

Thermodynamic based robust regulation of a heat exchanger

Omar Rogelio Gómez Gómez* Juan Paulo García Sandoval*

* *Departamento de Ingeniería Química, Universidad de Guadalajara.
Guadalajara, Jalisco, 44430, México
(e-mail: paulo.garcia@cucei.udg.mx)*

Abstract: In this work, a robust regulation problem based on thermodynamic principles is developed to control a heat exchanger. The system is regulated through a nonlinear output error dependent on the total entropy production within the heat exchanger; this error is a function of the output variable and its reference, but it can also be affected by parametric uncertainties and disturbances, so a geometric controller with a high-gain observer and an anti-windup scheme is proposed. Finally, the numerical simulation of the controller shows compliance with stability and robustness criteria.

Keywords: Heat exchanger, temperature control, entropy production, process control, robust regulation

1. INTRODUCCIÓN

En años recientes el enfoque de diseño de control basado en principios físicos ha generado interés para el control de procesos, dicho enfoque permite mejorar las estrategias de control ya que se considera el comportamiento dinámico que producen los fenómenos físicos. En este contexto, la formulación hamiltoniana con puertos para sistemas eléctricos y mecánicos ha desempeñado un papel fundamental (Ortega et al., 2002), sin embargo, para procesos químicos y térmicos dicha formulación no ha tenido éxito debido a la complejidad de los fenómenos, por tanto, el uso de la termodinámica representa un enfoque más adecuado (Favache et al., 2010). Para estos casos resulta sensato utilizar cantidades relacionadas con la entropía, como pueden ser la disponibilidad, la producción de entropía y la entropía misma (Alonso and Ydstie, 1996). En particular, se ha demostrado que la producción de entropía es una función de almacenamiento para sistemas abiertos termodinámicamente consistentes y una función de Lyapunov para sistemas cerrados termodinámicamente consistentes (García-Sandoval et al., 2015; García-Sandoval et al., 2016). Por lo tanto, el uso de la producción de entropía para el diseño de control resulta atractivo, debido a su relación con el costo de la irreversibilidad en los procesos (Alonso and Ydstie, 2001; Alonso et al., 2002). En cambio, este enfoque requiere para su éxito consistencia termodinámica en el modelo, esto agrega más complejidad al análisis, especialmente para sistemas como los intercambiadores de calor, debido a que su modelo es de parámetros distribuidos.

Existen diversas configuraciones para los intercambiadores de calor, pero en todas ellas el objetivo de control típico es regular la temperatura de salida de uno de los fluidos en un punto específico y estable, lo cual representa un desafío, debido, en parte, al tiempo de residencia del fluido y la posibilidad de alta variación en las perturbaciones del sistema. También es conveniente considerar las necesidades de eficiencia para evitar el consumo excesivo de energía, por lo que se incorpora más complejidad al diseño de control. Diversas estrategias de control, como las redes neuronales artificiales inversas (García-Morales et al., 2022), control \mathcal{H}_∞ (Kano et al., 1997) y el control predictivo de modelo robusto (Oravec et al., 2016), se han aplicado para regular los intercambiadores de calor, sin embargo, la posibilidad de utilizar fundamentos termodinámicos para el diseño de controladores es relativamente reciente y se presenta como una alternativa para aumentar la eficiencia del control de los intercambiadores de calor y lograr la disminución de la irreversibilidad. Por ejemplo, en (García-Sandoval, 2021) se diseñó un controlador basado en termodinámica para un intercambiador de tubos concéntricos, mientras que en (Pérez-Pirela and García-Sandoval, 2018) se diseñó un controlador de modos deslizantes basado en termodinámica para un intercambiador de calor que transfiere energía de una resistencia eléctrica a un fluido. Siguiendo este mismo lineal, en esta contribución se propone un problema de regulación robusta basado en principios termodinámicos para este tipo de intercambiadores, con este objetivo, se define un error de salida correlacionado con la producción de entropía total dentro del intercambiador de calor. Luego, se propone y prueba mediante simulación numérica un controlador geométrico

con un observador de alta ganancia y un esquema "anti-windup".

