \quad (13)$$

4. RESULTADOS

En esta sección aplicamos el control (7) con los parámetros

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.0035 \\ \lambda &= 0.0025, \end{aligned}$$

aunado al diferenciador (10) con

$$\begin{aligned} \eta &= 0.03 \\ \beta &= 0.025 \\ \gamma &= 1 \\ p &= 0.3 \\ q &= 0.5 \\ \kappa_1 &= 1 \\ \kappa_2 &= 1. \end{aligned}$$

Además consideramos que la concentración de substrato a la entrada varía de la siguiente manera

$$s_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 5 & t \leq 2880 \\ 20 & 2880 < t < 5760 \\ 10 & t \geq 5760. \end{cases}$$

Dado que la concentración del substrato a la entrada varía en el tiempo, las condiciones óptimas del reactor también varían en el tiempo. Sin embargo, estas variaciones son escalones de diferentes magnitudes de manera que se mantienen constantes por intervalos grandes tiempo. Como puede observarse de la ecuación anterior, las concentraciones de substrato a la entrada siguen la secuencia 5, 20, 10 [g/L]. Las condiciones óptimas para estos valores de s_{in} son

- Para $s_{\text{in}} = 5$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 1.2661 \\ 0.5962 \\ 0.8614 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{J} \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 2.2387 \\ 1.9285 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Para $s_{\text{in}} = 20$

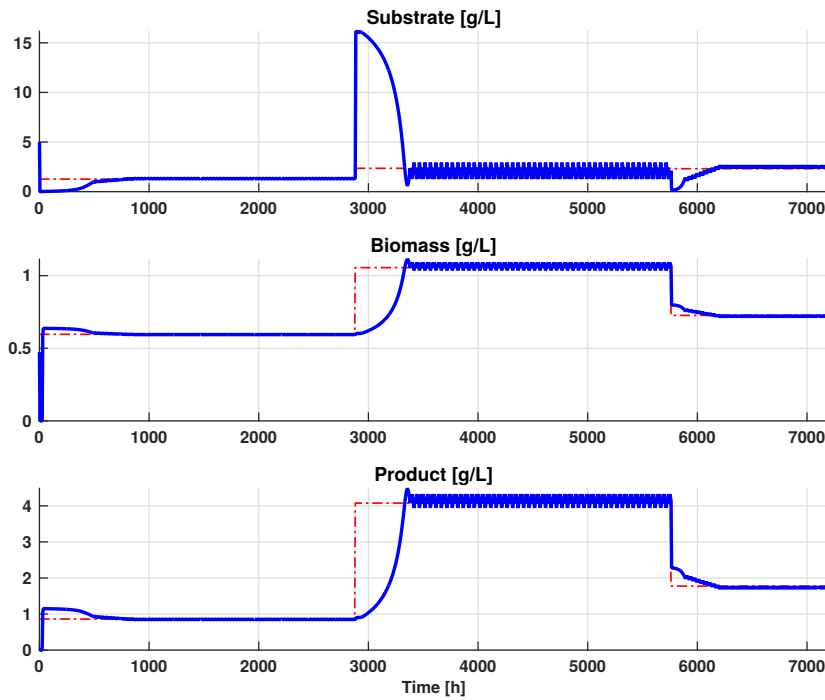


Fig. 7. Dinámica de la concentraciones en el fermentador.

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.3525 \\ 1.0552 \\ 4.0770 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{J} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.8511 \\ 3.4701 \end{pmatrix}$$

- Para $s_{in} = 10$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.3146 \\ 0.7264 \\ 1.7755 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{J} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.3490 \\ 2.3951 \end{pmatrix}$$

Bajo estas condiciones, la dinámica de las concentraciones del reactor se muestran en la Figura 7, donde la línea continua representa la concentración de las diferentes especies, mientras que la línea discontinua representa el punto de equilibrio para las condiciones óptimas con las entrada desconocida $s_{in}(t)$. Como puede observarse, el sistema controlado es capaz de regular a las concentraciones óptimas.

