

Proporcional Integral Observer Design for Takagi-Sugeno system applied to a knee rehabilitator

Janeth Jiménez-Gómez * Gloria-L. Osorio-Gordillo *
Carlos-M. Astorga-Zaragoza * Rodolfo-A. Vargas-Méndez *

* *Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado
Palmira S/N, Col. Palmira, 62490 Cuernavaca, Mor. México.
e-mail:m21ce035@cenidet.tecnm.mx*

Abstract: This paper presents the proportional integral observer (PIO) design for Takagi-Sugeno system using the nonlinear sector approach. This observer improves the state estimation due to the integral part. Lyapunov functions are used to analyze the stability of the error dynamic of the observer. Stability conditions are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs). The effectiveness of the proposed approach is illustrated by a knee rehabilitator robot.

Keywords: Proportional integral observer, Takagi-Sugeno, Nonlinear sector, Knee rehabilitator robot

1. INTRODUCCIÓN

Por definición, un observador se basa en el modelo de un sistema en conjunto con sus señales de entrada-salida para generar una estimación de los estados del sistema, los cuales, pueden emplearse para fines de control, monitoreo, detección de fallas, etc. Ogata (2003).

El uso de los observadores en el diseño de sistemas de control, es una herramienta útil, ya que muchas veces no se cuenta con la medición de todas las variables de estado para fines de control, para lo cual es necesario estimar el resto de variables (Guadarrama-Estrada et al., 2020).

Existen diferentes estructuras aplicables a los observadores, en este artículo se trabajará en un observador proporcional integral (PIO). Este tipo de observador se ha reportado para diversas aplicaciones, en Do et al. (2020) los autores proponen el diseño PIO con control robusto por retroalimentación de estado para un sistema lineal de parámetros variantes (LPV). En Youssef et al. (2014) se plantea el diseño de PIO de entradas desconocidas para modelos Takagi-Sugeno sujetos a variables premisas no medibles. Zhao et al. (2020) propone una estructura nueva para el diseño de un PIO para una clase de redes neuronales recurrentes (RNN) en tiempo discreto.

Los modelos matemáticos que describen a un sistema, tienen diferentes representaciones. Entre esas representaciones se encuentra la forma Takagi-Sugeno la cual se basa en reglas difusas IF-THEN, estas reglas representan relaciones locales lineales de entrada y salida de un sistema no lineal. La principal característica de los modelos Takagi-Sugeno es expresar la dinámica local de cada

implicación difusa (regla) por un modelo afín o lineal, válido localmente en una región correspondiente. El modelo difuso global se consigue mediante una combinación de los modelos locales lineales. De acuerdo con Bernal et al. (2019) un primer intento de acercar el control difuso al control tradicional y con ello formalizar matemáticamente el diseño de controladores lo constituyó el trabajo de Takagi y Sugeno en 1985.

El enfoque Takagi-Sugeno por sector no lineal es uno de los enfoques más utilizados, ya que puede obtener una representación exacta de un sistema no lineal dado en un conjunto interpolado de modelos locales lineales.

El caso de estudio que compete este artículo es un robot rehabilitador de rodilla, basado en el rehabilitador Multi-Iso. En (Seddiki et al., 2006) se planteó este rehabilitador mediante el uso del enfoque Takagi-Sugeno por el sector no lineal, el cual se utilizó para control de seguimiento de trayectoria para establecer rutinas de rehabilitación.

La aportación de esta investigación, es el diseño de un observador proporcional integral de orden completo para la estimación de las variables estado de un sistema, a través del enfoque Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal, aplicado a un robot rehabilitador de rodilla. Se optó por el diseño de un observador del tipo proporcional integral, debido a que este nos permite minimizar el error de estimación en estado estacionario. Esta estimación puede ser útil para fines de control, monitoreo, detección de fallas, y otros.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere un sistema no lineal continuo en su representación Takagi-Sugeno (T-S) como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de la variable medida de salida. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son matrices conocidas, k es el número de modelos locales, φ_i son funciones de ponderación convexas que dependen de la variable premisa z .