2. EL INTERCAMBIADOR DE CALOR

El sistema de intercambio de calor es un calentador eléctrico de un solo paso de longitud L , el cual se muestra esquemáticamente en la Figura 1. En dicho sistema el calor se produce en una resistencia eléctrica (R) en la que se aplica un voltaje V y que tiene un perfil de temperatura $T_1(t, z)$. El fluido entra con temperatura $T_{2,0}(t)$ y pasa a través del calentador con un flujo volumétrico F , por lo que su perfil de temperatura es $T_2(t, z)$. Además, se considera que el flujo volumétrico es lo suficientemente grande para considerar que la convección domina la conducción. El objetivo de control es regular la temperatura de salida del fluido, $T_2(t, L) = T_{2,L}(t)$, manipulando el voltaje aplicado para así modificar la potencia suministrada a la resistencia eléctrica, mientras que la temperatura de entrada del fluido, $T_2(t, 0) = T_{2,0}(t)$, así como las temperaturas iniciales, $T_{1,ini}(z)$ y $T_{2,ini}(z)$, se consideran como perturbaciones. A continuación se presenta un modelo desarrollado previamente (Pérez-Pirela et al., 2018) y que es la base para plantear y resolver el problema de regulación de este trabajo.

2.1 Modelo con parámetros distribuidos

Balances de energía Para desarrollar el modelo se supone que, dadas las condiciones de flujo, la magnitud de la generación de calor en la resistencia y el flujo de calor convectivo son mayores que la magnitud de la conducción de calor en la dirección z , por lo que los balances de energía de la resistencia y el fluido son:

$$A_1 \rho_1 \frac{\partial U_1(t, z)}{\partial t} = Q_r(t, z) + \frac{V^2(t)}{LR}, \quad (1a)$$

$$A_2 \rho_2 \frac{\partial U_2(t, z)}{\partial t} = -Q_r(t, z) - F \rho_2 \frac{\partial U_2(t, z)}{\partial z}, \quad (1b)$$

con la condición frontera

$$[U_2]_{z=0} = U_{2,0}(t). \quad (2)$$

donde ρ_i y U_i , con $i = 1, 2$, representan la densidad y la energía interna de la resistencia ($i = 1$) y el fluido ($i = 2$), respectivamente. El lado izquierdo de las ecuaciones (1) representan la acumulación de la energía, mientras que el primer término del lado derecho es la transferencia de calor entre ambos subsistemas (en dirección radial), usualmente definido como $Q_r(t, z) = hp(T_2(t, z) - T_1(t, z))$, con h como el coeficiente de transferencia de calor y p el perímetro de la superficie de la resistencia que está en contacto con el fluido. Además, el segundo término de la ecuación (1a) representa la generación de calor debida a la corriente eléctrica que pasa a través de la resistencia, mientras que el segundo término del lado derecho de la ecuación (1b) describe el flujo convectivo del fluido en dirección z .

¹ Dado el marco termodinámico, en este trabajo todas las temperaturas se consideran en escala absoluta (Kelvin).

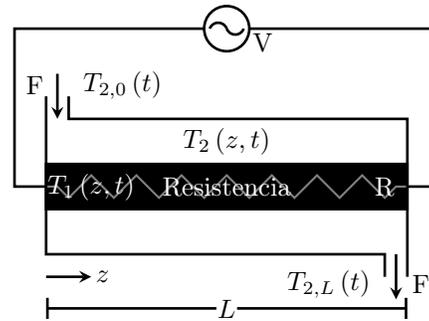


Figura 1. Esquemas del intercambiador de calor.

2.2 Termodinámica del modelo

Se supone que la relación de Gibbs, $dG_i = dU_i + P_i dv_i - T_i dS_i$, se cumple para ambos subsistemas, donde S_i , v_i y G_i son la entropía, el volumen y la energía libre de Gibbs por unidad de masa, mientras que P_i es la presión. Al considerar que la resistencia y el fluido son incompresibles y su masa es constante, la relación de Gibbs se reduce a $dU_i = T_i dS_i = c_{v,i} dT_i$, con $c_{v,i}$ como la capacidad calorífica por unidad de masa; de esta forma el balance total de entropía del sistema de intercambio de calor por unidad de longitud, $\dot{S}(t, z) = A_1 \rho_1 \dot{S}_1(t, z) + A_2 \rho_2 \dot{S}_2(t, z)$, es:

$$\frac{\partial \tilde{S}(t, z)}{\partial t} = -\frac{F \rho_2}{T_2(t, z)} \frac{\partial U_2(t, z)}{\partial z} + \tilde{\sigma}(t, z), \quad (3)$$

