

Bl-homogeneous sliding-mode observers for SISO linear time-varying systems with unknown input [★]

René Meléndez-Pérez ^{*} Jaime A. Moreno ^{**} Leonid Fridman ^{*}

^{*} Depto. de Ingeniería de Control y Robótica. División de Ingeniería Eléctrica. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México (e-mails: rene.300@hotmail.com, lfridman@unam.mx).

^{**} Coordinación de Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México (e-mail: jmorenop@iingen.unam.mx).

Abstract: In this article, a family of state observers with bl-homogeneous properties is proposed for a class of linear systems with time-varying coefficients, in presence of an unknown input and with an arbitrary relative degree. The proposed observers converge globally and at least asymptotically to the true states for systems that satisfy the structural property of strong observability. With an adequate selection of gains and parameters the convergence is global and theoretically exact, in finite time or even more, in fixed time.

Keywords: Observers, sliding modes, homogeneity, LTV systems, unknown inputs.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de estimación de variables de estado en sistemas dinámicos con entradas desconocidas es de gran relevancia. Ya que, aunado a la no completa disponibilidad de las variables de estado en un sistema de control, el sistema puede estar sujeto a perturbaciones o incertidumbres no modeladas, que pueden ser consideradas como entradas desconocidas.

En el caso de sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI por sus siglas en ingles), se han desarrollado enfoques robustos, como el filtro de Kalman extendido u observadores de alta ganancia, que suprimen el efecto de entradas desconocidas a través de una inyección lineal con una alta ganancia.

En paralelo con el desarrollo de controladores basados en técnicas de Modos Deslizantes (SM por sus siglas en ingles), observadores basados en estas herramientas han sido ampliamente considerados en la reconstrucción de estados y entradas desconocidas (Spurgeon, 2008; Yan and Edwards, 2007; Barbot et al., 2002) debido a su (más que robusta) insensibilidad a las incertidumbres, proporcionando una estimación teóricamente exacta en tiempo finito en presencia de una familia de entradas desconocidas, que en términos prácticos resulta muy extensa.

En la estimación de estados para sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV por sus siglas en ingles) el problema crece en complejidad, ya que las propiedades y resultados del caso LTI, no son directamente aplicables al caso LTV. Algunos autores han estudiado condiciones para la reconstrucción de los estados, y se han propuesto algunos esquemas de observación. Por ejemplo en Zhang and Clavel (2001); Trumpf (2007) se presentan observadores para sistemas LTV con convergencia asintótica y en Menold et al. (2004) se introduce un observador con convergencia en tiempo finito. Sin embargo, los esquemas propuestos en tales trabajos no consideran entradas desconocidas.

En el caso LTI, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de Observadores con Entradas Desconocidas (UIO por sus siglas en ingles) han sido estudiadas en Silverman (1969); Molinari (1976); Hautus (1983); Kratz (1995) donde el concepto de observabilidad fuerte ha sido introducido. En Kratz and Liebscher (1998) el concepto de observabilidad fuerte es extendido al caso de sistemas LTV.

En Galvan et al. (2016) se propone un esquema de observación en cascada compuesto por un filtro determinístico por mínimos cuadrados mas un diferenciador por Modos Deslizantes de Alto Orden (HOSM por sus siglas en ingles), el primero produce un error de estimación globalmente estable, cuya estimación converge a una región acotada alrededor del origen, mientras que el segundo bloque compensa las discrepancias entre los estados del sistema y

[★] Trabajo apoyado por PAPIIT-UNAM, proyectos IN102121, IN106622, IN102621. Y proyecto CONACYT 282013.

los estados estimados proporcionados por el filtro, que en conjunto resulta en una estimación teóricamente exacta aún en presencia de entradas desconocidas acotadas. Una desventaja es el orden incrementado del observador, que requiere la solución de una ecuación diferencial de Riccati. Además, de producirse un desfase en la estimación.

Finalmente, en Dávila et al. (2022) se propone un observador que evita el uso del esquema en cascada para sistemas con un grado relativo estricto. El sistema se lleva a la forma de observador, de tal manera que un diferenciador de Levant en conjunto con un término lineal produce una compensación total en el error de observación y logra convergencia global y en tiempo finito. Sin embargo, la metodología requiere de suposiciones muy restrictivas sobre los índices de observabilidad admisibles.

1.1 Contribución y estructura del artículo

Se introduce un observador de estados para una familia de sistemas LTV con entradas desconocidas acotadas no desvanecientes. El observador tiene propiedades de homogeneidad en el bi-límite (Andrieu et al., 2008; Moreno, 2021), con convergencia al menos asintótica y hasta en tiempo fijo, es decir, se tiene convergencia en tiempo finito y el tiempo de establecimiento esta acotado por arriba por un valor independiente del valor del error inicial, más aún, las ganancias pueden ser ajustadas para disminuir arbitrariamente la cota del tiempo de convergencia, teniendo así, convergencia en tiempo predefinido.