De acuerdo con Lendek et al. (2011), la suma convexa de las funciones de ponderación debe cumplir con las siguientes propiedades.

$$1 \geq \varphi_i(z) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) = 1; \quad (3)$$

Suposición 1. Considere que la siguiente condición de observabilidad se cumple para cada uno de los k modelos locales.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = [1, \dots, k] \quad (4)$$

El Observador Proporcional Integral (PIO) aplicado al sistema T-S (2) está dado por

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)) + Ju(t) \quad (5)$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (6)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Qy(t) \quad (7)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ es un vector auxiliar y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $x(t)$. Las matrices N_i, H_i, F_i, J y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas que son determinadas de forma tal que $\hat{x}(t)$ converja asintóticamente a $x(t)$. En la Fig. 1 se muestra el diagrama a bloques de la conexión entre el sistema y el PIO.

Se define la función del error de estimación como:

$$\begin{aligned} e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ &= \zeta(t) - (I_n - QC)x(t) \end{aligned} \quad (8)$$

donde $(I_n - QC)$ se define como una matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de modo que la dinámica del error de estimación puede ser expresada como:

$$e(t) = \zeta(t) - Tx(t) \quad (9)$$

derivando la expresión anterior se obtiene la dinámica del error de estimación

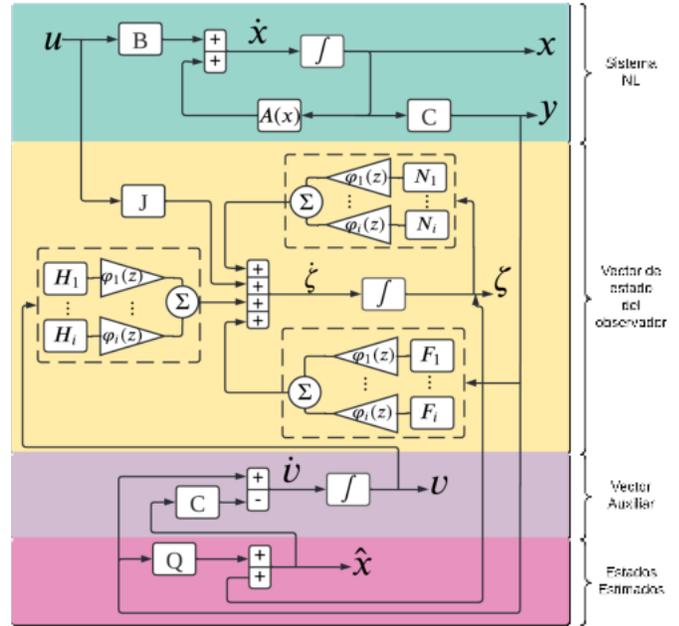


Fig. 1. Diagrama a bloques de la conexión entre el sistema y el observador

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(N_i e(t) + H_i v(t) + (N_i T + F_i C - TA_i)x(t) + (J - TB)u(t)) \quad (10)$$

usando la definición de $e(t)$ reescribimos (6)

$$\dot{v}(t) = -Ce(t) \quad (11)$$

Suponiendo que se cumplen las siguientes condiciones

- $T + QC = I_n$
- $N_i T + F_i C - TA_i = 0$
- $J = TB$

Entonces, la dinámica del error de estimación, formada por (10) y (11), puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\beta}(t)} = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\beta(t)} \quad (12)$$

Si la matriz \mathbb{A}_i es estable, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, por lo tanto, $\hat{x}(t) = x(t)$ en un tiempo finito.

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR

3.1 Parametrización del observador

En esta sección se presenta la parametrización de las matrices del observador proporcional integral utilizando las condiciones algebraicas a)-c).

Considere la matriz de la forma $\Sigma = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ tal que la condición a) puede escribirse como:

$$[T \ Q] \Sigma = I_n \quad (13)$$

la solución general de (13) está dada por

$$[T \ Q] = \Sigma^+ - Y (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \quad (14)$$

donde la matriz T y Q se definen como:

$$T = \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{T_1} - Y \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+)}_{T_2} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$Q = \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{Q_1} - Y \underbrace{(I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+)}_{Q_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (16)$$

La matriz Y es una matriz arbitraria de dimensiones apropiadas y Σ^+ es la matriz inversa generalizada de Σ .