donde el término del lado izquierdo es la acumulación de entropía, mientras que el primer término del lado derecho es el flujo de entropía debido al flujo de fluido y el segundo término representa la producción de entropía por unidad de longitud definido como:

$$\tilde{\sigma}(t, z) = Q_r(t, z) \left(\frac{1}{T_1(t, z)} - \frac{1}{T_2(t, z)} \right) + \frac{V^2(t)}{LR} \geq 0 \quad (4)$$

que a su vez se compone de dos términos, el primero es proporcional a $\frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 T_2} \geq 0$ y es la producción de entropía por unidad de longitud debida a la transferencia de calor entre la resistencia eléctrica y el fluido, mientras que el segundo término, $\frac{V^2(t)}{LRT_1(t, z)} \geq 0$, es la producción de entropía por unidad de longitud debida al calor producido por la fricción de los electrones que fluyen en la resistencia eléctrica.

En estado estacionario, con flujo y temperatura de entrada constante, se cumple que ²:

$$\frac{(V^*)^2}{LR} = -Q_r^*(z) = F^* \rho_2 \frac{dU_2^*(z)}{dz} \quad (5)$$

mientras que la producción de entropía por unidad de longitud es:

$$\tilde{\sigma}^*(z) = -\frac{Q_r^*(z)}{T_2^*(z)} = \frac{1}{T_2^*(z)} \frac{(V^*)^2}{LR} > 0 \quad (6)$$

² Aquí se emplea * para representar los valores en el estado estacionario.

dado que V^* no depende de la posición, entonces Q_r^* y $dU_2^*/dz = c_{v,2}dT_2^*/dz$ deben ser independientes de la posición. En particular para capacidad calorífica constante, el perfil de temperatura del fluido en estado estacionario es lineal, *i.e.*

$$T_2^*(z) = T_{2,i}^* + \frac{(V^*)^2}{LR\rho_2c_{v,2}F^*}z. \quad (7)$$

Entonces, la producción total de entropía en estado estacionario en el calentador eléctrico es

$$\Sigma^* = \int_0^L \tilde{\sigma}^*(z) dz = \rho_2c_{v,2}F^* \ln \left(\frac{T_{2,L}^*}{T_{2,0}^*} \right). \quad (8)$$

Nótese que esta es una función no lineal de la relación entre las temperaturas del fluido a la entrada y a la salida.

2.3 Modelo en variables de estado

Al suponer que $Q_r(t, z) = hp(T_2(t, z) - T_1(t, z))$ y $U_i(t, z) = U_{i,ref} + \int_{T_{ref}}^{T_i(t,z)} c_{v,i}dT$, para $i = 1, 2$, el modelo (1) es equivalente a:

$$\frac{\partial T_1(t, z)}{\partial t} + \frac{T_1(t, z)}{\tau_1} = \frac{T_2(t, z)}{\tau_1} + bu(t), \quad (9a)$$

$$\frac{\partial T_2(t, z)}{\partial t} + \frac{T_2(t, z)}{\tau_2} = -v_z \frac{\partial T_2(t, z)}{\partial z} + \frac{T_1(t, z)}{\tau_2}, \quad (9b)$$

mientras que la condición frontera (2) se vuelve

$$[T_2]_{z=0} = T_{2,0}(t), \quad (10)$$

donde $\tau_i = A_i\rho_i c_{v,i}/hp$, para $i = 1, 2$, son los tiempos característicos de transporte de calor para cada material (resistencia $i = 1$ y fluido $i = 2$), $v_z = F/A_2$ es la velocidad lineal del fluido, $b = 1/A_1L\rho_1c_{v,1}$ y $u(t) = V^2(t)/R$ es la variable de control. Finalmente, las condiciones iniciales son:

$$[T_1]_{t=0} = T_{1,ini}, \quad (11a)$$

$$[T_2]_{t=0} = T_{2,ini}. \quad (11b)$$

Esta condiciones iniciales pueden depender de la posición, pero usualmente, cuando se ponen en marcha la operación de estos intercambiadores, el fluido dentro del calentador, así como el fluido cerca de la entrada, están en equilibrio térmico con la resistencia (inicialmente apagada), por lo que es razonable suponer que $T_{1,ini} = T_{2,ini} = T_{2,0}(0) =: T_{ini}$ y $\frac{dT_{2,0}(0)}{dt} = 0$.