El observador propuesto tiene la misma dimensión de la planta y no requiere la implementación de un filtro como en Galvan et al. (2016). Además, a diferencia del método propuesto en Dávila et al. (2022), el sistema se lleva a la forma de observabilidad por lo que no es posible cancelar totalmente los términos lineales que caracterizan la dinámica de la planta.

Esta sección concluye con un breve repaso de la notación y algunas definiciones importantes sobre homogeneidad y homogeneidad en el bi-límite. La Sección 2 presenta la formulación del problema y algunas suposiciones necesarias. El resultado principal se presenta en la Sección 3, además de un par de ejemplos y simulaciones por computadora que muestran la efectividad de los observadores. La Sección 4 contiene algunos comentarios y conclusiones sobre el trabajo. El Apéndice contiene la prueba formal de convergencia.

1.2 Preliminares

Para un vector de coordenadas $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\epsilon > 0$ todos los números reales, con $r = (r_1, \dots, r_n)$ una n -tupla de números positivos reales. El operador dilatación está definido como $\Delta_\epsilon^r x = [\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n]^T$, donde los números $r_i > 0$ son referidos como los pesos de las coordenadas.

- Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es r -homogénea de grado l o (r, l) -homogénea, si la igualdad $V(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l V(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall \epsilon > 0$ se mantiene.
- Un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. un conjunto de campos vectoriales $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$) es r -homogéneo de grado l , si $\forall \epsilon > 0$ la igualdad $f(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r f(x)$ (resp. $F(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r F(x)$) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se mantiene.
- Un sistema $\dot{x} = f(x)$ es homogéneo si y solo si f lo es.

Una función $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice homogénea en el límite 0 con una 3-tupla asociada (r_0, l_0, φ_0) si se aproxima cerca de $x = 0$ por una función (r_0, l_0) -homogénea φ_0 . Se dice que es homogéneo en el límite ∞ con una 3-tupla asociada $(r_\infty, l_\infty, \varphi_\infty)$, si cerca de $x = \infty$ se aproxima por la función (r_∞, l_∞) -homogénea φ_∞ . Definiciones similares se aplican a campos vectoriales. En consecuencia, se dice que una función $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (o un campo vectorial o un conjunto de campos vectoriales) es homogénea en el bi-límite o bi-homogénea si es (r_0, l_0) -homogénea en el límite 0 y (r_∞, l_∞) -homogénea en el límite ∞ .

De Kratz and Liebscher (1998) se tiene que

- El par $A(t), C(t)$ se dice observable (en un intervalo $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$) si $\dot{x} = A(t)x, C(t)x \equiv 0$ en \mathcal{I} implica siempre que $x(t) \equiv 0$ en \mathcal{I} .
- La tripleta $A(t), D(t), C(t)$ se dice fuertemente observable (en \mathcal{I}) si $\dot{x} = A(t)x + D(t)\omega, C(t)x \equiv 0$ para alguna entrada ω implica siempre que $x(t) \equiv 0$.

Un sistema LTV $\dot{x} = A(t)x, y = C(t)x$ es observable en un intervalo \mathcal{I} si $\text{rank}[\mathcal{O}(t)] = n$ para todo $t \in \mathcal{I}$, donde $\mathcal{O}(t)$ es la matriz de observabilidad $\mathcal{O}(t) = [N_0(t) \ N_1(t) \ \dots \ N_{n-1}(t)]^T$ con $N_0(t) = C(t)$ y $N_i(t) = N_{i-1}(t)A(t) + \dot{N}_{i-1}(t)$, $i = 1, \dots, n-1$. La caracterización de observabilidad fuerte se introduce en la misma referencia.

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considere el sistema SISO-LTV dado por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + D(t)\omega, \\ y = C(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\omega \in \mathbb{R}$ la entrada desconocida y $y \in \mathbb{R}$ es la salida medible del sistema. $A(t), D(t), C(t)$ son matrices de dimensiones apropiadas con elementos variantes en el tiempo. Por simplicidad en el análisis no se consideran entradas conocidas u , ya que no modifican las propiedades de observabilidad y es sencillo incluirlas en el diseño del observador. En la notación se omite la obvia dependencia de t en las variables del sistema (1).

El problema consiste en construir un observador con convergencia al menos asintótica a los estados verdaderos de la planta. Más aún, en función de una elección de parámetros adecuada el observador convergerá teóricamente manera exacta en tiempo finito o más aún,

en tiempo fijo en presencia de la entrada desconocida. El orden del observador no debe rebasar el orden de la planta misma.

Las ecuaciones en el observador se entienden en el sentido de Filippov (1988) para dar cabida a señales discontinuas. Las soluciones de Filippov coinciden con las soluciones habituales cuando el lado derecho de las ecuaciones es continuo.