A su vez, la Figura 8 muestra la tasa de dilución calculada por el controlador, así como la productividad obtenida en los diferentes intervalos de tiempo. Resulta interesante notar que con los mismos parámetros del controlador es posible regular a las condiciones óptimas variantes en el tiempo, como se puede ver en el panel intermedio de la

Figura 8. En el panel inferior de esta misma figura, se puede ver que el gradiente estimado ronda el valor de cero, indicando que efectivamente, después de un periodo transitorio, se logra llegar a la productividad óptima.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el modelo de un proceso de fermentación para producción de etanol. Debido a que el mapa entrada-salida es convexo, se utilizó una estrategia de búsqueda de extremos basada en el gradiente del mapa entrada-salida para maximizar la productividad. Los resultados mostraron que la productividad del proceso fue correctamente maximizada para diferentes concentraciones del sustrato en la entrada, las cuales correspondieron a concentraciones en vinazas de la industria tequilera. El etanol producido puede usarse para la fabricación de desinfectante. Por otro lado, la concentración del sustrato a la salida se redujo considerablemente, obteniendo así un residuo menos contaminante. Claramente, los tiempos de convergencia son lentos, por lo que representan una variable a mejorar en el futuro.

ACKNOWLEDGEMENTS

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo de la DAIP-UG a través del proyecto 246/2022 y del programa Sistema Nacional de Investigadores (SNI) del CONACyT.

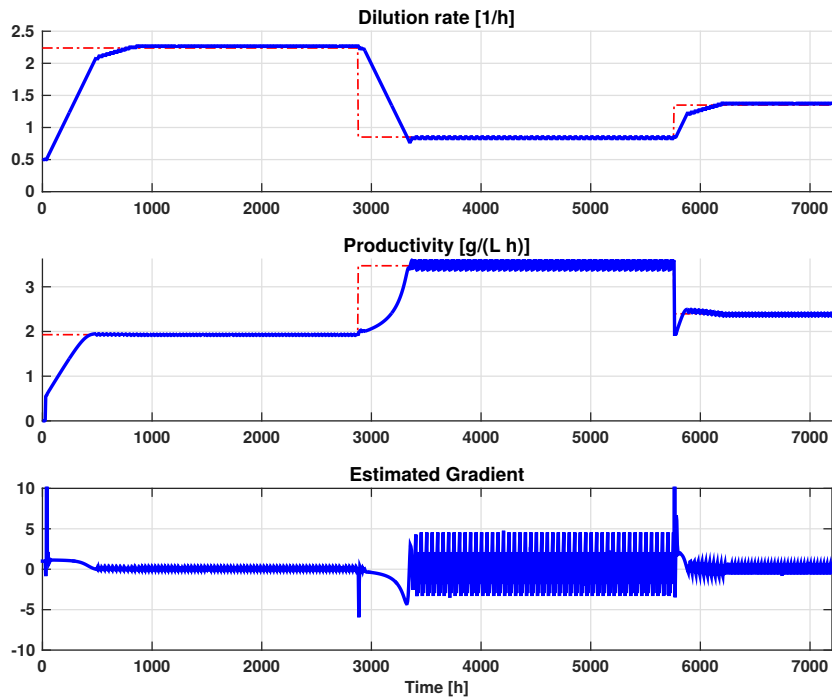


Fig. 8. Tasa de dilución y productividad del sistema (2) con el control (7).

REFERENCES

- Andrews, J.F. (1968). A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates. *Biotechnology and Bioengineering*, 10(6), 707–723.
- Andrietta, S.R. (1994). Modelagem, simulação e controle de fermentação alcoólica contínua em escala industrial. Unicamp.
- López-Caamal, F. and Moreno, J.A. (2019). Generalised multivariable supertwisting algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3), 634–660.
- López-López, A., Dávila-Vázquez, G., León-Becerril, E., Villegas-García, E., and Gallardo-Valdez, J. (2010). Tequila vinasses: generation and full scale treatment processes. *Reviews in Environmental Science and Bio/Technology*, 9(2), 109–116.
- Müller, V. (2001). Bacterial fermentation. *Encyclopedia of Life Sciences*.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*. Springer.
- Torres-Zúñiga, I., Lopez-Caamal, F., Hernandez-Escoto, H., and Alcaraz-Gonzalez, V. (2021). Extremum seeking control and gradient estimation based on the supertwisting algorithm. *Journal of Process Control*, 105, 223–235.