

Stabilization of a Furuta's Pendulum using Barrier Function-based Adaptive Lyapunov Re-design. *

A. González-Rodríguez * J. Antonio Ortega *
Manuel A. Estrada * Jaime A. Moreno ** Leonid Fridman *

* *Departamento de Control y Robótica, División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, Mexico*

andresglezrod29@gmail.com, josseeega@outlook.com,
manny.estrada.94@gmail.com, lfridman@unam.mx

** *Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, Mexico* JMorenoP@ingen.unam.mx

Abstract:

One of the most challenging task in the control engineering is the stabilization of underactuated systems. This task can be even arduous if the system is affected by parametric uncertainties due to a partial knowledge of the parameters or external disturbances. These difficulties could lead to instability. The paper presents an adaptive approach to the Lyapunov redesign, stabilizing a Furuta's pendulum, where the control signal follows the uncertainties with opposite sign. The controller is composed of a nominal term and a barrier function based adaptive sliding mode control. The gain guarantees the system trajectories converge to a vicinity of the surface in finite-time. Then, a barrier-function gain maintains the sliding surface inside a predefined vicinity. In this matter, the proposed controller guarantees the estimation of the uncertainties generating a continuous control signal from the semi-positive definite barrier function. Finally, some experiments were performed to prove the feasibility of the proposed controller.

Palabras clave: Continuous Sliding Mode Control, Control of Nonlinear Systems, Adaptive Systems

1. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas sub-actuados es un problema de gran interés para la teoría de control actual. En Spong (1998) se pueden definir varias razones por las cuales un sistema mecánico puede ser sub-actuado. Estas son:

- Debido a que así fue diseñado mecánicamente
- Cuando un manipulador serial se encuentra en conjunto de un robot móvil.
- Al momento de hacer diseño de control, la sub-actuación se encuentra en el modelo matemático.

Varias investigaciones se han realizado respecto al control de estos sistemas, cuyas tareas a realizar o la falta de actuadores comprometen el tipo de controlador que se puede optar, aportando una manera eficiente de llevar al sistema al punto de equilibrio deseado. En Spong (1994) un *acrobat*

es controlado mediante una linealización parcial en su subsistema maestro y del uso de un *backstepping* integral en su subsistema esclavo. Para el mismo sistema mecánico mencionado con anterioridad se utiliza un control basado en métodos de energía utilizado en Spong (1996).

En el trabajo de Olfati-Saber (2001)[Cap. 4] se proponen distintas transformaciones no lineales para resolver el problema de estabilización. Dichas transformaciones llevan al sistema a una forma conveniente para el diseño de una ley de control. Sin embargo, es importante mencionar que para poder aplicar se necesitan conocer los parámetros del sistema.

Por otro lado, modos deslizantes adaptables permiten resolver el problema de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas cuyas cotas son desconocidas (Andrievsky et al., 1996, 2015; Furtat et al., 2019; Hsu and Costa, 1989; Plestan et al., 2010; Shtessel et al., 2012; Taleb et al., 2013; Negrete-Chávez and Moreno, 2016; Roy et al., 2020; Rinaldi et al., 2021; Edwards and Shtessel, 2016). Un problema de estas adaptaciones es

* Los autores agradecen el apoyo de parte de PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica) IN106622 and IN102121.

que por lo general, la ganancia es sobre estimada. Por ende, es de interés en aplicaciones resolver dos problemas contradictorios:

- Confinar las trayectorias del sistema en una vecindad *predefinida* del origen en un tiempo finito, a pesar de las perturbaciones.
- Adaptar la ganancia del control discontinuo para seguir los cambios en las perturbaciones sin ser sobrestimada.

En este artículo, se propone una estrategia adaptable para estabilizar el péndulo de Furuta basada en el rediseño de Lyapunov. Utilizando un cambio de coordenadas para llevar al sistema a un sistema maestro-esclavo, y se diseña una ley de control adaptable para llevar las trayectorias al equilibrio incluso en presencia de incertidumbres paramétricas sin sobrestimar la ganancia del controlador.

Esta ganancia se basa en el trabajo Cruz-Ancona et al. (2021), que consta de una función que lleva el sistema a una vecindad predefinida y conmuta a una función barrera la cual es encargada de mantener las trayectorias del estado en ella.

El artículo esta organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta lo referente al péndulo de Furuta, su modelo dinámico y sus parámetros. En la sección 3 se presenta la transformación del sistema a su forma normal. La sección 4 se aplica el rediseño de Lyapunov. El análisis de estabilidad de la ganancia adaptable se encuentra sección 5. Los resultados de los experimentos son presentados en la sección 6. Por último las conclusiones y discusión del trabajo se encuentran en la secciones 7 y 8.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

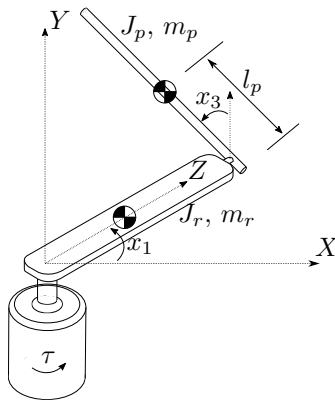


Fig. 1. Diagrama del péndulo de Furuta.

