

A study on performance and fragility of controllers: PR and PD^{*}

Guillermo Oaxaca-Adams^{*} Raúl Villafuerte-Segura^{**}

^{*} Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México, CP 09310, México (e-mail: oag@xanum.uam.mx)

^{**} Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca-Hidalgo, CP 42184, México (e-mail: villafuerte@uaeh.edu.mx)

Abstract: This paper presents a study on the fragility and performance of two linear controllers for second-order systems: proportional retarded control (PR) and proportional derivative control (PD). The study is carried out through an analysis of the corresponding characteristic equation of the closed-loop system. In the case of the PR control, Taylor's theorem is used to show that if there exists a root of multiplicity three, it is necessarily dominant.

Keywords: PD control, PR control, fragility, performance, 2nd order systems.

1. INTRODUCCIÓN

En el marco de la teoría de control, el diseño y la sintonización de leyes de control cada vez más eficientes es un objetivo primordial. Actualmente, existe en la literatura una gran cantidad de trabajos que aseguran proponer controladores con esta característica. En ocasiones, esta aseveración se realiza después de comparaciones arbitrarias y/o en condiciones desiguales de operación. En Alfaro (2007) se menciona que en un controlador debe considerarse su *desempeño*, *fragilidad* y *robustez*. Por lo que, resulta razonable establecer su eficiencia a partir de estas consideraciones. Además de compararlo con uno de los controladores más empleados y aceptados por la comunidad científica y la industria, aquellos del tipo PID, proporcional-integral-derivativo.

La *fragilidad* de un controlador se puede determinar a partir del margen de variación de sus propias ganancias (parámetros). Mientras que su *desempeño* se puede establecer por medio de la respuesta del sistema en lazo cerrado. Finalmente, la *robustez* de un controlador se puede decretar sabiendo los cambios permisibles en las características o parámetros del proceso o planta a controlar. Por lo tanto, la *robustez* y la *fragilidad* de un controlador deben considerarse de forma diferente e independiente, entendiendo que la *robustez* de un control indica el margen de variación permitido en los parámetros del proceso, con ganancias fijas del controlador, para no perder estabilidad; y la fragilidad de un controlador tiene un significado similar en términos de la variación de sus propias ganancias/parámetros. Por consiguiente, un controlador puede ser muy robusto, pero muy frágil a la vez. En este contexto, existen varios trabajos en los que

se determina la fragilidad de un controlador, entre ellos se encuentran Méndez-Barrios et al. (2008); Melchor-Aguilar and Niculescu (2009); Morărescu et al. (2011); Hernández-Díez et al. (2018) y Oaxaca-Adams et al. (2021).

En el marco de los controladores del tipo PID, hoy en día existen numerosas contribuciones respecto a su sintonización, desempeño e implementación, (Åström and Hägglund, 2001; Silva et al., 2005; Berner et al., 2018). Es una de las áreas de investigación más antiguas, aún activa y con mayor número de usuarios satisfechos al momento de implementarla; a pesar de los extraordinarios progresos que otras áreas de la teoría de control han tenido en las últimas décadas.

En el marco de los controladores retardados de tipo PR, se emplean deliberadamente retardos artificiales para estabilizar un sistema (Abdallah et al., 1993; Ulsoy, 2015). En algunos ocasiones a este tipo de controladores se les llama controladores retardados (delayed controllers), controladores con acciones retardadas, control de retroalimentación con retardo o retroalimentación retardada, entre otros. En Suh and Bien (1979, 1980), se propone un control proporcional con un retardo apropiado que puede reemplazar un control PD. Aquí los autores afirman que la respuesta del sistema es más rápida e insensible al ruido de alta frecuencia cuando se emplea el control retardado, en comparación con el uso del PD. En Pyragas (1992) se propone un esquema de control denominado time-delayed feedback control (TDFC), que da origen a diferentes investigaciones, Bleich and Socolar (1996); Just et al. (1997); de Sousa Vieira and Lichtenberg (1996); Swisher and Tenqchen (1988). En Kokame and Mori (2002), se discute la preservación de la estabilidad de lazo cerrado, cuando una retroalimentación derivada es reemplazada por una retroalimentación retardada (difference feedback), y se presenta un resultado favorable para la

^{*} Este artículo es financiado mediante el Programa Anual Operativo 2022 (PAO,2022) con clave 0503 de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

preservación de la estabilidad usando retroalimentación retardada para sistemas de entrada única y salida única (SISO). En Morarescu and Niculescu (2007), se da un análisis de estabilidad de una clase de sistemas lineales SISO sujetos a retroalimentación de salida retardada. Mientras que la atenuación del ruido en la respuesta del sistema debida al uso de una acción retardada es ratificada en Mondie et al. (2011). La sintonización de controladores proporcional-integral-retardado (PIR) para sistemas LTI de segundo orden es proporcionada en Ramírez et al. (2016).

Como se puede observar, el empleo de controladores con retardos no es una área de investigación nueva y aunque hay varios autores que afirman que el empleo de estos controladores pueden favorecer la respuesta del sistema, aún existe un gran campo de oportunidad en cuanto a su diseño, sintonización e implementación. Así como estudios que coadyuven a determinar su eficiencia, en comparación con los controladores clásicos.