Se considera que la familia de sistemas (1) satisface las siguientes suposiciones

- i) Las matrices $A(t), D(t), C(t)$ son uniformemente acotadas bajo cualquier norma matricial, es decir, $\|A(t)\| \leq \sigma_a, \|D(t)\| \leq \sigma_d, \|C(t)\| \leq \sigma_c$ con $\sigma_a, \sigma_d, \sigma_c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- ii) La señal de entrada desconocida es uniformemente acotada, es decir, existe una constante $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $|\omega(t)| \leq \Delta$.
- iii) $A(t), C(t), D(t)$ son $n-2, n-2, n-1$ veces continuamente diferenciables, respectivamente.
- iv) La tripleta $(A(t), D(t), C(t))$ es fuertemente observable.
- v) La matriz de transformación $\Gamma(t) = \mathcal{O}^{-1}(t)$ es una transformación de Lyapunov.

Por lo que, la transformación de estados $x(t) = \Gamma(t)\bar{x}(t)$ lleva el sistema a la forma

$$\Sigma^* : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, & \bar{y} = \bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_j = \bar{x}_{j+1}, \\ \vdots & j = 2, \dots, n-1 \\ \dot{\bar{x}}_n = a_1(t)\bar{x}_1 + \dots + a_n(t)\bar{x}_n + d(t)\omega \end{cases} \quad (2)$$

con $a_i(t), d(t), i = 1, \dots, n$ uniformemente acotadas. Note que la forma a la que se lleva el sistema es la forma de observabilidad y no de observador.

3. OBSERVADOR

Considere el sistema LTV fuertemente observable Σ en (1), para el cual se cumplen las suposiciones (i) – (v).

Entonces, un observador para el sistema (1) esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= -\Gamma K \Phi(e_y) + A \hat{x} \\ \hat{y} &= C \hat{x} \end{aligned} \quad (3)$$

donde $e_y = \hat{y} - y$ y además

$$K = \text{diag}(k_1 L, k_2 L^2, \dots, k_n L^n) \quad (4)$$

$$\Phi(\hat{y} - y) = [\tilde{\phi}_1(e_y) \tilde{\phi}_2(e_y) \dots \tilde{\phi}_n(e_y)]^T$$

para $j = 1, \dots, n$, los términos no lineales de inyección de salida $\tilde{\phi}_j(\cdot)$ se obtienen de las funciones

$$\phi_j(s) = \kappa_j [s]_{r_{0,1}}^{r_{0,j+1}} + \theta_j [s]_{r_{\infty,1}}^{r_{\infty,j+1}} \quad (5)$$

escalando las ganancias internas $\kappa_j > 0, \theta_j > 0$ por

$$\kappa_j \rightarrow \left(\frac{L^n}{\alpha}\right)^{j d_0} \kappa_j, \quad \theta_j \rightarrow \left(\frac{L^n}{\alpha}\right)^{j d_\infty} \theta_j \quad (6)$$

donde $k_j > 0$ son las ganancias externas y $\alpha > 0, L > 0$ ganancias de ajuste, apropiadamente seleccionadas.

Para $j = 1, \dots, n+1$ las potencias $r_{0,j}, r_{\infty,j}$ con $r_{0,n} = r_{\infty,n} = 1$ están dadas por

$$\begin{aligned} r_{0,j} &= r_{0,j+1} - d_0 = 1 - (n-j)d_0, \\ r_{\infty,j} &= r_{\infty,j+1} - d_\infty = 1 - (n-j)d_\infty \end{aligned} \quad (7)$$

las cuales están completamente definidos por d_0, d_∞

$$-1 \leq d_0 \leq d_\infty < \frac{1}{n-1} \quad (8)$$

3.1 Selección de ganancias

Cada tipo de ganancia en el observador tiene un rol diferente, y la idea en el ajuste de cada una es muy intuitiva, para $j = 1, \dots, n$.

- a) Las ganancias internas $\kappa_j > 0, \theta_j > 0$ son valores positivos arbitrariamente seleccionados. Corresponden a la ponderación deseada de cada término de grado bajo y alto respectivamente en ϕ_j .
- b) Las ganancias externas $k_j > 0$ estabilizan el observador en ausencia de los términos lineales en el último canal y perturbaciones externas $a_1(t)x_1 + \dots + a_n(t)x_n \equiv 0$ y $\omega(t) \equiv 0$, es decir, corresponden a las ganancias de un diferenciador bl-homogéneo cuya existencia y elección se muestra en Moreno (2021).
- c) El parámetro L se selecciona suficientemente grande para asegurar convergencia en presencia del término $a_1(t)x_1 + \dots + a_n(t)x_n$ lineal en x , pero no de la entrada desconocida $\omega(t)$. El valor mínimo de L siempre existe debido a la Suposición (i). Sobrepassando el valor mínimo se incrementará la velocidad de convergencia.
- d) El parámetro α se selecciona suficientemente grande para asegurar la convergencia en presencia de la entrada desconocida $\omega(t)$.