Considere el péndulo de Furuta mostrado en la Fig. 1. Esta figura describe un péndulo el cual es accionado por un motor fijo cuyo radio de giro es perpendicular a dicho péndulo. El vector de estados es $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, donde $x_1 [rad]$ es la posición angular del motor fijo, $x_2 [rad/s]$ es la velocidad angular del motor fijo, $x_3 [rad]$ es la posición angular del péndulo ($x_3 = 0$ es el punto de

equilibrio superior) y $x_4 [rad/s]$ es la velocidad angular del péndulo.

La representación en espacio de estados del péndulo de Furuta (*c.f.*, Quanser (2021)) es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{b_3 \cos(x_3)f(x) - b_4 w(x, \tau)}{d(x)} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{(b_1 - b_2 \cos(x_3)^2)f(x) - b_3 \cos(x_3)w(x, \tau)}{d(x)} \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= b_2 \sin(x_3) \cos(x_3)x_2^2 + b_5 \sin(x_3), \\ w(x, \tau) &= w_f(x) - \tau, \\ w_f(x) &= 2b_2 \sin(x_3) \cos(x_3)x_2x_4 + b_3 \sin(x_3)x_4^2, \\ d(x) &= b_4(b_1 - b_2 \cos(x_3)^2) - b_3^2 \cos(x_3)^2 > 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} b_1 &= J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2, & b_2 &= \frac{1}{4} m_p L_p^2, \\ b_3 &= \frac{1}{2} m_p L_r L_p, & b_4 &= J_p + b_2, & b_5 &= \frac{1}{2} m_p L_p g. \end{aligned}$$

siendo τ la entrada de control u al sistema.

Note como la entrada de control u no afecta la dinámica del péndulo cuando el término $\cos x_3$ es igual a cero. Es decir cuando el péndulo esta sobre el plano horizontal.

Objetivo: El objetivo del artículo es diseñar un controlador adaptable basado en una función barrera para estabilizar el origen del péndulo de Furuta, sin conocimiento exacto de los parámetros y de las cotas de las perturbaciones en el sistema.

3. ESTABILIZACIÓN

Existen resultados publicados sobre estabilización local asintótica para el Péndulo de Furuta. Dentro de la clasificación propuesta por Olfati-Saber Olfati-Saber (2001) el péndulo de Furuta pertenece a la clase II. Igualmente en Olfati-Saber (2001) se propone el uso de leyes de punto fijo para estabilizar el péndulo de Furuta en su forma normal. En (Utkin et al., 1999, Cap. 4), el péndulo de Furuta se transforma en su forma regular donde un control discontinuo de primer orden lleva las trayectorias del péndulo de Furuta a una superficie deslizante de primer orden en tiempo finito.

En esta sección se propone una solución de estabilización basado en ambos resultados. El diseño del controlador se divide en tres pasos:

- Paso 1:** Transformación del péndulo de Furuta en un sistema en cascada.
Paso 2: Diseño de una variable de control virtual z_3 que garantice la estabilidad del subsistema esclavo.

Paso 3: Diseño de un controlador adaptable por modos deslizantes que garantice la estabilidad del subsistema maestro sin necesidad del conocimiento de las cotas del sistema. De esa manera se concluye la estabilidad del sistema en cascada completo.

3.1 Transformación a un sistema en cascada

Considere el modelo del péndulo de Furuta en (1). El siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \vartheta(x_3), \\ z_2 &= x_2 - \frac{b_4}{b_3 \cos(x_3)} x_4, \\ z_3 &= \tan(x_3), \\ z_4 &= (1 + \tan^2(x_3))x_4. \end{aligned} \quad (2)$$

La función $\vartheta(x_3)$ se elige de la siguiente manera

$$\vartheta(x_3) := \int_0^{x_3} \left(\frac{b_4}{b_3 \cos(x_3)} \right) dx_3 = \frac{b_4}{b_3} \ln \left(\frac{1 + \sin(z_3)}{\cos(z_3)} \right).$$

Para obtener las dinámicas de lazo cerrado del sistema (2), se diseña el siguiente control, el cual es encargado de hacer una linealización parcial

$$\tau = w_f(x) + \frac{\nu d(x) - (b_1 - b_2 \cos(x_3)^2) f(x)}{b_3 \cos(x_3)}, \quad (3)$$

$$\nu = \frac{\bar{\nu} - 2 \tan(x_3) (1 + \tan^2(x_3)) x_4^2}{1 + \tan^2(x_3)}. \quad (4)$$

Quedando la dinámica de la de las coordenadas z en la forma normal dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \Gamma(z_2, z_3, z_4) z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= \bar{\nu} \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\bar{\nu}$ es el control que se desea aplicar y

$$\begin{aligned} \Gamma(z_2, z_3, z_4) &= -\frac{b_5}{b_3} - \frac{b_4 z_4^2}{b_3 (1 + z_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{b_2}{b_3 \sqrt{1 + z_3^2}} \left(z_2 + \frac{b_4 z_4}{b_3 \sqrt{1 + z_3^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

3.2 Control Virtual del Subsistema Esclavo

De tal forma que el sistema tenga grado relativo completo, es decir, grado relativo 4, se considera un sistema nominal.