En este manuscrito se presentan algunos resultados para determinar las ganancias menos frágiles (*punto menos frágil*) de un controlador PR, así como las ganancias que proporcionan la máxima cota de decaimiento alcanzable (*punto de mejor desempeño*) en la respuesta de un sistema de segundo orden. Los resultados obtenidos se comparan con su contraparte clásica, el control PD.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se formula el problema y se establece una propiedad general sobre la fragilidad y el desempeño de un control. En la Sección 3 se obtienen las ecuaciones paramétricas de la frontera de las regiones de estabilidad. En la Sección 4 se comparan la fragilidad y el desempeño de los controles PR y PD. En la Sección 5 se calculan numéricamente los puntos menos frágiles y de mejor desempeño. En la Sección 6 se hacen algunas conclusiones sobre la comparación de los controladores PR y PD.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Formulación del problema

Considere un proceso o planta cuya función de transferencia es de la forma

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2}, \quad (1)$$

donde $\delta > 0$ y $\nu > 0$ son conocidas como amortiguamiento y frecuencia naturales de la planta, respectivamente. Así como las funciones de transferencia de los siguientes controladores lineales:

$$\text{i) control PR, } C_r(s) = k_{r_1} - k_{r_2}e^{-s\tau}, \quad (2)$$

donde k_{r_1} y k_{r_2} son las ganancias proporcional y retardada, respectivamente, y $\tau > 0$ es un retardo; y

$$\text{ii) control PD, } C_d(s) = k_{d_1} - k_{d_2}s, \quad (3)$$

donde k_{d_1} y k_{d_2} son conocidas como ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.

¿Cuál de los dos controladores PR o PD es más eficiente?

Determinar el punto de menor *fragilidad* y el punto con mejor *desempeño* de cada uno de los controladores

bajo condiciones similares, puede ayudar a responder esta pregunta.

2.2 Preliminares

Considere la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado con un controlador, que es de la forma

$$f(k, s) = 1 + C(k, s)G(s), \quad (4)$$

donde $s = \sigma \pm i\omega$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \geq 0$, $i^2 = -1$, $k \in K \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de las n ganancias del controlador; y $C(k, s)$ y $G(s)$ son las funciones de transferencia del controlador y la planta, respectivamente. En lo subsecuente, referiremos que $f(k, s) = 0$, si su numerador es igual a cero.

Definición 1. Sea Γ el conjunto de todos los parámetros k tales que $f(k, s)$, dada en (4), tiene al menos una raíz imaginaria, esto es,

$$\Gamma = \{k \in K : f(k, s) = 0 \text{ para algún } s = \pm i\omega\}.$$

Dado que las raíces de $f(k, s)$ son funciones continuas de los parámetros k (Neimark, 1973), el conjunto Γ divide a K en subregiones que tienen un número constante de raíces complejas con parte real positiva, esto es,

$$K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots, \quad (5)$$

donde $K_m = \{k \in K : f(k, s) \text{ tiene exactamente } m \text{ raíces con parte real positiva}\}$.

El conjunto K_0 es conocido como la región de *estabilidad* de la ecuación característica (4).

Definición 2. Para cada subconjunto compacto $D \subset K_0$ tal que su frontera $\partial D \subset \Gamma$, la *abscisa espectral* de $f(k, s)$ correspondiente a la región D se define como

$$\alpha^* = \inf\{\alpha(k) : k \in D\}, \quad (6)$$

donde $\alpha : K_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha(k) = \sup\{\text{Re}(s) : f(k, s) = 0\}$.

Ahora, tomemos en cuenta el siguiente resultado.

Lema 1. (Gu et al., 2003) Sea $y(t)$ la respuesta del sistema en lazo cerrado cuya ecuación característica es (4). Entonces, para cada $\sigma \in [\alpha^*, 0)$ existe una constante L tal que

$$|y(t)| \leq L\|\phi\|_{\tau}e^{\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

donde ϕ es la función inicial definida en el intervalo $[-\tau, 0]$, $\|\phi\|_{\tau} := \max\{|\phi(s)| : s \in [-\tau, 0]\}$ y $|\cdot|$ denota la norma euclídeana.

Así, *desempeño* y *fragilidad* se definen como sigue.

Definición 3. El punto de mejor *desempeño*, es el conjunto de ganancias $k \in D$ de un controlador que proporciona la cota de decaimiento exponencial máxima alcanzable σ^* en la solución $y(t)$ del sistema en lazo cerrado. Este punto se denotará por $k^{*,d} \in D$ y es tal que

$$\alpha(k^{*,d}) = \alpha^* = \sigma^*.$$

Definición 4. Asuma que la frontera ∂D puede ser parametrizada por un curva cerrada simple $\gamma(\omega)$, $\omega \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. El punto menos *frágil*, es el conjunto de ganancias $k \in D$ de un controlador, con la distancia más alejada de ∂D . Este punto se denotará por $k^{*,f} \in D$ y es tal que

$$\rho(k^{*,f}) = \max_{k \in D} \rho(k),$$

donde $\rho(k) = \min_{\omega \in I} \varphi(k, \omega)$ y $\varphi(k, \omega) = \|\gamma(\omega) - k\|$.

Observación 1. El siguiente resultado nos dice que el control menos frágil siempre pierde desempeño y que el control con mejor desempeño es necesariamente frágil.

Teorema 1. Para cada región compacta D , se tiene que

$$\alpha(k^{*,d}) \leq \alpha(k^{*,f}) \quad \text{y} \quad \rho(k^{*,d}) \leq \rho(k^{*,f}).$$

Demostración. Sigue de las Definiciones 3 y 4 de $k^{*,d}$ y $k^{*,f}$, respectivamente. ■

3. REGIONES DE ESTABILIDAD DEL PR Y PD

Considere las ecuaciones características del sistema (1) en lazo cerrado con (2) y (3), cuyas formas son

$$q(k_r, s) = s^2 + 2\delta\nu s + (\nu^2 + k_{r1}) - k_{r2}e^{-s\tau}, \quad \text{y} \quad (7)$$

$$p(k_d, s) = s^2 + (2\delta\nu - k_{d2})s + (\nu^2 + k_{d1}). \quad (8)$$

Para estas dos ecuaciones, tomar en cuenta lo siguiente:

- (7) es un cuasi-polinomio y (8) es un polinomio. Esto implica que mientras el primero tiene un número infinito de raíces, el segundo tiene sólo dos.
- El vector de ganancias $k \in D$ es de dimensión diferente para cada control empleado. Para diferenciarlos, se denotan por $k_r = (k_{r1}, k_{r2}, \tau) \in \mathbb{R}^3$ en (7) y por $k_d = (k_{d1}, k_{d2}) \in \mathbb{R}^2$ en (8).