3.2 Resultado principal

Teorema 1. Sea el sistema SISO-LTV Σ en (1) que satisface las suposiciones (i)-(v). Seleccione d_0, d_∞ tales que $-1 \leq d_0 \leq d_\infty < \frac{1}{n-1}$ y ganancias internas arbitrarias $\kappa_j > 0$ y $\theta_j > 0, j = 1, \dots, n$. Suponga que $\Delta = 0$ ó $d_0 = -1$. Bajo estas condiciones, existen ganancias apropiadas $k_j > 0, j = 1, \dots, n$, y $L > 0, \alpha > 0$ suficientemente grandes, tales que las soluciones del UIO (3),(4) convergen global y asintóticamente a los estados verdaderos de Σ , es decir, $\hat{x}_j(t) \rightarrow x_j(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En particular, el observador converge global y

1. Exponencialmente si

$$d_0 = 0 \quad \text{con} \quad \Delta \equiv 0,$$

2. Tiempo finito si

$$(a) \quad -1 < d_0 < 0 \quad \text{con} \quad \Delta \equiv 0, \quad \acute{o}$$

$$(b) \quad d_0 = -1 \quad \text{con} \quad \Delta \neq 0$$

3. Tiempo fijo si

$$(a) \quad -1 < d_0 < 0 < d_\infty < \frac{1}{n-1} \quad \text{con} \quad \Delta \equiv 0, \quad \acute{o}$$

$$(b) \quad -1 = d_0 < 0 < d_\infty < \frac{1}{n-1} \quad \text{con} \quad \Delta \neq 0.$$

En el caso en que $\Delta \neq 0$ y $d_0 \neq -1$ el error de observación es final y uniformemente acotado. La prueba de este Teorema se da en el Apéndice A.

Nótese que el observador (3) está basado en la forma de observabilidad descrita en (2) que contiene los términos que caracterizan la dinámica del sistema en el último canal. Estos términos se incluyen en la dinámica del observador, pero no son cancelados ya que están en función de los estados no medidos. Los términos en el observador correspondientes a $d_\infty \geq 0$ se encargan de asegurar la convergencia del error de observación a pesar de la

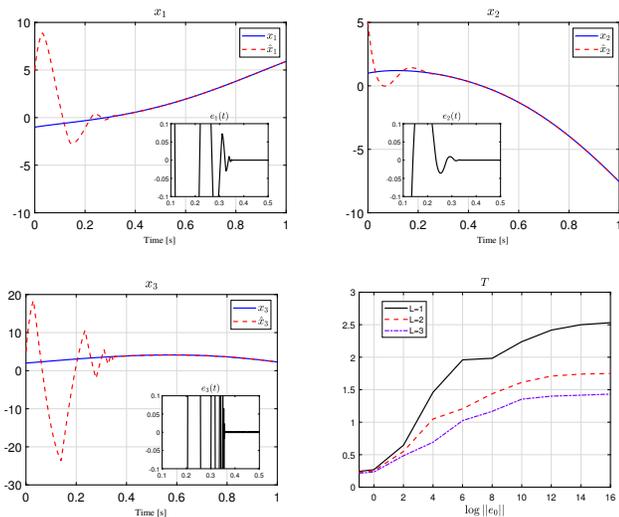


Fig. 1. Estados estimados \hat{x} y tiempo de convergencia.

presencia de estos términos lineales. Lo que contrasta con la técnica propuesta en Dávila et al. (2022) que lleva el sistema a la forma de observador donde es posible cancelar exactamente tales términos, ya que dependen solo de la salida medida. Es importante resaltar que el esquema de Dávila et al. (2022) no asegura convergencia global usando la forma de observabilidad, mientras que el esquema propuesto aquí funciona para ambas formas.

3.3 Ejemplo

Considere el sistema LTV fuertemente observable (1) con matrices $\{A, D, C\}$ tomadas de Lugo Segura (2014) cuyos valores numéricos son dados por

$$A = \begin{bmatrix} \sin(3t) - 3 & -3 & 2 \\ \cos(t) - 9 & -4 & 0 \\ -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) + 4 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$C = [0 \ \cos(2t) - 3 \ 0],$$

$$\omega(t) = 10 \sin(t) + 3, \quad |\omega(t)| \leq 13$$

el cual puede ser llevado a la forma (2) a través de una transformación de estados $\bar{x} = \Gamma^{-1}x$, tal que $\bar{A} = \Gamma^{-1}A\Gamma - \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}_s$, $\bar{D} = \Gamma^{-1}D$, $\bar{C} = C\Gamma$, donde Γ es la matriz de observabilidad del sistema. Entonces un UIO para (9) esta