La forma nominal del sistema (5) es dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{b_5}{b_3} z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= \bar{\nu} \end{aligned} \quad (6)$$

donde se asume la función $\Gamma(z_2, z_3, z_4) = -\frac{b_5}{b_3}$, donde los parámetros b_5 y b_3 son conocidos.

El término z_3 puede usarse para diseñar un control virtual $z_3 = \sigma(z_1, z_2)$ definido como

$$\sigma(z_1, z_2) = -c_1 z_1 - c_2 z_2, \quad \dot{\sigma}(z_2, z_3) = -c_1 z_2 - \frac{b_5}{b_3} c_2 z_3, \quad (7)$$

con constantes positivas c_1, c_2 , diseñadas para tener estabilidad asintótica de $(z_1, z_2) = 0$. Para ver la prueba de lo anterior ver el trabajo de Ortega et al. (2022).

Haciendo un cambio de variables se obtiene:

$$\mu_1 = z_3 - \sigma, \quad \mu_2 = z_4 - \dot{\sigma} \quad (8)$$

con la siguiente linealización parcial por salida,

$$\bar{\nu} = \nu_\mu - \frac{b_5}{b_3} c_1 z_3 - \frac{b_5}{b_3} c_2 z_4 \quad (9)$$

lleva al sistema a la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \Gamma(z_1, z_2, \mu_1, \mu_2)(\mu_1 + \sigma(z_1, z_2)), \\ \dot{\mu}_1 &= \mu_2, \\ \dot{\mu}_2 &= \nu_\mu \end{aligned} \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma(z_1, z_2, \mu_1, \mu_2) &= -\frac{b_5}{b_3} - \frac{b_4(\mu_2 + c_1 z_2 - c_2 \frac{b_5}{b_3}(\sigma + \mu_1))^2}{b_3(1 + (\sigma + \mu_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{b_2}{b_3 \sqrt{1 + (\sigma + \mu_1)^2}} \times \\ &\quad \left(z_2 + \frac{b_4(\mu_2 + c_1 z_2 - c_2 \frac{b_5}{b_3}(\sigma + \mu_1))}{b_3 \sqrt{1 + (\sigma + \mu_1)^2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

4. ESTABILIZACIÓN DEL SISTEMA MAESTRO

La retroalimentación parcial usada en (3), asume el conocimiento exacto de los parámetros del sistema, lo cual en la práctica no es posible. Usando la siguiente retroalimentación parcial que contiene incertidumbres

$$\tau^s = 2b_2^s \sin(x_3) \cos(x_3) x_2 x_4 + b_3^s \sin(x_3) x_4^2 \quad (12)$$

$$+ B_r^s x_2 + \frac{d^s(x) \nu - (b_1^s - b_2^s \cos(x_3)^2) f^s(x)}{b_3^s \cos(x_3)}, \quad (13)$$

$$\nu = \frac{\bar{\nu} - 2 \frac{2z_3 z_4^2}{(1+z_3^2)}}{1 + z_3^2} \quad (14)$$

done el subíndice s indica los parámetros que son parcialmente conocidos. El sistema (10) en lazo cerrado con el controlador (12) es descrito como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & \dot{z}_2 &= \Gamma(z_1, z_2, \mu_1, \mu_2)(\mu_1 + \sigma(z_1, z_2)), \\ \dot{\mu}_1 &= \mu_2, & \dot{\mu}_2 &= \beta_1(x)[\bar{v} + \phi_1(x)], \end{aligned} \quad (15)$$

donde:

$$\begin{aligned} \beta_1(x) &= \frac{b_3 d^s(x)}{b_3^s d(x)} \\ \phi_1(x) &= -\frac{2z_3 z_4^2}{(1+z_3^2)} + \frac{1}{\beta(x)} \left(\frac{2z_3 z_4^2}{(1+z_3^2)} + (1+z_3^2)\phi(x) \right. \\ &\quad \left. + c_1 \frac{b_5}{b_3} z_3 - c_2 \frac{b_5}{b_3} z_4 \right) \\ \phi(x) &= \frac{(b_1 - b_2 \cos(x_3))^2 f(x)}{d(x)} \\ &\quad - \frac{(b_1^s - b_2^s \cos(x_3))^2 f^s(x)}{d(x)} - \frac{b_3 \cos(x_3)}{d(x)} \Delta\omega(x) \end{aligned} \quad (16)$$

Debido a que ambos grados de libertad del sistema son rotatorios la funciones contienen términos trigonométricos. Además de esto, ya que el péndulo nunca se encuentra en posición horizontal, se tiene lo siguiente

$$\|\beta_1\| \leq H_1, \quad \|\phi_1\| \leq H_2, \quad \|\phi\| \leq H_3 \quad (17)$$

donde, H_i , $i = 1, 2, 3$ son las cotas superiores de las funciones β_1 , ϕ_1 y ϕ respectivamente.