En seguida, se obtiene el conjunto Γ para delimitar las subregiones $K_m \subset K$. De estas subregiones se identifica la región de estabilidad K_0 y se toma un conjunto compacto $D \subset K_0$. Para hacer esto, se emplea el método de D-particiones de (Neimark, 1949).

3.1 Controlador PR en el plano τ - k_{r2}

Conjunto Γ para PR. Considere el cuasi-polinomio (7). Entonces, las subregiones K_m de K dadas en (5) están delimitadas por las ecuaciones paramétricas siguientes:

Si $s = 0$, entonces $q(k_r, 0) = 0$ y tenemos que

$$k_{r2} = \nu^2 + k_{r1}. \quad (9)$$

Si $s = i\omega$, $\omega > 0$, entonces $q(k_r, i\omega) = 0$ y tenemos que

$$\tau = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(\frac{2\delta\nu\omega}{\omega^2 - \nu^2 - k_{r1}} \right) + \frac{n\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

$$k_{r2} = -\frac{2\delta\nu\omega}{\sin(\tau\omega)}.$$

Usando las ecuaciones paramétricas (9)-(10) y la Definición 1, se obtienen las curvas Γ que delimitan la región de estabilidad K_0 de las regiones de inestabilidad K_m , $m \geq 1$, del sistema. La Figura 1(a) muestra las curvas Γ en este caso. Aquí, la recta roja y las curvas azules forman la frontera Γ que separa las regiones de estabilidad e inestabilidad del sistema.

Subregión K_0 para PR. Seleccionando algunos puntos en el plano τ - k_{r2} y usando la continuidad de las raíces del cuasi-polinomio (7), se obtiene la región de estabilidad K_0 de sistema, que se muestra en la Figura 1(b).

Conjunto D para PR. Ahora, de toda la región de estabilidad K_0 , sólo se considera el subconjunto D que se muestra en la Figura 1(c).

3.2 Controlador PR en el plano k_{r1} - k_{r2}

Conjunto Γ para PR. Considere el cuasi-polinomio (7). Ahora, las subregiones K_m de K dadas en (5) están delimitadas por las ecuaciones paramétricas siguientes:

Si $s = 0$, entonces $q(k_r, 0) = 0$ y tenemos que

$$k_{r2} = \nu^2 + k_{r1}. \quad (11)$$

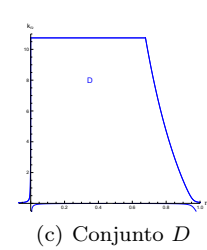
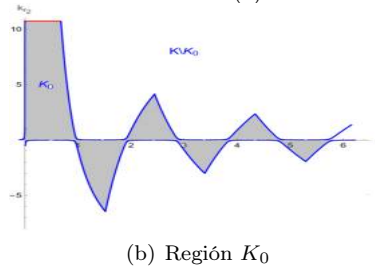
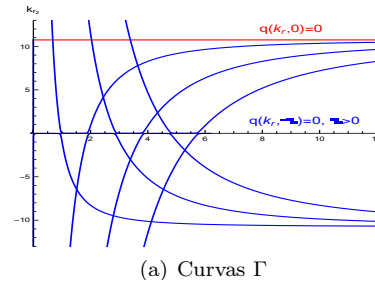


Fig. 1. Regiones de estabilidad del PR en el plano τ - k_{r2} .

Si $s = i\omega$, $\omega > 0$, entonces $q(k_r, i\omega) = 0$ y tenemos que

$$\begin{aligned} k_{r1} &= \omega^2 - \nu^2 - 2\delta\nu\omega \cot(\tau\omega) \\ k_{r2} &= -2\delta\nu\omega \csc(\tau\omega). \end{aligned} \quad (12)$$

Usando las ecuaciones paramétricas (11)-(12) y la Definición 1, se obtienen las curvas Γ que separan la región de estabilidad K_0 de las regiones de inestabilidad K_m , $m \geq 1$, del sistema. La Figura 2(a) muestra las curvas Γ en este caso. La recta roja y las curvas azules forman la frontera Γ que separa las regiones de estabilidad e inestabilidad del sistema.

Subregión K_0 para PR. Seleccionando algunos puntos en el plano k_{r1} - k_{r2} y usando la continuidad de las raíces del cuasi-polinomio (7), se obtiene la región de estabilidad K_0 de sistema, que se muestra en la Figura 2(b).

Conjunto D para PR. De toda la región de estabilidad K_0 , sólo se considera el subconjunto D que se muestra en la Figura 2(c).