dado por (3) con $d_0 = -1, d_\infty = 1/6$, ganancias externas $k_1 = 3.34k_3^{1/3}, k_2 = 5.3k_3^{2/3}, k_3 = 5$, ganancias internas $\kappa = \{1, 2, 10\}, \theta = \{1, 1, 1\}$ y ganancias de ajuste $L = 2, \alpha = 250$. En los primeros tres gráficos de la Figura 1 se muestra la estimación de los estados de la planta con condiciones iniciales $x_0 = [-1 \ 1 \ 2]^T$ y $\hat{x}_0 = [5 \ 5 \ 5]^T$, mientras que el ultimo gráfico muestra el tiempo de convergencia para un amplio rango de ordenes de magnitud de e_0 en escala logarítmica, mostrando convergencia en tiempo fijo. Las simulaciones se construyeron con un método de integración de Euler y paso de integración $\tau = 1 \times 10^{-5} s$.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso un UIO para una familia de sistemas SISO-LTV fuertemente observable, tal que puede siempre llevarse a la forma de observabilidad, en la cual se diseña el observador. El esquema propuesto, con propiedades de bl-homogeneidad lidia global y directamente con plantas inestables (variables de estado no acotadas), es decir, no se quiere de esquemas en cascada. Además de lidiar con la entrada desconocida a través de un HOSM inducido en el origen que resulta en una estimación teóricamente exacta. Adicionalmente, por una elección apropiada de grados de homogeneidad la convergencia puede hacerse global en tiempo finito o más aún, en tiempo fijo. Los parámetros ajustables en el observador son un conjunto de ganancias invariantes en el tiempo cuya selección resulta intuitiva para el diseñador. El orden del observador no se incrementa respecto al de la planta.

Apéndice A. PRUEBA

Prueba. La dinámica del error se analizará en la forma transformada. Es claro que el análisis es completamente equivalente en coordenadas originales.

Considerando el sistema Σ^* en (2) entonces un observador de estado en estas coordenadas esta dado por

$$\Omega^* : \begin{cases} \bar{e}_1 = \hat{x}_1 - \bar{y}, \\ \dot{\hat{x}}_1 = -k_1 L \tilde{\phi}_1(\bar{e}_1) + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_j = -k_j L^j \tilde{\phi}_j(\bar{e}_1) + \hat{x}_{j+1}, \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = -k_n L^n \tilde{\phi}_n(\bar{e}_1) + a_1(t)\hat{x}_1 + \dots + a_n(t)\hat{x}_n \end{cases} \quad (A.1)$$

con términos de corrección $\tilde{\phi}$ como en (5)-(8).

Sea el error $e_j = \hat{x}_j - \bar{x}_j, j = 1, \dots, n$, su dinámica del error está dada por

$$\Xi : \begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 L \tilde{\phi}_1(e_1) + e_2, \\ \dot{e}_j = -k_j L^j \tilde{\phi}_j(e_1) + e_{j+1}, \\ \vdots \\ \dot{e}_n = -k_n L^n \tilde{\phi}_n(e_1) + A_s(t)e - d(t)\omega \end{cases} \quad (A.2)$$

donde $A_s = [a_1(t) \ \dots \ a_n(t)]$. Aplicando la transformación de estado $\epsilon_j = \frac{L^{n-j+1}}{\alpha} e_j, j = 1, \dots, n$, se obtiene

$$\Xi^* : \begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = L[-k_1\phi_1(\epsilon_1) + \epsilon_2], \\ \dot{\epsilon}_j = L[-k_j\phi_j(\epsilon_1) + \epsilon_{j+1}], \\ \vdots \\ \dot{\epsilon}_n = L[-k_n\phi_n(\epsilon_1) + \frac{1}{\alpha}\Psi_i(\epsilon, \omega)] \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Psi(\epsilon, \omega) &= A_s e - \omega = \sum_{j=1}^n a_j(t)e_j - d(t)\omega \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \frac{a_j(t)}{L^{n-j+1}} \epsilon_j - d(t)\omega \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde se ha usado el hecho de que $\tilde{\phi}_j(\frac{\alpha}{L^n}s) = \frac{\alpha}{L^n}\tilde{\phi}_j(s)$. Es conveniente realizar otra transformación $z_j = \frac{\epsilon_j}{k_{j-1}}$, $k_0 = 1$, $j = 1, \dots, n$, junto con un escalamiento de tiempo $\tau = Lt$, si $z'_j = \frac{dz_j}{d\tau}$ entonces (A.3) se convierte en

$$\Xi^* : \begin{cases} z'_1 = -\tilde{k}_1(\phi_1(z_1) + z_2), \\ z'_j = -\tilde{k}_j(\phi_j(z_1) + z_{j+1}), \\ \vdots \\ z'_n = -\tilde{k}_n\phi_n(z_1) + \tilde{\Psi}(z, \omega) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

con $\tilde{k}_j = \frac{k_j}{k_{j-1}}$, $k_0 = 1$, $j = 1, \dots, n$

$$\tilde{\Psi}(z, \omega) = \frac{1}{k_{n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j(t)k_{j-1}}{L^{n-j+1}} z_j - \frac{d(t)}{\alpha k_{n-1}} \omega \quad (\text{A.6})$$