Para la aplicación de una técnica robusta al sistema (15), en la literatura se encuentra el uso de las cotas de las ecuaciones en (16). Debido a la cantidad de funciones y su complejidad para obtener sus cotas, en este artículo se opta por el uso del rediseño de Lyapunov, usando el método de función barrera como ganancia adaptable (RLFBA) (vease. Cruz-Ancona et al. (2021)). En dicho controlador las cotas deben existir, pero no es necesario su conocimiento.

4.1 Aplicación del rediseño de Lyapunov

La aplicación del RLFBA se hará en el sistema maestro del sistema (15) dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \mu_2 \\ \dot{\mu}_2 &= \beta_1(t, z)[\bar{v} + \phi_1(t, z)] \end{aligned} \quad (18)$$

El sistema dado por (18), puede ser representado de la siguiente manera:

$$\dot{\mu} = A\mu + B\{[1 + \Delta B_m(t, z)]u + \Delta f_m(t, z)\} \quad (19)$$

con

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_m(t, z) := \beta_1 - 1 \\ \Delta f_m(t, z) &= \beta_1 \phi_1, \quad u = \bar{v} + v \end{aligned}$$

Suponga que los parámetros del sistema (5) son conocidos, de esta forma el sistema (18) tiene la siguiente estructura, (denominada también parte nominal del sistema).

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \mu_2 \\ \dot{\mu}_2 &= \bar{v} \end{aligned} \quad (20)$$

con $\beta_1 = 1$ y $\phi_1(t, z) = 0$. y descrita de la siguiente manera:

$$\dot{\mu} = A\mu + B\bar{v} \quad (21)$$

Suposición 1. El control \bar{v} en el sistema (20) es una retroalimentación de estados de la forma

$$\bar{v} = -B^T P \mu \quad (22)$$

con $\mu = [\mu_1 \ \mu_2]^T$. La matriz P es obtenida de la ecuación algebraica de Riccati.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

considerando el sistema en la forma (21).

En Cruz-Ancona et al. (2021) se dan los detalles para el uso del rediseño de Lyapunov, los cuales se aplicaron al sistema (18).

El primer paso es tener el sistema (18) en la forma (19).

Lo siguiente es encontrar la variable deslizante w , dada por

$$\mathbf{w} = B^T \frac{\partial V_0}{\partial \mu} \quad (23)$$

donde V_0 es la función de Lyapunov nominal del sistema (20), el cual es dada por

$$V_0 = \mu P \mu \quad (24)$$

quedando (23) de la siguiente manera

$$\mathbf{w} = B^T P \mu \quad (25)$$

La derivada de la superficie deslizante con respecto al tiempo esta dada por

$$\dot{\mathbf{w}} = \bar{F}(t, \mathbf{x}) + \bar{B}(t, \mathbf{x})[(\mathbf{I}_m + \Delta B_m(t, \mathbf{x}))\mathbf{v} + \Delta F_m(t, \mathbf{x})]$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta F_m(t, \mathbf{x}) &= \Delta B_m(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x}) + \Delta f_m(t, \mathbf{x}) \\ \Delta F_m(t, \mu) &= -(\beta_1 - 1)B^T P \mu + \beta_1 \phi_1 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\bar{F}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \bar{f}$$

$$\bar{f} = f(t, x) + B(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(t, \mu) &= B^T P (A\mu + B(-B^T P \mu)) \\ &= B^T P (A\mu - BB^T P \mu) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\bar{B}(t, \mathbf{x}) := \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} B(t, \mathbf{x})$$

$$\bar{B}(t, \mu) = B^T P B \quad (28)$$

La derivada de la superficie deslizante se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{w}} = \bar{B}(t, \mathbf{x})[(\mathbf{I}_m + \Delta B(t, \mathbf{x}))\mathbf{v} + \bar{\Delta F}_m(t, \mathbf{x})]$$

donde

$$\begin{aligned}\overline{\Delta F}_m(t, \mathbf{x}) &= \overline{B}^{-1}(t, \mathbf{x}) \overline{F}(t, \mathbf{x}) + \Delta F_m(t, \mathbf{x}) \\ \overline{\Delta F}_m(t, \mu) &= (B^T P B)^{-1} B^T P (A\mu - B B^T P \mu) \\ &\quad - (\beta_1 - 1) B^T P \mathbf{x} + \beta_1 \phi_1\end{aligned}$$

Ya que se obtiene lo anterior, en la siguiente sección se verá la aplicación de la función barrera en la ganancia del controlador.

4.2 Aplicación del rediseño de Lyapunov adaptable

Definición 1. Sea \mathcal{B} una función creciente definida de la forma $\mathcal{B} : [0, \varepsilon) \rightarrow [\overline{\mathcal{B}}, \infty)$. Un ejemplo de dicha función es expresada a continuación,

$$\mathcal{B}(\|\mathbf{w}\|) = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\varepsilon - \|\mathbf{w}\|} \quad (29)$$

teniendo un solo mínimo en cero, i.e. definida semi-positiva. Dicha función se le denominará función barrera.