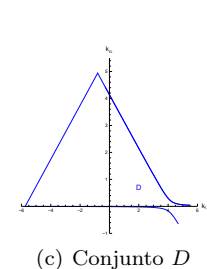
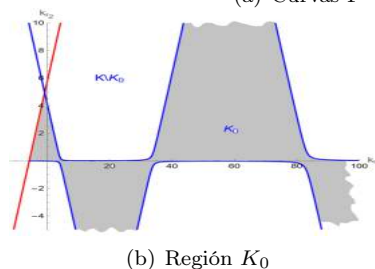
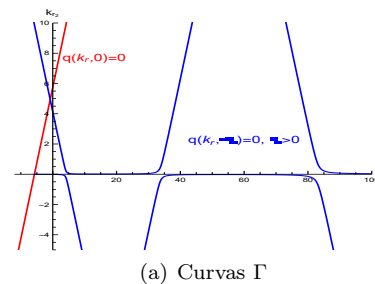


Fig. 2. Regiones de estabilidad de PR en el plano k_{r1} - k_{r2} .

3.3 Controlador PD

Conjunto Γ para PD. Considere el polinomio (8). Entonces, las subregiones K_m de K dadas en (5) están delimitadas por las ecuaciones paramétricas siguientes:

Si $s = 0$, entonces $p(k_d, 0) = 0$ y se tiene que

$$k_{d_1} = -\nu^2. \quad (13)$$

Si $s = i\omega$, $\omega > 0$, entonces $p(k_d, i\omega) = 0$ y tenemos que

$$k_{d_1} = \omega^2 - \nu^2 \text{ y } k_{d_2} = 2\delta\nu. \quad (14)$$

Usando las ecuaciones paramétricas (13)-(14) y la Definición 1, se obtienen las curvas Γ que separan la región de estabilidad K_0 de las regiones de inestabilidad K_m , $m \geq 1$, del sistema. La Figura 3(a) muestra las curvas Γ .

Subregión K_0 para PD. Empleando el criterio de Routh-Hurwitz, se tiene que (8) es estable si y sólo si los coeficientes $2\delta\nu - k_{d_2}$ y $\nu^2 + k_{d_1}$ son positivos. La Figura 3(b) muestra esta región:

$$K_0 = \{k_d \in \mathbb{R}^2 : k_{d_1} > -\nu^2 \text{ y } k_{d_2} < 2\delta\nu\}. \quad (15)$$

Conjunto compacto D para PD. Debido a que K_0 no es una región acotada, para fines ilustrativos elegimos un subconjunto de la forma $D = [-\nu^2, -\nu^2 + a_1] \times [2\delta\nu - a_2, 2\delta\nu]$, donde a_1 y a_2 son constantes positivas. La Figura 3(c) muestra esta región para $a_1 = 13$ y $a_2 = 7$.

4. FRAGILIDAD Y DESEMPEÑO DEL PR Y PD

En esta sección se presentan los resultados teóricos para determinar los puntos *menos frágil* y de *mejor desempeño*.

4.1 Fragilidad y desempeño del PR

Empleando la Definición 4, el *punto menos frágil* se puede determinar como el centro $k^{*,f}$ del círculo más grande inscrito en una región de estabilidad D .

Para un $k \in D$ fijo y cercano a $k^{*,f}$, se tiene que

$$\rho(k) = \min_{\omega \in I} \varphi(k, \omega) = \min_{\omega \in J(k)} \varphi(k, \omega),$$

donde $J(k) = \{\omega \in I : \varphi(k, \omega) = \rho(k)\} \neq \emptyset$ es el conjunto de todos los puntos en los que la función $\varphi(k, \omega)$ alcanza

su valor mínimo. Se denota por

$$S(k, r) = \{l \in \mathbb{R}^2 : \|l - k\| = r\}$$

al círculo con centro en k y radio r .

Si $k \in D$, el círculo $S(k, \rho(k))$ está contenido en D y para $\omega \in J(k)$, $\gamma(\omega)$ es un *punto de contacto* del círculo $S(k, \rho(k))$ con la curva γ . El siguiente resultado declara una propiedad sobre los puntos de contacto.

Teorema 2. Si γ es una curva continuamente diferenciable y el círculo más grande $S(k^{*,f}, \rho(k^{*,f}))$ tiene exactamente dos puntos de contacto $\gamma(\omega_1)$ y $\gamma(\omega_2)$ con la curva γ , entonces el centro $k^{*,f}$ y los puntos de contacto se encuentran sobre la misma línea recta, y esta recta es ortogonal a la curva en los puntos de contacto.

Demostración. (Oaxaca-Adams et al., 2021) El círculo más grande se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones $[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_1) = 0 = [\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_1)] \cdot \gamma'(\omega_2)$, (16) donde ω_1 y ω_2 son incógnitas. Entonces,

$$k^{*,f} = \frac{1}{2}[\gamma(\omega_1) + \gamma(\omega_2)] \text{ y } \rho(k^{*,f}) = \frac{1}{2}\|\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)\|. \blacksquare$$

Para encontrar un *punto de mejor desempeño* que satisfaga la Definición 3, se utiliza la relación que existe entre los conceptos de grado de un cuasi-polinomio, raíz dominante y raíz de multiplicidad máxima (Mazanti et al., 2020a,b). Para establecer la dominancia de la raíz de multiplicidad máxima, usamos el teorema de Taylor como prueba alternativa a la dada en Boussaada et al. (2017).

Tenemos el siguiente hecho y definiciones:

- El *grado* de un cuasi-polinomio de la forma $q(s) = s^2 + As + B + Ce^{-\tau s}$, (17) donde A, B, C y τ son constantes con $C \neq 0$ y $\tau > 0$, es 3 y todas sus raíces tienen multiplicidad menor o igual que 3, ver (Pólya and Szegő, 1998, p. 144).
- una raíz del cuasi-polinomio (17) es de *multiplicidad máxima* si tiene multiplicidad 3, y
- una raíz s_0 del cuasi-polinomio (17) es *dominante* si para cualquier otra raíz s , se tiene que $\text{Re}(s) \leq \text{Re}(s_0)$.