Los términos de inyección de salida en (5) son similares pero más simples que los descritos en el diferenciador de Moreno (2021), pues en este caso $\phi_j(s)$ se obtiene directamente y no como una composición de j funciones, lo que simplifica la realización del observador. Se debe resaltar que la prueba de estabilidad para el diferenciador, que de hecho es esencial para este artículo, es aplicable al caso con términos de inyección (5). Es claro también que las funciones $\phi_j(s)$ pueden describirse como una composición de funciones $\varphi_j(s)$

$$\phi_j(s) = \varphi_j \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(s) \quad (\text{A.7})$$

con $\varphi_1(s) = \phi_1(s)$, $\varphi_j(s) = \phi_j \circ \phi_{j-1}^{-1}(s)$, $j = 2, \dots, n$. La Función bl-homogénea de Lyapunov (bl-LF) V es introducida en Moreno (2021). Para $n \geq 2$, dos números reales positivos $p_0, p_\infty \in \mathbb{R}_+$ que corresponden a los grados de homogeneidad de las aproximaciones en 0 e ∞ de V , tal que

$$\begin{aligned} p_0 &\geq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{r_{0,j}\} + d_0, & \frac{p_0}{r_{0,j}} &\leq \frac{p_\infty}{r_{\infty,j}} \\ p_\infty &\geq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ 2r_{\infty,j} + \frac{r_{\infty,j}}{r_{0,j}} d_0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Para $i = 1, \dots, n$ se eligen números reales positivos arbitrarios $\beta_{0,j}, \beta_{\infty,j} > 0$ y se definen las siguientes funciones

$$\begin{aligned} Z_j(z_j, z_{j+1}) &= \sum_{k \in \{0, \infty\}} \beta_{k,j} \left[\frac{r_{k,j}}{p_k} |z_j|^{\frac{p_k}{r_{k,j}}} - z_j [\xi_j]^{\frac{p_k - r_{k,j}}{r_{k,j}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_k - r_{k,j}}{p_k} |\xi_j|^{\frac{p_k}{r_{k,j}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \xi_j &= \varphi_j^{-1}(z_{j+1}) \quad j = 1, \dots, n-1, & \xi_n &= z_{n+1} = 0 \\ Z_n(z_n) &= \beta_{0,n} \frac{1}{p_0} |z_n|^{p_0} + \beta_{\infty,n} \frac{1}{p_\infty} |z_n|^{p_\infty} \end{aligned}$$

Es fácil comprobar el siguiente Lema.

Lema 1. (Moreno, 2021). $Z_j(z_j, z_{j+1}) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$ y $Z_j(z_j, z_{j+1}) = 0$ si y solo si $\varphi_j(z_j) = z_{j+1}$.

La bl-LF esta dada por

$$V(z) = \sum_{j=1}^{n-1} Z_j(z_j, z_{j+1}) + Z_n(z_n) \quad (\text{A.10})$$

Para el análisis se definen las siguientes variables

$$\sigma_j(z_j, z_{j+1}) \triangleq \frac{\partial Z_j(z_j, z_{j+1})}{\partial z_j} \quad (\text{A.11})$$

$$= \sum_{k \in \{0, \infty\}} \beta_{k,j} \left([z_j]^{\frac{p_k - r_{k,j}}{r_{k,j}}} - [\xi_j]^{\frac{p_k - r_{k,j}}{r_{k,j}}} \right)$$

$$s_j(z_j, z_{j+1}) \triangleq \frac{\partial Z_j(z_j, z_{j+1})}{\partial z_{j+1}} \quad (\text{A.12})$$

$$= \sum_{k \in \{0, \infty\}} -\beta_{k,j} \frac{p_k - r_{k,j}}{r_{k,j}} (z_j - \xi_j) |\xi_j|^{\frac{p_k - 2r_{k,j}}{r_{k,j}}} \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{j+1}}$$

donde $\xi_i = \varphi_i^{-1}(z_{i+1})$. Note que Z_j, σ_j, s_j se desvanecen cuando $\varphi_j(z_j) = z_{j+1}$. La derivada de $V'(z)$ con respecto a la nueva variable de tiempo τ