Suponga una función definida de la siguiente manera

$$r = \|\overline{\mathbf{w}}\| + \overline{\Gamma}(t, \mu, \hat{\mathbf{b}}) + \frac{\hat{\rho}}{\|\overline{\mathbf{w}}\|}$$

siendo la función $\overline{\Gamma}(t, \mu, \hat{\mathbf{b}})$ convexa, la cual tiene las siguientes características

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{b}}} &= L \left[\frac{\partial \overline{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{b}})^T}{\partial \hat{\mathbf{b}}} \|\overline{\mathbf{w}}\| - \Xi \hat{\mathbf{b}} \right], \quad \hat{\mathbf{b}}(t_0) = \hat{\mathbf{b}}_{t_0} \\ \dot{\hat{\rho}} &= l - \hat{\rho}, \quad \hat{\rho}(t_0) > l\end{aligned}$$

donde:

- $\hat{\mathbf{b}}(t_0) \in \mathbb{R}^p$, con $\hat{\mathbf{b}}_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$.
- $\hat{\rho}(t_0) \in \mathbb{R}^+$, $\Xi \in \mathbb{R}^{p \times p}$ son matrices con elementos positivos solo en la diagonal y se tiene $l \gg 1$.

Teorema 1. Sea el sistema (18) con la cotas desconocidas definidas en (17), en la forma (19). El control u es dado por,

$$u = \bar{v} + \nu$$

donde \bar{v} es definida en (22) y ν es el vector unitario definido de la siguiente manera

$$\nu = -k \frac{\overline{\mathbf{w}}}{\|\overline{\mathbf{w}}\|} \quad (30)$$

con $\overline{\mathbf{w}} := \overline{B}^T(t, \mu) \mathbf{w}$ y la ganancia k adaptable definida de la forma

$$k = \begin{cases} \|\overline{\mathbf{w}}\| + \overline{\Gamma}(t, \mu, \hat{\mathbf{b}}) + \frac{\hat{\rho}}{\|\overline{\mathbf{w}}\|}, & \text{if } \|\mathbf{w}\| > \varepsilon/2 \\ \mathcal{B}(\|\mathbf{w}\|), & \text{if } \|\mathbf{w}\| \leq \varepsilon/2 \end{cases} \quad (31)$$

El controlador propuesto u llevará al sistema (18) a una vecindad ε predefinida, en un tiempo t_0 y el sistema permanecerá en dicha vecindad $\forall t \geq t_0$. ■

La prueba de *Teorema 1* se realizará en la siguiente sección.

5. PRUEBA DE LOS RESULTADOS

5.1 Prueba de la primera función de la ganancia adaptable k

Para el análisis de estabilidad, primero es necesario que la primera ecuación de la ganancia adaptable (31), sea asintóticamente estable, para llevar al sistema a una vecindad $\varepsilon > 0$ y conmutar a la función barrera.

Suponga la siguiente función de Lyapunov propuesta en Cruz-Ancona et al. (2021)

$$\begin{aligned}V_T &= V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} \\ V_{T_1} &= \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \\ V_{T_2} &= \frac{b_0}{2} (\hat{\mathbf{b}}(t) - \mathbf{b})^T L^{-1} (\hat{\mathbf{b}}(t) - \mathbf{b}) \\ V_{T_3} &= \frac{b_0}{2\theta} (\hat{\rho} - l)^2\end{aligned} \quad (32)$$

donde:

$$\begin{aligned}b_0 &:= 1 + \beta_1 - 1 \\ b_0 &= \beta_1 > 0\end{aligned}$$

Cada una de las funciones de Lyapunov en (32) son acotadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{V}_{T_1} &\leq -b_0 \|\overline{\mathbf{w}}\|^2 - b_0 (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})^T \frac{\partial \overline{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{b}})^T}{\partial \hat{\mathbf{b}}} \|\overline{\mathbf{w}}\| - b_0 \hat{\rho} \\ \dot{V}_{T_2} &\leq b_0 (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})^T \frac{\partial \overline{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{b}})^T}{\partial \hat{\mathbf{b}}} \|\overline{\mathbf{w}}\| \\ &\quad - \lambda_m(\Xi) \frac{b_0}{2} \|\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda_M(\Xi) \frac{b_0}{2} \|\mathbf{b}\|^2 \\ \dot{V}_{T_3} &\leq \frac{b_0 l}{\theta} (\hat{\rho} - l) - \frac{b_0}{2\theta} (\hat{\rho} - l)^2 + \frac{b_0}{2\theta} l^2\end{aligned} \quad (33)$$

con

$$\|\overline{\Delta F}_m(t, \mathbf{x})\| \leq \overline{M}(t, \mathbf{x}) = b_0 \overline{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \mathbf{b}) \quad (34)$$

y $-\Gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{b})$ siendo una función convexa:

$$-\overline{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \mathbf{b}) + \overline{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{b}}) + \frac{\partial \overline{\Gamma}(t, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{b}})}{\partial \hat{\mathbf{b}}} (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) \leq 0$$