Ahora, el siguiente resultado y los resultados geométricos dados en Villafuerte et al. (2012) sugieren que en las raíces de máxima multiplicidad se alcanza la abscisa espectral.

Teorema 3. Si el cuasi-polinomio (17) tiene una raíz de multiplicidad máxima, entonces esta raíz es dominante. Además, la parte real de esta raíz es la máxima cota de decaimiento y los correspondientes parámetros del cuasi-polinomio son $k^{*,d}$.

Demostración. Resolviendo para A, B y C el sistema

$$q(s) = 0, \quad q'(s) = 0 \quad \text{y} \quad q''(s) = 0,$$

se obtiene que

$$A = -\frac{2(1+\tau s)}{\tau}, \quad B = \frac{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 2}{\tau^2} \text{ y } C = -\frac{2e^{\tau s}}{\tau^2}. \quad (18)$$

$$\text{Sea } s_0 = -\frac{A}{2} - \frac{1}{\tau}. \quad (19)$$

Haciendo un cambio de escala y una traslación, definimos el cuasi-polinomio

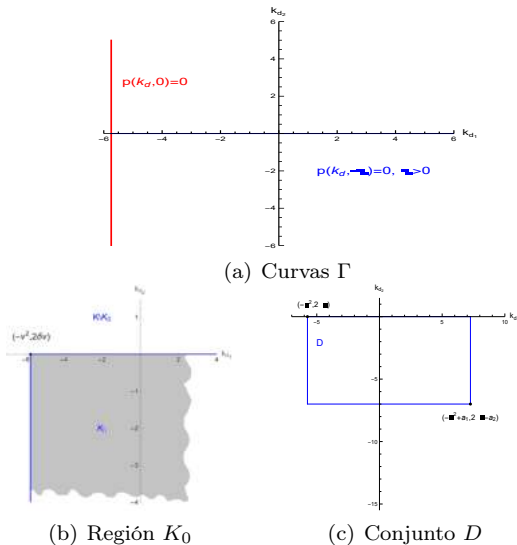


Fig. 3. Regiones de estabilidad de PD en el plano k_{d_1} - k_{d_2} .

$$Q(s) = \tau^2 q \left(\frac{s}{\tau} + s_0 \right) \\ = s^2 - 2s + 1 + B\tau^2 - \frac{A^2\tau^2}{4} + C\tau^2 e^{\frac{A\tau}{2} - s + 1}.$$

Si las ecuaciones (18) se satisfacen, entonces Q tiene una raíz triple en $s = 0$ y

$$Q^{(m)}(s) = (-1)^m C\tau^2 e^{\frac{A\tau}{2} - s + 1} \quad \text{para } m = 3, 4, \dots$$

Por el teorema de Taylor,

$$Q(s) = Q(0) + Q'(0)s + \frac{1}{2}Q''(0)s^2 + \frac{1}{2}\int_0^s Q^{(3)}(t)(s-t)^2 dt \\ = -\frac{1}{2}C\tau^2 e^{\frac{A\tau}{2} + 1} \int_0^s e^{-t}(s-t)^2 dt.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $t = us$ se tiene que

$$Q(s) = -\frac{1}{2}C\tau^2 s^3 e^{\frac{A\tau}{2} + 1} \int_0^1 e^{-us}(1-u)^2 du. \quad (20)$$

De (20), se observa que si $Q(s) = 0$ y $s \neq 0$, entonces $s \in \mathbb{C}$. Sea $s = \sigma + i\omega$, donde $\omega \geq 0$. Así, se obtiene que

$$\int_0^1 e^{-us}(1-u)^2 du = \int_0^1 e^{-u(\sigma+i\omega)}(1-u)^2 du \\ = \int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \cos \omega u du + i \int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \sin \omega u du.$$

Si $Q(s) = 0$ y $s \neq 0$, entonces

$$\int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \cos \omega u du = 0, \quad \text{y} \quad (21)$$

$$\int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \sin \omega u du = 0. \quad (22)$$

La ecuación (21) implica que $\omega \geq \frac{\pi}{2}$ y la ecuación (22) implica que $\omega \geq \pi$. Así, $\omega \geq \pi$. Ahora, puesto que

$$\int_0^1 e^{-us}(1-u)^2 du = \frac{s^2 - 2s + 2 - 2e^{-s}}{s^3},$$

de (20), se tiene que

$$Q(s) = -\frac{1}{2}C\tau^2 e^{\frac{A\tau}{2} + 1}(s^2 - 2s + 2 - 2e^{-s}).$$

Si $Q(s) = 0$, entonces

$$s^2 - 2s + 2 - 2e^{-s} = 0 \Leftrightarrow 2e^{-s} = (s-1)^2 + 1, \\ |2e^{-s}| = |(s-1)^2 + 1| \geq |(s-1)^2| - 1 = |s-1|^2 - 1, \\ 2e^{-\sigma} \geq (\sigma-1)^2 + \omega^2 - 1 \geq \pi^2 - 1 > 8, \\ e^\sigma < 1/4 \quad \text{y} \quad \sigma < -\ln(4) < 0.$$

Por lo tanto, $s = 0$ es una raíz dominante de Q y s_0 es una raíz dominante de q . Además, de las ecuaciones (18)-(19) se obtiene que

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{4B - A^2}}, \quad \sigma = -\frac{A}{2} - \frac{1}{\tau}, \quad \text{y} \quad C = -\frac{2e^{\tau\sigma}}{\tau^2}. \quad \blacksquare \quad (23)$$

Teorema 4. Sea $D \subset K_0$ el conjunto dado en la Figura 2(c). Mediante el proceso de límite ilustrado en la Figura 4, se obtiene que el punto de mejor desempeño de esa región es

$$k_r^{*,d} = \left((\delta^2 - 1)\nu^2 + \frac{1}{\tau^2}, \frac{2e^{-\delta\nu\tau-1}}{\tau^2} \right) \quad (24)$$

y la máxima cota de decaimiento es

$$\sigma^* = \frac{\delta\nu\tau + 1}{\tau}. \quad (25)$$

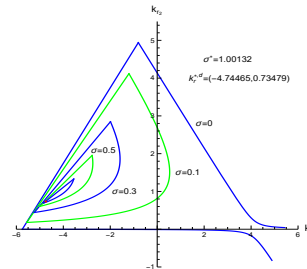


Fig. 4. Regiones de σ estabilidad.