Tomando la condición b) y considerando la definición de T y Q mostrada en (15) y (16) se tiene que:

$$N_i = K_i C + T_1 A_i - Y T_2 A_i \quad (17)$$

donde $K_i = N_i Q - F_i$ despejando F_i , se obtiene:

$$F_i = N_i Q - K_i \quad (18)$$

Reemplazando la ecuación (17) en el error dinámico del observador (12) se puede reescribir como:

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z) (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \beta(t) \quad (19)$$

donde $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} T_1 A_i - Y T_2 A_i & 0 \\ C & I_p \end{bmatrix}$, $\mathbb{Y}_i = \Omega [K_i \ H_i]$, y $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$, tal que $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$. El problema para el diseño del PIO se reduce a determinar la matriz Y y los parámetros de la matriz \mathbb{Y}_i , tal que (19) sea estable.

3.2 Análisis de estabilidad del observador

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad del PIO basado en Lyapunov, con el cual a través de la resolución de desigualdades matriciales lineales (LMI) se obtendrán las matrices Y , \mathbb{Y}_i .

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\beta(t)) = \beta(t)^T P \beta(t) > 0 \quad (20)$$

donde $P = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$ y $X_1 = X_1^T$ con $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $X_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$.

derivando (20) se obtiene:

$$\dot{V}(\beta(t)) = \dot{\beta}(t)^T P \beta(t) + \beta(t)^T P \dot{\beta}(t) < 0 \quad (21)$$

Sustituyendo (19) en (21):

$$\dot{V}(\beta(t)) = \beta(t)^T [(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T P + P(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)] \beta(t) < 0 \quad (22)$$

la desigualdad $\dot{V}(\beta(t)) < 0$ es válido para toda $\beta(t) \neq 0$, si y sólo si

$$\mathbb{A}_{1i}^T P + \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T P + P \mathbb{A}_{1i} + P \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (23)$$

Las matrices desconocidas en (23) son: P y \mathbb{Y}_i , por lo que existe una bilinealidad, es por ello que se agrupan en $\mathbb{W}_i = P \mathbb{Y}_i$, entonces

$$\mathbb{A}_{1i}^T P + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + P \mathbb{A}_{1i} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (24)$$

Recordemos que, dentro de la matriz \mathbb{A}_{1i} se desconoce la matriz Y , por lo que el producto de

$$P \mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - X_1 Y T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

dentro de esta matriz existe una bilinealidad generada por, Y y X_1 por lo que se reagrupan en $D = X_1 Y$.

Por lo tanto, la desigualdad (24) queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_i^T T_1^T X_1^T - A_i^T T_2^T D^T & -C^T X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - D T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (26)$$

Para el cálculo de las matrices desconocidas se tiene:

$$Y = X_1^{-1} D \quad (27)$$

$$\mathbb{Y}_i = P^{-1} \mathbb{W}_i \quad (28)$$

Despejando de $\mathbb{Y}_i = \Omega [K_i \ H_i]$ las matrices K_i y H_i se obtiene:

$$[K_i \ H_i] = \Omega^+ \mathbb{Y}_i \quad (29)$$

Con base en el análisis hecho, la determinación de las matrices N_i y F_i son obtenidas de la solución de (17) y (18). La matriz H_i y K_i están deducidas en (29), las matrices T y Q se obtienen de la solución de (15) y (16). La matriz Y está definida en (27) y finalmente J está deducida en la consideración c).

4. CASO DE ESTUDIO

4.1 Modelo dinámico de un rehabilitador de rodilla

En la literatura existen diversos rehabilitadores de rodilla, como lo son el rehabilitador Sys-Réeduc, iLeg, Physiotherabot (Seddiki et al. (2007), Hu et al. (2012), Akdoğan and Adli (2011)) entre otros. El rehabilitador con el que se trabaja es el rehabilitador Multi-Iso. De acuerdo con (Moughamir et al., 2002) este rehabilitador apoya a pacientes que sufren traumatismo articular y/o muscular. Genera movimientos de flexión - extensión en la rodilla y posee un solo grado de libertad (DOF) el diagrama de cuerpo libre se muestra en Fig. 2.