$$V'(z) = -W(z) + \frac{\partial V(z)}{\partial z_n} \tilde{\Psi}(z, \omega) \quad (\text{A.13})$$

$$W(z) = \tilde{k}_1 \sigma_1 (\phi_1(z_1) - z_2)$$

$$+ \sum_{j=2}^{n-1} \tilde{k}_j [s_{j-1} + \sigma_j] (\phi_j(z_1) - z_{j+1}) \quad (\text{A.14})$$

$$+ \tilde{k}_n [s_{n-1} + \sigma_n] \phi_n(z_1)$$

De acuerdo a su definición en (A.12) $s_n \equiv 0$. Las funciones $s_j, \sigma_j \in \mathcal{C}$ en \mathbb{R} son bl-homogéneas de grados $p_0 - r_{0,j}, p_0 - r_{0,j+1}$ y $p_\infty - r_{\infty,j}, p_\infty - r_{\infty,j+1}$ en sus aproximaciones 0 e ∞ , respectivamente. Además, se tiene $\sigma_j = 0$ en el mismo conjunto que $s_j = 0$, es decir, ambos se vuelven cero en los puntos donde Z_j alcanza su mínimo, $Z_j = 0$. V es bl-homogéneo de grados p_0 y p_∞ y \mathcal{C} en \mathbb{R} . También es no negativa ya que es una combinación positiva de términos no negativos Z_j . Más aún, V es definido positivo ya que $V(z) = 0$ solo si todos los $Z_j = 0$, lo que solo sucede en $z = 0$. Debido a la bl-homogeneidad, también es radialmente mo acotada. Si se analiza (A.14), $W(z)$ es bl-homogénea de grado $p_0 + d_0$ en su 0-aproximación y $p_\infty + d_\infty$ para su ∞ -aproximación. Se ha demostrado en Moreno (2021) que existen ganancias apropiadas \tilde{k}_j tales que $W(z)$ en (A.14) se hace definida positiva. La idea a continuación es probar que las ganancias $L > 1, \alpha > 1$ se pueden hacer suficientemente grandes tal que la negatividad de $-W(z)$ y por lo tanto $V'(z)$ prevalece. Es de interés ahora encontrar una cota superior de $\frac{\partial V(z)}{\partial z_n} \tilde{\Psi}(z, \omega)$. Haciendo que $L \geq 1$ y $\alpha \geq 1$, entonces (A.6) por la potencia de L , se puede escribir

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(z, \omega) &= \sum_{j=1}^n \frac{a_j(t)k_{j-1}}{k_{n-1}L^{n-j+1}} z_j - \frac{1}{\alpha k_{n-1}} \omega = \frac{1}{L} \tilde{\Psi}_s + \frac{1}{\alpha} \tilde{\Psi}_\omega \\ \tilde{\Psi}_s &= \sum_{j=1}^n \frac{a_j(t)k_{j-1}}{k_{n-1}L^{n-j}} z_j, \quad \tilde{\Psi}_\omega = -\frac{d(t)}{k_{n-1}} \omega\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Por la Suposición (i) se tiene que existen constantes no negativas $\bar{a}_j, \bar{d} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $|a_j(t)| \leq \bar{a}_j, j = 1, \dots, n$ y $|d(t)| \leq \bar{d}$, lo que valida las siguientes desigualdades

$$\tilde{\Psi}_s \leq \sum_{j=1}^n \frac{\bar{a}_j k_{j-1}}{k_{n-1} L^{n-j}} z_j, \quad \tilde{\Psi}_\omega \leq -\frac{\bar{d}}{k_{n-1}} \omega \quad (\text{A.16})$$

El término $\frac{\partial V(z)}{\partial z_n}$ es bl-homogéneo de grado $p_0 - r_{0,n} = p_0 - 1$ en su 0-aproximación y $p_\infty - r_{\infty,n} = p_\infty - 1$ en su ∞ -aproximación. Por propiedades de funciones bl-homogéneas cada término $\frac{\partial V(z)}{\partial z_n} z_j$ es bl-homogéneo de grado $p_0 - r_{0,n} + r_{0,j} = p_0 - (n-j)d_0$ en su 0-aproximación y $p_\infty - r_{\infty,n} + r_{\infty,j} = p_\infty - (n-j)d_\infty$ en su ∞ -aproximación. Como $d_0 \leq 0$ y $d_\infty \geq 0$ se tiene que

$$p_\iota + d_\iota \leq p_\iota - (n-\iota)d_\iota, \quad \iota = \{0, \infty\} \quad (\text{A.17})$$

y por propiedades de funciones bl-homogéneas, existe un número real positivo $\lambda_1 > 0$ que satisface