4.2 Fragilidad y desempeño del PD

Observe que el resultado dado en el Teorema 2 es válido para cualquier región compacta D , independientemente del sistema y control. A continuación se empleará para determinar el punto menos frágil del control PD.

Lema 2. Dada una región compacta D , se puede obtener la fragilidad de un punto $k_d^d \in D$ con desempeño dado σ , calculando $\rho(k_d^d) = \min_{k \in \partial D} \|k - k_d^d\|$.

Demostración. El resultado sigue usando el valor mínimo de la Definición 4. \blacksquare

Corolario 1. Dada una región compacta D , si el círculo más grande que puede inscribirse en la región D tiene sólo dos puntos de contacto $\gamma(\omega_1)$ y $\gamma(\omega_2)$, entonces ω_1 y ω_2 satisfacen (16), y el punto menos frágil puede calcularse como

$$k^{*,f} = \frac{1}{2}[\gamma(\omega_1) + \gamma(\omega_2)].$$

Demostración. Sigue del Teorema 2. \blacksquare

5. ILUSTRACIÓN DE RESULTADOS

En esta sección se ilustran los resultados teóricos dados anteriormente para determinar el *punto menos frágil* y el *punto de mejor desempeño* para $\delta = 0.00055$ y $\nu = 2.3968$.

5.1 Ejemplo controlador PR plano τ - k_{r_2}

Sea $D \subset K_0$ el conjunto dado en la Figura 1(c). Empleando las fórmulas (23) del Teorema 3, se determina el punto de mejor desempeño $k_r^{*,d} = (5, 7.90229, 0.305073) \in D$. Aquí, $\sigma^* = 3.27922$ es la máxima cota de decaimiento alcanzable para la solución del sistema en lazo cerrado cuya ecuación característica es (7). Para este punto de mejor desempeño $k_r^{*,d}$, se determina que su fragilidad es $\rho(k_r^{*,d}) = 0.305407$, ver Figura 5(a). Ahora, empleando el Teorema 2, se encuentra que el punto menos frágil es $k_r^{*,f} = (5, 0.865272, 0.460793)$, ver Figura 5(b). Observe que $\rho(k_r^{*,f}) = 0.463962$, mientras que la cota de decaimiento en la respuesta del sistema es $\sigma = 0.142214$.

Observación 2. Como afirma el Teorema 1, el controlador de mejor desempeño no es el menos frágil y el controlador menos frágil no es el de mejor desempeño. Por lo tanto, para esta región D y este tipo de sistemas estudiados, es imposible encontrar un punto que tal que $k_r^{*,f} = k_r^{*,d}$.

5.2 Ejemplo control PR plano k_{r_1} - k_{r_2}

Empleando las fórmulas (24)-(25) del Teorema 4, se determina el punto de mejor desempeño $k_r^{*,d} = (-4.74465, 0.73479, 1)$. Aquí, $\sigma^* = 1.00132$ es la máxima cota de

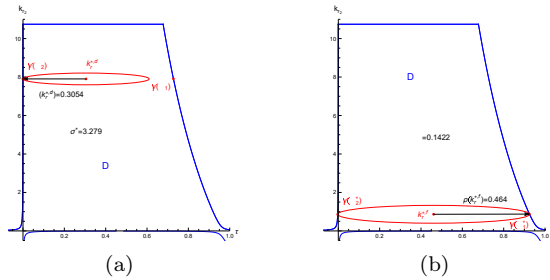


Fig. 5. (a) Fragilidad del punto de mejor desempeño $k_r^{*,d}$.
(b) Desempeño del punto menos frágil $k_r^{*,f}$.

decaimiento alcanzable para la solución del sistema en lazo cerrado cuya ecuación característica es (7). Para este punto de mejor desempeño $k_r^{*,d}$, se determina que su fragilidad es $\rho(k_r^{*,d}) = 0.187533$, ver Figura 6(a). Ahora, usando la Proposición 4 en (Oaxaca-Adams et al., 2021), se encuentra que el punto menos frágil es $k_r^{*,f} = (-0.802388, 2.04284, 1)$, ver Figura 6(b). Observe que $\rho(k_r^{*,f}) = 2.0502$, mientras que la cota de decaimiento en la respuesta del sistema es $\sigma = 0.204343$.

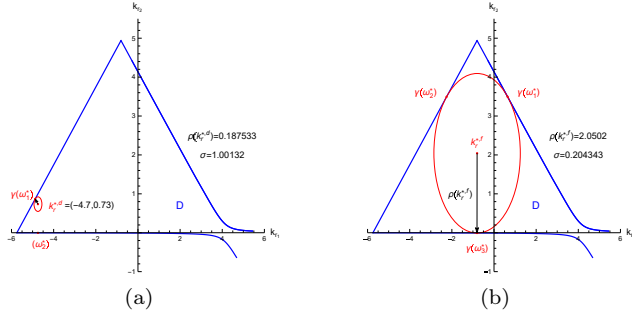


Fig. 6. (a) Fragilidad del punto de mejor desempeño y (b) desempeño del punto menos frágil en el plano $k_{r1}-k_{r2}$.