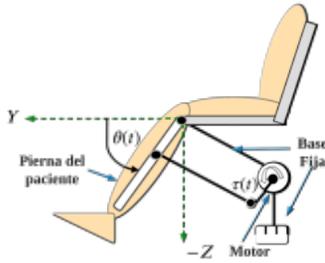


Fig. 2. Diagrama de cuerpo libre del rehabilitador de rodilla

En la Fig. 2 se puede observar que el rehabilitador genera un movimiento del tipo vertical en el eje Y hacia Z . $\theta(t)$ es el margen de movimiento del rehabilitador $[0^\circ \ 150^\circ]$ el cambio de posición se debe al par $\tau(t)$ aplicado por motor. En el análisis de distribución de energía, se considera que la energía potencial es nula en el eje Y ya solo se genera movimiento vertical.

El modelo dinámico de este rehabilitador se basó en una máquina de ejercicio isocinético (Pruski and Knops, 2005). El modelo está descrito por la siguiente ecuación:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) - mgl \cos(\theta(t)) = \tau(t) \quad (30)$$

Los valores de los parámetros aplicados en el sistema se muestran en Tabla 1 (Shen et al., 2020).

Tabla 1. Parámetros numéricos del modelo dinámico del rehabilitador.

Parámetro	Nombre	Valor
m	Masa	5 Kg
l	Longitud	0.45 m
g	Gravedad	9.81 m/s ²
b	Coefficiente de fricción viscosa	5 Nm s/rad
τ	Par aplicado por el motor	21.5 Nm

4.2 Formulación de Takagi-Sugeno por el enfoque de sector no lineal

Una de las principales características del enfoque de sector no lineal, es que puede representar fielmente un modelo no lineal por medio de un conjunto de modelos lineales, los cuales se interpolan a través de reglas difusas $\varphi_i(z)$ Flores-Hernández et al. (2018). Este enfoque se describe en el siguiente algoritmo:

- (1) Se escribe la ecuación diferencial (30) del sistema en su representación de espacios de estados, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (31)$$

donde $x(t) = [\theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$, $u(t) = \tau(t)$, $y(t) = \theta(t)$

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g \cos(\theta(t))}{l\theta} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$C = [1 \ 0] \quad (33)$$

Dependiendo el sistema, algunos de los elementos de las matrices A y B pueden depender de estados o entradas del sistema.

- (2) Se identifican los γ términos no constantes del sistema, estos términos pueden encontrarse en las matrices A y B .

$$\gamma = 1 \quad (34)$$

En (32) existe una no linealidad en la matriz $A(x(t))$ la cual es llamada variable premisa z_j donde $j = 1, 2, \dots, \gamma$ por lo tanto,

$$z_1 = \frac{g \cos(\theta(t))}{l\theta} \quad (35)$$

- (3) Se define el escenario de prueba, esta depende de la entrada $\tau(t)$ mostrada en la Fig. 3 el cual permite un rango de movimiento en $\theta(t) \in [1.588 \ 2.689] \text{ rad}$, para después evaluar este rango en la variable premisa (35) y así obtener el valor máximo (\bar{z}_j) y mínimo (\underline{z}_j) de la variable premisa $z_j \in [\underline{z}_j, \bar{z}_j]$. Por lo tanto,

$$z_1 \in [-7.2912 \ -0.2395] \quad (36)$$

- (4) Se definen las funciones de ponderación $\eta_0^j(z_j)$ del sistema T-S. Por cada variable premisa, hay dos funciones de ponderación η_0^j, η_1^j las cuales son:

$$\eta_0^1(z_1) = \frac{\bar{z}_1 - z_1}{\bar{z}_1 - \underline{z}_1} \quad (37)$$

$$\eta_1^1(z_1) = 1 - \eta_0^1 \quad (38)$$

- (5) Se definen las reglas difusas $\varphi_i(z_j)$

$$\varphi_i(z_j) = \prod_{j=1}^{\gamma} \eta_{\lambda}^j(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, \gamma \quad (39)$$

donde $i = 1, 2, \dots, 2^\gamma$ y λ es cero o uno. Las reglas difusas indican el grado de participación de cada uno de los modelos locales lineales, por lo tanto,

$$\varphi_1(z_1) = \eta_0^1; \quad (40)$$

$$\varphi_2(z_1) = \eta_1^1; \quad (41)$$

- (6) Se determinan los modelos locales, utilizando los valores máximos y mínimos de variación de z_1 (36) se definen las combinaciones posibles, encontrando $k = 2^\gamma$ modelos locales lineales.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (42)$$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{z}_j - \frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underline{z}_j - \frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$ y las matrices B, C se definen en (32) y (33).