2.4 Modelo con parámetros agrupados

El modelo del sistema descrito por la ecuaciones (9a), (9b) y (10) conforman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales para la temperatura en la resistencia eléctrica y en el fluido, que se puede resolver empleando operadores lineales. Es así como Pérez-Pirela et al. (2018) obtuvieron el siguiente modelo dinámico para describir

aproximadamente la temperatura del fluido a la salida del intercambiador, $T_{2,L}(t)$:

$$\ddot{T}_{2,L}(t) + \frac{\dot{T}_{2,L}(t)}{\tau_{12}} = \omega(u, T_{2,0}, \tau_L) \quad (12)$$

donde

$$\omega(u, T_{2,0}, \tau_L) = \begin{cases} \frac{bu(t)}{\tau_2}, & \text{para } t < \tau_L \\ b \left(\frac{u(t) - e^{-\frac{\tau_L}{\tau_2}} u(t - \tau_L)}{\tau_2} \right) \\ + e^{-\frac{\tau_L}{\tau_2}} \ddot{T}_{2,0}(t - \tau_L) \\ + \frac{e^{-\frac{\tau_L}{\tau_2}}}{\tau_{12}} \dot{T}_{2,0}(t - \tau_L) \\ + e^{-\frac{\tau_L}{\tau_2}} p_L(t - \tau_L), & \text{para } t \geq \tau_L \end{cases} \quad (13)$$

con

$$\dot{p}_L(t) + \frac{p_L(t)}{\tau_3} = \frac{\tau_L}{\tau_1\tau_2} \left(\ddot{T}_{2,0}(t) + \frac{\dot{T}_{2,0}(t)}{\tau_{12}} - \frac{b}{\tau_2} u(t) \right) \quad (14)$$

Aquí, la dinámica para la temperatura del fluido a la salida del intercambiador, $T_{2,L}(t)$, es de segundo orden (ver Ec. (12)) y depende a través de la función de forzamiento $\omega(u, T_{2,0}, \tau_L)$, de la entrada de control, $u \in [0, u^+]$, la temperatura de entrada del fluido, $T_{2,0}$, y de una variable auxiliar, p_L , cuyo comportamiento está descrito por la ecuación dinámica de primer orden (14). Así, el modelo dinámico descrito por las ecuaciones (12), (13) y (14) es de parámetros agrupados, ya que está compuesto por ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo constante. El tiempo de retardo, $\tau_L = v_z/L$, sólo aparece cuando $t \geq \tau_L$ en la temperatura de entrada del fluido, $T_{2,0}$, en la entrada de control, u , y en la variable de estado auxiliar p_L ; dicho retardo se debe al tiempo de transporte del fluido dentro del calentador. Finalmente, los parámetros del este modelo son τ_1 , τ_2 , τ_L , τ_3 , $\tau_{12} = (\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1})^{-1}$ y b , mientras que el disturbio es $T_{2,0}(t)$. Para mayores detalles en la obtención de este modelo puede consultar (Pérez-Pirela et al., 2018).

3. PROBLEMA DE REGULACIÓN BASADO EN LA TERMODINÁMICA

3.1 Planteamiento del problema

Considere el intercambiador de calor analizado en la sección 2, el objetivo de control típico se establece en el siguiente problema de regulación (PR):

PR Regular la temperatura de salida del fluido, $T_2(t, L) = T_{2,L}(t)$, alrededor de la referencia $T_{2,r}$ manipulando la potencia suministrada a la resistencia eléctrica, $u \in [0, u^+]$, mientras que la temperatura de entrada del fluido, $T_2(t, 0) = T_{2,0}(t)$, se considera como una perturbación.

Se pueden aplicar diversos enfoques para resolver el problema de regulación **PR**; típicamente, se emplea un error

de control de la forma $\varepsilon(t) = T_{2,L}(t) - T_{2,r}$, que es lineal con respecto a la variable medida (la temperatura de fluido a la salida), sin embargo, el controlador resultante no necesariamente es el más eficiente en cuanto al consumo de energía de la resistencia. Dado que la producción de entropía es un indicativo de la eficiencia energética del sistema, en este trabajo se propone emplear un error no lineal de la forma $(\Sigma^* - \Sigma_r^*) / \rho_2 c_{v,2} F^*$, en donde $\Sigma^* / \rho_2 c_{v,2} F^* = \ln(T_{2,L}^* / T_{2,0}^*)$ y $\Sigma_r^* / \rho_2 c_{v,2} F^* = \ln(T_{2,r}^* / T_{2,0}^*)$ son la producción total de entropía adimensional en estado estacionario a la temperatura de salida y la temperatura de referencia. Entonces, el problema de regulación **PR** puede especificarse como el siguiente problema de regulación basado en la termodinámica (**PRbT**):