5.3 Ejemplo control PD plano $k_{r1}-k_{r2}$

De manera similar a las subsecciones anteriores, ahora se ilustran los resultados de fragilidad y desempeño de un sistema de segundo orden en lazo cerrado con una ley de control PD.

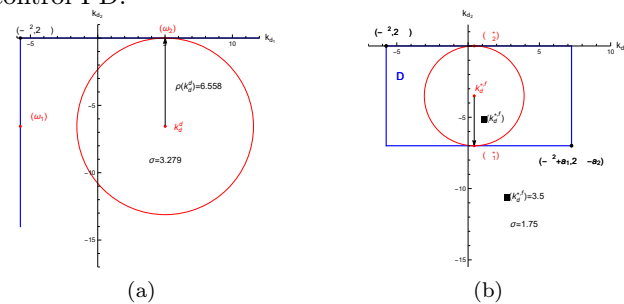


Fig. 7. (a) Fragilidad del punto k_d^d con desempeño $\sigma = 3.279$. (b) Desempeño del punto menos frágil $k_d^{*,f}$.

Del Lema 2, para un controlador PD con desempeño dado $\sigma = 3.27922$, se obtiene que las ganancias y la fragilidad del sistema son $k_d^d = (k_{d1}, k_{d2}) = (5.00864, -6.55581)$ y $\rho(k_d^d) = 6.55844$, respectivamente, ver Figura 7(a). Ahora, empleando el Corolario 1, para la región D de la Figura 3(c), el control menos frágil es $k_d^{*,f} = (0.43, -3.49736)$, su desempeño es $\sigma = 1.75$ y la fragilidad es $\rho(k_d^{*,f}) = 3.5$, ver Figura 7(b).

5.4 PR vs PD

Debido a que la región de estabilidad es no acotada para el control PD, los puntos de mejor desempeño y menor fragilidad pueden colocarse casi en cualquier lugar.

En la Tabla 1, se presentan los datos obtenidos sobre el desempeño y fragilidad de los controladores estudiados.

Tabla 1. Desempeño y Fragilidad: PR vs PD

Punto	Desempeño	Fragilidad
$k_r^{*,d} = (5, 7.902, 0.305)$	$\sigma^* = 3.279$	$\rho(k_r^{*,d}) = 0.305$
$k_r^{*,f} = (5, 0.865, 0.460)$	$\sigma = 0.142$	$\rho(k_r^{*,f}) = 0.464$
$k_r^{*,d} = (-4.744, 0.734, 1)$	$\sigma^* = 1.001$	$\rho(k_r^{*,d}) = 0.187$
$k_r^{*,f} = (-0.802, 2.042, 1)$	$\sigma = 0.204$	$\rho(k_r^{*,f}) = 2.043$
$k_d^d = (5.008, -6.555)$	$\sigma = 3.279$	$\rho(k_d^d) = 6.558$
$k_d^{*,f} = (0.43, -3.497)$	$\sigma = 1.75$	$\rho(k_d^{*,f}) = 3.5$

En la Figura 8(a), se proporcionan las respuestas temporales de la planta de segundo orden cuya función de transferencia es de la forma (1) en lazo cerrado con los controladores PR y PD dados en (2) y (3), respectivamente. Aquí, se emplean los puntos con el mismo desempeño, $k_r^{*,d} = (5, 7.902, 0.305)$ y $k_d^d = (5.008, -6.555)$. Mientras que en la Figura 8(b), se muestran las señales de control PR y PD suministradas al sistema de segundo orden.

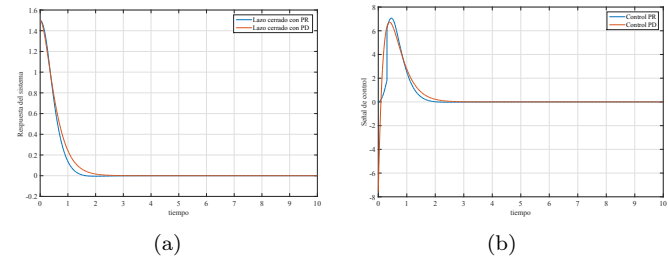


Fig. 8. (a) Respuesta temporal y (b) señal de control del sistema cuyo cuasi-polinomio es (7).

6. CONCLUSIÓN

En este manuscrito se presenta un estudio para determinar el desempeño y la fragilidad de dos tipos de controladores, el control PR y el control PD. Observe que la estructura de estos controladores es muy semejante, ya que $\dot{e}(t) \approx k_1 e(t) - k_2 e(t - \tau)$, razón por la cual la comparación tiene sentido en un principio. En este contexto, se puede observar lo siguiente: el control PR tiene más parámetros por sintonizar, en comparación con el control PD. Así mismo, teóricamente el controlador PD ofrece puntos menos frágiles con mayor desempeño. Sin embargo, cabe recordar la declaración de varios autores respecto a que el empleo de retardos en el control coadyuva a la insensibilidad de ruidos. Además, para el mismo desempeño $\sigma = 3.279$, las señales de control PR y PD son semejantes, ver Figura 8(b). Aunque no se presentan figuras al respecto, si se fija $0 < \tau < 1$ en el control PR, la región de estabilidad $k_{r1}-k_{r2}$ es mucho más grande, en comparación a la dada en la Figura 2(c), por lo cual el desempeño aumenta y la fragilidad disminuye. En la Observación 2, se dice que para esa región D y ese tipo de sistemas estudiados, es imposible encontrar un punto que tal que $k_r^{*,f} = k_r^{*,d}$. Sin embargo, podrían existir sistemas

en los que ocurra la igualdad en una o en ambas de las siguientes desigualdades:

$$\alpha(k^{*,d}) \leq \alpha(k^{*,f}) \quad \text{y} \quad \rho(k^{*,d}) \leq \rho(k^{*,f}).$$

Una recomendación que se obtiene del estudio hecho en este trabajo, es buscar controladores con buen desempeño y poca fragilidad, lo cual será un trabajo futuro de estos autores.