De tal forma, la derivada de la función de Lyapunov V_T queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}_T \leq -W - b_0 \left(1 - \frac{l}{\theta}\right) \tilde{\rho} - b_0 \left(l - \lambda_M(\Xi) \frac{b_0}{2} \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{l^2}{2\theta}\right) \quad (35)$$

con

$$W(\overline{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\rho}) := b_0 \|\overline{\mathbf{w}}\|^2 + \lambda_m(\Xi) \frac{b_0}{2} \|\tilde{\mathbf{b}}\|^2 + \frac{b_0}{2\theta} (\tilde{\rho})^2$$

$$\tilde{\mathbf{b}} := \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$$

$$\tilde{\rho} := \hat{\rho} - l$$

Teniendo lo siguiente

$$a := \lambda_M(\Xi) \frac{b_0}{2} \|\mathbf{b}\|^2 + \frac{l^2}{2\theta}$$

$$\theta > l > a \Rightarrow \left(1 - \frac{l}{\theta}\right), (l - a) > 0$$

la derivada de la función de Lyapunov es:

$$\dot{V}_T \leq -W - b_0 \left(1 - \frac{l}{\theta}\right) |\tilde{\rho}| - b_0 |l - d| \leq -W(\bar{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\rho})$$

con $\hat{\rho} > l, \forall t$.

Debido a que

$$-b_0 \|\bar{\mathbf{w}}\| \leq -b_0 \lambda_m^{1/2}(\bar{B}\bar{B}^T) \|\mathbf{w}\|$$

y $\bar{B}\bar{B}^T > 0$, el equilibrio de $(\bar{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\rho}) = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

5.2 Prueba de estabilidad de la función barrera

Sea $t = t_0$ el primer tiempo que $\|\mathbf{w}(t, \mathbf{x}(t))\| \leq \varepsilon/2$ y considere la siguiente función de Lyapunov dada en el tiempo $t \geq t_0$,

$$V_S = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{B}(\|\mathbf{w}\|))^2 \quad (36)$$

Si se deriva la función (36) respecto al tiempo, las trayectorias a lo largo de dicha función $\dot{\mathbf{w}}$ y $\dot{\mathcal{B}}(\|\mathbf{w}\|)$, están dadas por

$$\dot{V}_S = \bar{\mathbf{w}}^T \left[(\mathbf{I}_m + \Delta B_m(t, \mathbf{x})) \left(-\mathcal{B} \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\|\bar{\mathbf{w}}\|}\right) + \overline{\Delta F}_m(t, \mathbf{x}) \right]$$

$$+ \zeta \mathcal{B} \frac{\bar{\mathbf{w}}^T}{\|\bar{\mathbf{w}}\|} \left[(\mathbf{I}_m + \Delta B_m(t, \mathbf{x})) \left(-\mathcal{B} \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\|\bar{\mathbf{w}}\|}\right) + \overline{\Delta F}_m(t, \mathbf{x}) \right] \quad (37)$$

donde $\zeta := \varepsilon/(\varepsilon - \|\mathbf{w}\|)^2$ es positiva. La siguiente desigualdad de \dot{V}_S puede ser expresada si (34) cumple,

$$\dot{V}_S \leq -((1 + \lambda_0)\mathcal{B} - \bar{M}) \|\mathbf{w}\| - \zeta \mathcal{B}((1 + \lambda_0)\mathcal{B} - \bar{M}) \frac{\|\bar{\mathbf{w}}\|}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\leq -b_0 \left(\mathcal{B} - \frac{\bar{M}}{b_0}\right) \|\mathbf{w}\| - \zeta b_0 \mathcal{B} \left(\mathcal{B} - \frac{\bar{M}}{b_0}\right) \frac{\|\bar{\mathbf{w}}\|}{\|\mathbf{w}\|}, \quad (38)$$

Si $\|\mathbf{w}\| > s_1$, con s_1 definido de la siguiente manera

$$s_1 = \frac{\Delta}{1 + \Delta} \varepsilon \quad (39)$$

con $\Delta = \bar{M}/b_0$. Ya que la función barrera siempre incrementa, esto implica que $\mathcal{B}(\|\mathbf{w}\|) > \mathcal{B}(s_1)$, donde $\mathcal{B}(s_1) = \Delta$, y de esta manera

$$\dot{V}_S \leq \zeta_s \|\bar{\mathbf{w}}\| - \zeta b_0 \mathcal{B} \zeta_s \frac{\|\bar{\mathbf{w}}\|}{\|\mathbf{w}\|} \quad (40)$$

se define $\zeta_s := (\mathcal{B} - \Delta) > 0$. \bar{B} es una matriz invertible por lo que $\bar{B}\bar{B}^T > 0 \Rightarrow \lambda_m(\bar{B}\bar{B}^T) > 0$. Teniendo lo anterior en cuenta \dot{V}_S queda de la siguiente manera



Fig. 2. Péndulo de Furuta de Quanser®.

$$\dot{V}_S \leq -b_s \|\mathbf{w}\| - b_s \zeta \mathcal{B}(\|\mathbf{w}\|) = -b_0 \sqrt{2} \left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}} |\mathcal{B}| \right)$$

$$\leq -b_s \sqrt{2} \min\{1, \zeta\} \left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{2}} |\mathcal{B}| \right) \leq -c_1 V_S^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

definiendo $b_s = b_0 \zeta_s \lambda^{1/2}(\bar{B}\bar{B}^T)$ y $c_1 = \sqrt{2} \min\{1, \zeta\}$.