PRbT: Dada la temperatura de salida del fluido, $T_2(t, L) = T_{2,L}(t)$, la referencia $T_{2,r}$ y el error de regulación

$$\epsilon(t) := \ln\left(\frac{T_{2,L}(t)}{T_{2,r}}\right), \quad (15)$$

que representa la diferencia de la producción total de entropía adimensional en estado estacionario a la temperatura de salida del fluido y la temperatura de referencia, el problema de regulación consiste en encontrar una ley de control con retroalimentación del error que manipule la potencia suministrada a la resistencia eléctrica, $u \in [0, u^+]$, que garantice que el error converja asintóticamente a cero, a pesar de las perturbaciones en la temperatura de entrada del fluido, $T_2(t, 0) = T_{2,0}(t)$, y las incertidumbres paramétricas en $\tau_1, \tau_2, \tau_L, \tau_3$ y b en una vecindad de sus valores nominales.

El error (15) se puede derivar dos veces

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{T}_{2,L}(t)}{T_{2,L}(t)} \quad \text{y} \quad \ddot{\epsilon} = \frac{\ddot{T}_{2,L}(t) T_{2,L}(t) - \dot{T}_{2,L}^2(t)}{T_{2,L}^2(t)}, \quad (16)$$

de tal forma que al considerar la dinámica (12) se obtiene la siguiente dinámica del error de la salida:

$$\ddot{\epsilon}(t) + \frac{\dot{\epsilon}(t)}{\tau_{12}} + \dot{\epsilon}^2(t) = \frac{e^{-\epsilon(t)}}{T_{2,r}} \omega(u, T_{2,0}, \tau_L). \quad (17)$$

donde la función ω está definida en la Ec. (13). Nótese que, aunque la dinámica para la temperatura del fluido a la salida del intercambiador, $T_{2,L}(t)$, es lineal de segundo orden con retardos, la dinámica del error (15) es no lineal debido a que la producción de entropía (4) es no lineal con respecto a la temperatura del fluido. En la siguiente sección se propone un controlador que resuelve el **PRbT**.

3.2 Controlador propuesto

Para resolver el **PRbT** descrito en la sección anterior se pueden definir las variable $x_1 = \epsilon$, $x_2 = \dot{\epsilon}$ y $x_3 = \omega(u, T_{2,0}, \tau_L) - \hat{b}u / \hat{\tau}_2 + T_{2,r} \left(\frac{1}{\hat{\tau}_{12}} - \frac{1}{\tau_{12}} \right) e^{x_1} x_2$, de tal forma que la dinámica del error (17) es equivalente a

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (18a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{\hat{\tau}_{12}} - x_2^2 + \frac{e^{-x_1} x_3}{T_{2,r}} + \frac{e^{-x_1} \hat{b}}{T_{2,r} \hat{\tau}_2} u \quad (18b)$$

$$\dot{x}_3 = \phi(t) \quad (18c)$$

$$y = x_1 \quad (18d)$$

donde $\phi(t)$ se considera que es una función con incertidumbres. Aquí es evidente que el grado relativo del sistema es 2, por lo que se puede diseñar un control geométrico linealizante ideal de la forma

$$u_{\text{ideal}} = \frac{\left(-k_1 x_1 - k_2 x_2 + \frac{x_2}{\hat{\tau}_{12}} + x_2^2\right) T_{2,r} e^{x_1} - x_3}{\hat{b} / \hat{\tau}_2} \quad (19)$$

en donde k_1 y k_2 deben ser positivos para garantizar la convergencia del error, sin embargo, dada la incertidumbre en los parámetros y en la dinámica para x_3 , se propone introducir un observador de alta ganancia que permite determinar los valores más adecuados para x_2 y x_3 . Además, la entrada está acotada $u \in [0, u^+]$, por lo que se debe considerar un esquema "anti-windup" para evitar que el observador falle y la entrada calculada permanezca acotada. El controlador propuesto se presenta en la siguiente Proposición.