REFERENCES

- Abdallah, C., Dorato, P., Benites-Read, J., and Byrne, R. (1993). Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In *American Control Conference, 1993*, 3106–3107. IEEE.
- Alfaro, V.M. (2007). PID controllers' fragility. *ISA transactions*, 46(4), 555–559.
- Åström, K.J. and Häggglund, T. (2001). The future of pid control. *Control engineering practice*, 9(11), 1163–1175.
- Berner, J., Soltesz, K., Häggglund, T., and Åström, K.J. (2018). An experimental comparison of PID auto-tuners. *Control Engineering Practice*, 73, 124–133.
- Bleich, M.E. and Socolar, J.E. (1996). Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback. *Physics Letters A*, 210(1-2), 87–94.
- Boussaada, I., Tliba, S., Niculescu, S., Unal, H.U., and Vyhlidal, T. (2017). Further remarks on the effect of multiple spectral values on the dynamics of time-delay systems. application to the control of a mechanical system. *Linear Algebra and its Applications*, 542, 589–604.
- de Sousa Vieira, M. and Lichtenberg, A. (1996). Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. *Physical Review E*, 54(2), 1200.
- Gu, K., Chen, J., and Kharitonov, V. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser Boston.
- Hernández-Díez, J.E., Méndez-Barrios, C.F., Mondié, S., Niculescu, S.I., and González-Galván, E. (2018). Proportional-delayed controllers design for LTI-systems: a geometric approach. *International Journal of Control*, 91(4), 907–925.
- Just, W., Bernard, T., Ostheimer, M., Reibold, E., and Benner, H. (1997). Mechanism of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 78(2), 203.
- Kokame, H. and Mori, T. (2002). Stability preserving transition from derivative feedback to its difference counterparts. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 129–134.
- Mazanti, G., Boussaada, I., and Niculescu, S.I. (2020a). On qualitative properties of single-delay linear retarded differential equations: Characteristic roots of maximal multiplicity are necessarily dominant. *arXiv preprint arXiv:2002.06146*.
- Mazanti, G., Boussaada, I., Niculescu, S.I., and Chitour, Y. (2020b). Effects of roots of maximal multiplicity on the stability of some classes of delay differential-algebraic systems: The lossless propagation case. *arXiv preprint arXiv:2002.00078*.
- Melchor-Aguilar, D. and Niculescu, S.I. (2009). Computing non-fragile PI controllers for delay models of TCP/AQM networks. *International Journal of Control*, 82(12), 2249–2259.
- Méndez-Barrios, C., Niculescu, S.I., Morarescu, C.I., and Gu, K. (2008). On the fragility of PI controllers for time-delay SISO systems. In *2008 16th mediterranean conference on control and automation*, 529–534. IEEE.
- Mondie, S., Villafuerte, R., and Garrido, R. (2011). Tuning and noise attenuation of a second order system using Proportional Retarded control. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 10337–10342.
- Morarescu, C.I. and Niculescu, S. (2007). Stability crossing curves of SISO systems controlled by delayed output feedback. *Dynamics Of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B*, 14(5), 659.
- Morărescu, I.C., Méndez-Barrios, C.F., Niculescu, S.I., and Gu, K. (2011). Stability crossing boundaries and fragility characterization of PID controllers for SISO systems with I/O delays. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, 4988–4993. IEEE.
- Neimark, J. (1949). D-decomposition of the space of quasipolynomials. *Appl. Math. Mech*, 13, 349–380.
- Neimark, J.I. (1973). D-decomposition of the space of quasi-polynomials (on the stability of linearized distributive systems). *American Mathematical Society Translations*, 102, 95–131.
- Oaxaca-Adams, G., Villafuerte-Segura, R., and Aguirre-Hernández, B. (2021). On non-fragility of controllers for time delay systems: A numerical approach. *Journal of the Franklin Institute*, 358(9), 4671–4686.
- Pólya, G. and Szegő, G. (1998). *Problems and theorems in analysis I: Series. Integral calculus. Theory of functions*. Springer Science & Business Media.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics letters A*, 170(6), 421–428.
- Ramírez, A., Mondié, S., Garrido, R., and Sipahi, R. (2016). Design of proportional-integral-retarded (PIR) controllers for second-order LTI systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(6), 1688–1693.
- Silva, G.J., Datta, A., and Bhattacharyya, S.P. (2005). *PID controllers for time-delay systems*, volume 43. Springer.
- Suh, H. and Bien, Z. (1980). Use of time-delay actions in the controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3), 600–603.
- Suh, I. and Bien, Z. (1979). Proportional minus delay controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(2), 370–372.
- Swisher, G.M. and Tenqchen, S. (1988). Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second-and third-order systems. In *American Control Conference, 1988*, 254–260. IEEE.
- Ulsoy, A.G. (2015). Time-delayed control of SISO systems for improved stability margins. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(4), 041014.
- Villafuerte, R., Mondie, S., and Garrido, R. (2012). Tuning of proportional retarded controllers: theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3), 983–990.