De modo que la representación del sistema T-S por el enfoque de sector no lineal se reduce a:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(z)(A_i x(t)) + Bu(t) \quad (43)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (44)$$

La simulación del sistema no lineal (30) y su representación por modelos T-S se muestra en la Fig. 3. Como se puede observar, el modelo T-S sigue fielmente al modelo no lineal del rehabilitador.

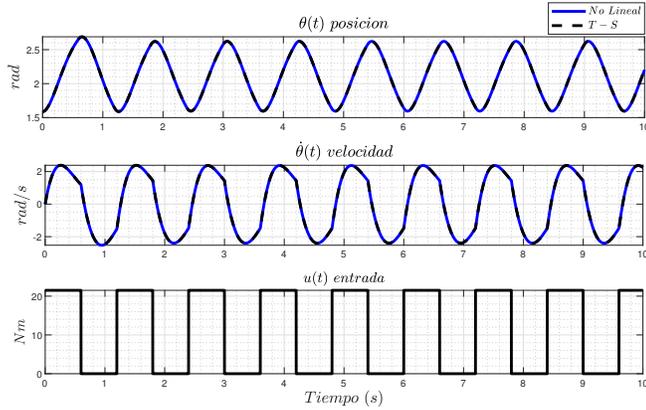


Fig. 3. Respuesta del sistema no lineal y su representación en Takagi-Sugeno

5. RESULTADOS

5.1 Región LMI

Con la finalidad de que el observador respete la región de operación de las variables a estimar del rehabilitador, se aplica una región LMI del tipo vertical en el análisis de estabilidad del observador mostrado en la Sección 3.2. Esta región LMI se caracteriza por la siguiente función.

$$f(s) = s^T + s + 2\delta \quad (45)$$

donde δ es un número constante positivo. Por otro lado, aplicando esta región de solución a la desigualdad de Lyapunov mostrada en la ecuación (26), obtenemos

$$\begin{bmatrix} A_i^T T_1^T X_1^T - A_i^T T_2^T D^T & -C^T X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{W}_i^T + \begin{bmatrix} X_1 T_1 A_i - D T_2 A_i & 0 \\ -X_2 C & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{W}_i \mathbb{A}_2 + 2\delta P < 0 \quad (46)$$

5.2 Resultados de simulación

Aplicando el PIO diseñado en la sección 3 al sistema (43-44) se obtienen las siguientes matrices.

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= \begin{bmatrix} -3.5000 & 2.1327 \\ -2.1327 & -3.5000 \end{bmatrix}, \\ H_1 = H_2 &= \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= \begin{bmatrix} 4.3970 \\ 2.2911 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 4.3970 \\ 9.3428 \end{bmatrix}, \\ J &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9877 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1.1327 \\ -1.4383 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

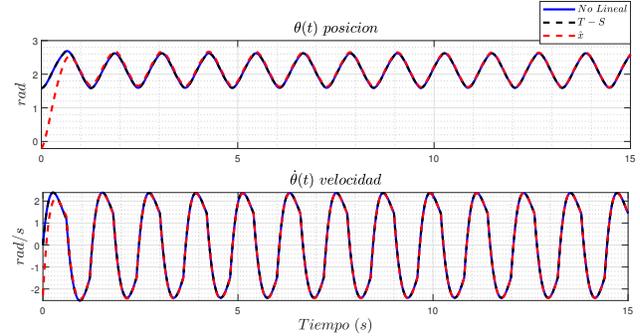


Fig. 4. Estimación de los estados del sistema

En la Fig. 4 se muestra en color azul el comportamiento del sistema no lineal, en color negro el sistema en su representación T-S y en color rojo se muestra el comportamiento del PIO al estimar las variables de estados del sistema.