De esta manera se puede tener convergencia en tiempo finito al dominio $\|\mathbf{w}\| \leq s_1$. Por lo que si $s_1 < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{w}\| < \varepsilon$ en $t \leq t_0$, ya que $V_S < 0$ en el conjunto $\{s_1 < \|\mathbf{w}\| < \varepsilon\}$, $\forall t \geq t_0 \Rightarrow \|\mathbf{w}\| < \varepsilon \forall t \geq t_0$.

Para que lo anterior cumpla se debe tener $b_0 = 1 + \lambda_0 > 0$, $\lambda := (\frac{1}{2}(\Delta B_m + \Delta B_m^T))$, en el caso del péndulo de Furuta $\lambda_0 = \beta_1 - 1$, y $\beta_1 > 0 \Rightarrow b_0 > 0$, y que $\exists \bar{B}^{-1}$. En el caso del péndulo de Furuta esta matriz es un escalar, definida en (28). La matriz (28) es positiva definida, debido a que $P > 0$, y solo tiene un cero si $B = [0 \ 0]^T$, lo cual no es el caso del Péndulo de Furuta. De esta manera la ecuación (28) se puede invertir ya que es diferente de cero.

6. EXPERIMENTOS

Se realizó un experimento en el péndulo de Furuta de Quanser® (c.f., Fig. 2) para corroborar el correcto funcionamiento de la metodología en una plataforma real. El tiempo de muestreo del experimento es de 0.001 [s]. Las condiciones iniciales del experimento son $x(0) = [1.0032, -0.0022, -0.19, 0.58]^T$.

Los parámetros de diseño así del controlador nominal y de la ganancia variable son los siguientes

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = 0.001 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix},$$

$$R = 3, \quad \epsilon = 10, \quad l = 6.$$

En la Fig.3 se observa como el controlador logra llevar a la superficie dentro de la barrera. Una vez dentro en el instante donde $\|w\| \leq 0.2$ se conmuta a la ganancia basada en barrera $\beta(\|w\|)$ y se observa que el controlador

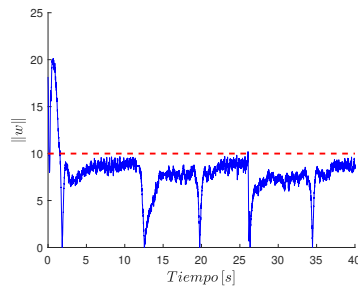


Fig. 3. Superficie deslizante w dentro de la barrera.

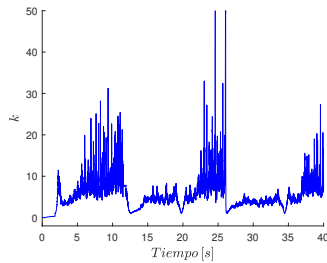


Fig. 4. Ganancia adaptable a lo largo del experimento.

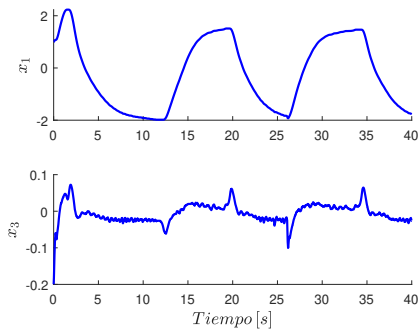


Fig. 5. Trayectorias de las posiciones del carro péndulo.

logra mantener la superficie dentro de esta y no dejarla salir nunca. Algo a notar en la Fig.8 es que después del segundo 25 el sistema se satura, lo que causa un pico visto en la Fig. 3. A pesar de esto la superficie deslizante continua dentro de la barrera. En la Fig.4 se observa la ganancia adaptable a lo largo del experimento, note la conmutación entre las ganancias en el instante 1.8s. Se observa como la ganancia crece la cantidad necesaria para mantener a la superficie deslizante dentro de la frontera de la barrera. Se observa en la Fig.8 el par mecánico aplicado al péndulo.

En la Fig.5 se observan las posiciones del brazo y el péndulo, las cuales se encuentran acotadas en un vecindario alrededor del origen. En la Fig.7 se observan las trayectorias de la dinámica cero (sistema esclavo). Y en la Fig.6 se observan las trayectorias del sistema maestro.

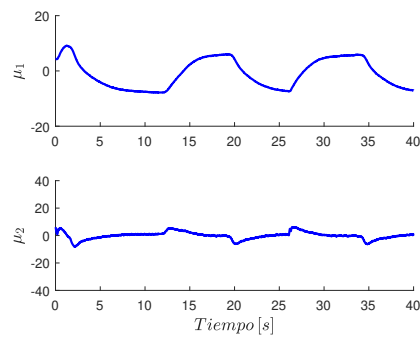


Fig. 6. Trayectorias del sistema maestro.

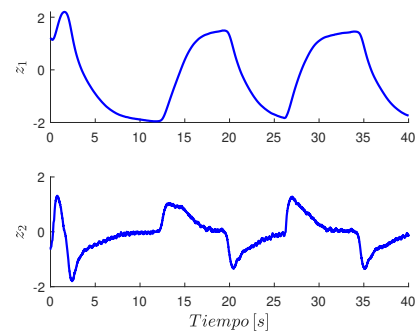


Fig. 7. Trayectorias del sistema esclavo (dinámica cero).