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z_n} \frac{1}{L} \tilde{\Psi}_s \leq \frac{\lambda_1}{L} W(z) \quad (\text{A.18})$$

además, existe $\lambda_2 > 0$ tal que

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z_n} \leq \lambda_2 W(z)^a, \quad a = \begin{cases} \frac{p_0-1}{p_0+d_0} & \text{si } W(z) \leq 1 \\ \frac{p_\infty-1}{p_\infty+d_\infty} & \text{si } W(z) > 1 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Si ponemos todo junto, $V'(z)$ en (A.13) se puede acotar

$$\begin{aligned}V'(z) &\leq -W(z) + \frac{\lambda_1}{L} W(z) + \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{\Psi}_\omega^* W(z)^a \\ &= -\left(1 - \frac{\lambda_1}{L}\right) W(z) + \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{\Psi}_\omega^* W(z)^a\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

donde $\tilde{\Psi}_\omega^* = \max |\tilde{\Psi}_\omega|$. Se puede elegir L suficientemente grande tal que los dos primeros términos se vuelvan negativos definidos. En ausencia de $\tilde{\Psi}_\omega$, por Lyapunov, el origen $z = 0$ es entonces asintóticamente estable. Con $d_0 < 0$ se tiene convergencia en tiempo finito, y con $d_\infty > 0$ se converge en tiempo fijo.

Con $\tilde{\Psi}_\omega \neq 0$, de (A.16) y $\omega(t) \leq \Delta$ se sabe acotado, eligiendo $d_0 = -1$, de (A.20) se tiene que lejos del origen, es decir, para valores de z tal que $W(z) > 1$

$$\begin{aligned}V'(z) &\leq -W(z) + \frac{\lambda_1}{L} W(z) + \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{\Psi}_\omega^* W(z)^{\frac{p_\infty-1}{p_\infty+d_\infty}} \\ &= -\left(1 - \frac{\lambda_1}{L}\right) W(z) + \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{\Psi}_\omega^* W(z)^{\frac{p_\infty-1}{p_\infty+d_\infty}}\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

los términos lineales en $W(z)$ dominan al último término con potencia $\frac{p_\infty-1}{p_\infty+d_\infty} < 1$. Y cerca del origen, es decir, para z tal que $W(z) \leq 1$

$$\begin{aligned}V'(z) &\leq -W(z) + \frac{\lambda_1}{L} W(z) + \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{\Psi}_\omega^* W(z) \\ &= -\left(1 - \frac{\lambda_1}{L} - \frac{\lambda_2}{\alpha} \tilde{\Psi}_\omega^*\right) W(z)\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

se pueden elegir $L > 1, \alpha > 1$ suficientemente grandes, tal que $V'(z) < 0$. En el caso $\tilde{\Psi}_\omega \neq 0$ y $d_0 \neq -1$, de (A.20) se tiene Estabilidad Entrada-Estado (ISS por sus

siglas en inglés), pues dado un último límite para $\tilde{\Psi}_\omega$, el límite último para z puede hacerse arbitrariamente pequeño seleccionando $\alpha > 0$ suficientemente grande. ■

REFERENCES

- Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4), 1814–1850.
- Barbot, J.P., Djemai, M., and Boukhobza, T. (2002). Sliding mode observers. In *Sliding Mode Control In Engineering*, Automation and Control Engineering.
- Dávila, J., Tranninger, M., and Fridman, L. (2022). Finite-time state observer for a class of linear time-varying systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(6), 3149–3156.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side*, volume 18. Springer Science & Business Media.
- Galvan, R., Fridman, L., and Davila, J. (2016). High-order sliding-mode observer for linear time varying systems with unknown inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27.
- Hautus, M. (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50, 353–368.
- Kratz, W. (1995). Characterization of strong observability and construction of an observer. *Linear Algebra and its Applications*, 221, 31–40.
- Kratz, W. and Liescher, D. (1998). A local characterization of observability. *Linear Algebra and its Applications*, 269(1), 115–137.
- Lugo Segura, R. (2014). *Observador para sistemas LTV con entradas desconocidas basado en modos deslizantes de orden superior*. Tesis de maestría, UNAM.
- Menold, P., Findeisen, R., and Allgöwer, F. (2004). Finite time convergent observers for nonlinear systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, 5673 – 5678 Vol.6.
- Molinari, B. (1976). A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(5), 761–764.
- Moreno, J.A. (2021). Arbitrary-order fixed-time differentiators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(3), 1543–1549.
- Silverman, L. (1969). Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(3), 270–276.
- Spurgeon, S.K. (2008). Sliding mode observers: a survey. *International Journal of Systems Science*, 39(8).
- Trumpf, J. (2007). Observers for linear time-varying systems. *Linear Algebra and its Applications*, 425(2).
- Yan, X.G. and Edwards, C. (2007). Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer. *Automatica*, 43(9), 1605 – 1614.
- Zhang, Q. and Clavel, A. (2001). Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time varying systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, 3886–3891 vol.4.