Se aplicaron cuatro índices de desempeño: La integral del error cuadrático (ISE), la integral del tiempo por el error cuadrático (ITSE), la integral del error absoluto (IAE) y la integral del tiempo por el error absoluto (ITAE). Con el objetivo de mostrar de forma analítica el desempeño del observador. Los índices se muestran en la Tabla 2. En estos índices se puede observar que el PIO cumple con las características de su diseño, el cual es reducir el error de estimación en el estado estacionario debido a la parte integral que este posee en su estructura.

Tabla 2. Índices de desempeño del observador

PIO	Error	
	Posición	Velocidad
ISE	0.7541	0.4494
ITSE	0.1964	0.0633
IAE	1.022	0.6104
ITAE	2	1.209

6. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una metodología para el diseño de un observador proporcional integral de orden completo, para sistemas no lineales con representación Takagi-Sugeno por medio del enfoque de sector no lineal. Para asegurar que el comportamiento del observador sea estable se propuso una función de Lyapunov, la

cual a través de la solución de una serie de LMIs y la aplicación de una región LMI nos proporcionó las condiciones necesarias para la estabilidad del observador.

El desempeño del observador diseñado se evaluó en robot rehabilitador de rodilla de un grado de libertad, con el que se comprobó que el PIO tiene un buen desempeño.

REFERENCES

- Akdoğan, E. and Adli, M.A. (2011). The design and control of a therapeutic exercise robot for lower limb rehabilitation: Physiotherobot. *Mechatronics*, 21(3), 509–522.
- Bernal, M., Estrada, V., and Márquez, R. (2019). Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales.
- Do, M.H., Koenig, D., and Theilliol, D. (2020). Robust h proportional-integral observer-based controller for uncertain lpv system. *Journal of the Franklin Institute*, 357(4), 2099–2130.
- Flores-Hernández, A., Reyes-Reyes, J., Astorga-Zaragoza, C., Osorio-Gordillo, G., and García-Beltrán, C. (2018). Temperature control of an alcoholic fermentation process through the takagi–sugeno modeling. *Chemical Engineering Research and Design*, 140, 320–330.
- Guadarrama-Estrada, A.R., Osorio-Gordillo, G.L., Vargas-Méndez, R.A., Saavedra-Benitez, Y.I., and Astorga-Zaragoza, C.M. (2020). Functional generalized dynamic observer for discrete takagi-sugeno systems.
- Hu, J., Hou, Z., Zhang, F., Chen, Y., and Li, P. (2012). Training strategies for a lower limb rehabilitation robot based on impedance control. In *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 6032–6035. IEEE.
- Lendek, Z., Guerra, T.M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*, volume 262. Springer.
- Moughamir, S., Zaytoon, J., Manamanni, N., and Afilal, L. (2002). A system approach for control development of lower-limbs training machines. *Control Engineering Practice*, 10(3), 287–299.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Pruski, A. and Knops, H. (2005). *Assistive Technology: From Virtuality to Reality: AAATE 2005*, volume 16. IOS Press.
- Seddiki, L., Guelton, K., Mansouri, B., and Zaytoon, J. (2006). H-infinity takagi-sugeno fuzzy control of a lower limbs rehabilitation device. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 927–932. IEEE.
- Seddiki, L., Guelton, K., Moughamir, S., Mansouri, B., and Zaytoon, J. (2007). Modélisation ts et commande h-infinie d’une machine de rééducation des membres inférieurs. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 41(2), 199–218.
- Shen, Z., Zhuang, Y., Zhou, J., Gao, J., and Song, R. (2020). Design and test of admittance control with inner adaptive robust position control for a lower limb rehabilitation robot. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 18(1), 134–142.
- Youssef, T., Chadli, M., Karimi, H.R., and Zelmat, M. (2014). Design of unknown inputs proportional integral observers for ts fuzzy models. *Neurocomputing*, 123, 156–165.
- Zhao, D., Wang, Z., Chen, Y., and Wei, G. (2020). Proportional–integral observer design for multidelayed sensor-saturated recurrent neural networks: A dynamic event-triggered protocol. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 50(11), 4619–4632.