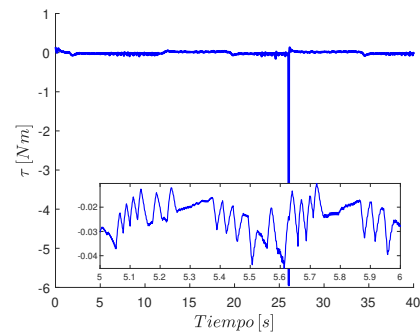


Fig. 8. Entrada de control.

7. DISCUSIÓN

- Note que la barrera $\beta(\|w\|)$ indirectamente acota los estados del sistema maestro μ , y debido que el sistema esclavo tiene propiedades de estabilidad ISS, las trayectorias del sistema esclavo igualmente se encuentran acotadas. Finalmente, los estados del péndulo de Furuta igualmente se encuentran acotados ya que el sistema- z esta acotado.
- Debido que el sistema maestro es de segundo orden y el control se diseñó con una superficie de primer orden se observa que a pesar que la superficie se mantiene dentro de la barrera preestablecida, como tal no se garantiza que el estado μ permanezca dentro de una vecindad predefinida. Aun así, se observa que el estado μ se mantiene acotado incluso presentando

oscilaciones. Las oscilaciones pueden disminuirse si se elige una vecindad predefinida de menor tamaño. Además, este comportamiento mejoraría si la barrera se diseñara para el estado μ y no para una combinación lineal del estado i.e., w . Lo cual se encuentra como trabajo futuro el diseño de una metodología de función barrera de segundo orden.

8. CONCLUSIÓN

- El controlador propuesto pudo estabilizar el sistema sin tener conocimiento de las cotas de las perturbaciones o incertidumbres paramétricas en el sistema transformado, a las cuales esta sujeto.
- El uso del rediseño de Lyapunov con ganancia adaptable de función barrera semi-definida positiva, permite tener una señal continua al aplicar un controlador discontinuo, haciendo factible la aplicación del algoritmo, de esta manera los actuadores no son afectados o destruidos.

REFERENCIAS

- Andrievsky, B., Andrievsky, A., and Zaitceva, I. (2015). Adaptive zooming strategy in discrete-time implementation of sliding-mode control. *IFAC-PapersOnLine*, 48(11), 319–326.
- Andrievsky, B.R., Churilov, A.N., and Fradkov, A.L. (1996). Feedback Kalman-Yakubovich lemma and its applications to adaptive control. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, 4537–4542. IEEE.
- Cruz-Ancona, C.D., Estrada, M.A., and Fridman, L. (2021). Barrier function-based adaptive lyapunov redesign for systems without a priori bounded perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1–1. doi:10.1109/TAC.2021.3107453.
- Edwards, C. and Shtessel, Y.B. (2016). Adaptive continuous higher order sliding mode control. *Automatica*, 65, 183–190.
- Furtat, I., Orlov, Y., and Fradkov, A. (2019). Finite-time sliding mode stabilization using dirty differentiation and disturbance compensation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3), 793–809.
- Hsu, L. and Costa, R.R. (1989). Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements: Part 1. *International Journal of Control*, 49(2), 399–416.
- Negrete-Chávez, D.Y. and Moreno, J.A. (2016). Second-order sliding mode output feedback controller with adaptation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10), 1523–1543.
- Olfati-Saber, R. (2001). *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA.
- Ortega, A.J., Gutiérrez, D.O., Fridman, L., and Moreno, J.A. (2022). Robust stabilization of Furuta's pendulum based on continuous high order sliding mode controllers. Accepted, to be published. In *2022 61th IEEE conference on decision and control*. IEEE.
- Plestan, F., Shtessel, Y., Bregeault, V., and Poznyak, A. (2010). New methodologies for adaptive sliding mode control. *International journal of control*, 83(9), 1907–1919.
- Quanser (2021). *STUDENT WORKBOOK: Inverted Pendulum Experiment for Matlab®/Simulink®Users*. Quanser Inc.
- Rinaldi, G., Menon, P.P., Edwards, C., Ferrara, A., and Shtessel, Y. (2021). Adaptive dual-layer super-twisting sliding mode observers to reconstruct and mitigate disturbances and communication attacks in power networks. *Automatica*, 129, 109656.
- Roy, S., Baldi, S., and Fridman, L. (2020). On adaptive sliding mode control without a priori bounded uncertainty. *Automatica*, 111, 108650.
- Shtessel, Y., Taleb, M., and Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48(5), 759–769.
- Spong, M.W. (1994). Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'94)*, volume 1, 314–321. IEEE.
- Spong, M.W. (1996). Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1), 2828–2832.
- Spong, M.W. (1998). Underactuated mechanical systems. In *Control problems in robotics and automation*, 135–150. Springer.
- Taleb, M., Levant, A., and Plestan, F. (2013). Pneumatic actuator control: Solution based on adaptive twisting and experimentation. *Control Engineering Practice*, 21(5), 727–736.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (1999). *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London.