Proposición. Dado el sistema de intercambio de calor descrito por las ecuaciones (9a), (9b) y (10), la referencia $T_{2,r} \in (T_{2,0}, T_{2,r}^+]$ y las matrices $K = (k_1 \ k_2)$ y G , tales que las matrices $A_0 - B_0 K$ y $A - GC$ son Hurwitz, con $T_{2,r}^+ = T_{2,0} + \frac{\tau_2 \tau_L}{b \tau_1} u^+$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\hat{\tau}_{12}} & \frac{1}{T_{2,r}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = (1 \ 0 \ 0);$$

el controlador dinámico con retroalimentación del error (15) con la forma

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 + G_1 (\epsilon - \xi_1) \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 = & -\frac{\xi_2}{\hat{\tau}_{12}} - \xi_2^2 + \frac{e^{-\xi_1}}{T_{2,r}} \xi_3 \\ & + \frac{e^{-\xi_1} \hat{b}}{T_{2,r} \hat{\tau}_2} u + G_2 (\epsilon - \xi_1) \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\dot{\xi}_3 = G_3 (\epsilon - \xi_1) \quad (20c)$$

$$u = \psi(\bar{u}, 0, u^+) \quad (20d)$$

donde

$$\bar{u} = \frac{(-k_1 \xi_1 - (k_2 - \hat{\tau}_{12}^{-1}) \xi_2 + \xi_2^2) T_{2,r} e^{\xi_1} - \xi_3}{\hat{b} / \hat{\tau}_2} \quad (21)$$

y $\psi(\bar{u}, 0, u^+)$ es una función de saturación

$$\psi(\bar{u}, 0, u^+) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{u} < 0 \\ \bar{u} & \text{if } 0 \leq \bar{u} \leq u^+, \\ u^+ & \text{if } \bar{u} > u^+ \end{cases} \quad (22)$$

garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon = 0$ para un conjunto de parámetros $(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{b})$ en una vecindad de los valores nominales (τ_1, τ_2, b) .

Demostración. Ver Apéndice A. \square

En la siguiente sección se pone prueba este controlador mediante simulaciones numéricas.

3.3 Simulación numérica del controlador

Para analizar el desempeño del controlador propuesto en la sección anterior, se consideran los valores numéricos de los parámetros que se muestran en la Tabla 1, que fueron validados para un intercambiador a escala laboratorio (Pérez-Pirela et al., 2018). Además, para el diseño del controlador se consideraron las siguientes incertidumbres paramétricas: $\hat{\tau}_{12} = 1.1\tau_{12}$ y $\hat{b}/\hat{\tau}_2 = 0.92b/\tau_2$, y se propusieron las ganancias que se reportan en la Tabla 2 y que garantizan que las matrices $A_0 - B_0K$ y $A - GC$ son Hurwitz, como se describen en la Proposición de la sección anterior. Las simulaciones numéricas del sistema a lazo cerrado se realizaron empleando un código de Matlab. En estas simulaciones se consideraron diferentes cambios de referencia para la temperatura de salida del fluido y disturbios en la temperatura de entrada del fluido. Para integrar el modelo del intercambiador descrito por las ecuaciones (9), (10) y (11) se empleó un método de discretización parcial con diferencias hacia atrás para $\partial T_2/\partial z$ con 100 nodos. Las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes se integraron junto con las ecuaciones (20) del controlador mediante un método de no-autoinicio de tipo BDF (Hosea and Shampine, 1996).

El comportamiento del modelo del intercambiador a lazo cerrado se muestra en la Figura 2. En particular, en la Figura 2a se muestra la entrada de control calculada por el controlador (20), mientras que en la Figura 2b se muestra la temperatura de entrada del fluido (disturbio), la temperatura de salida del fluido (medición) y la referencia impuesta para la temperatura de salida del fluido (consigna). La temperatura inicial tanto de la resistencia como del fluido dentro del intercambiador es 298 K, por lo que inicialmente el controlador satura la entrada de control en el máximo valor de la potencia de la resistencia para que se caliente el sistema de intercambio, así que después de aproximadamente 6 minutos se alcanza la consigna y el controlador rápidamente modifica la potencia para lograr mantener la temperatura de salida del fluido en la referencia, esto demuestra que el esquema "anti-windup" es capaz de lograr una correcta predicción de las variables

Cuadro 1. Parámetros del intercambiador de calor.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
τ_1	100.4 s	τ_L	6.61 s
τ_2	350.1 s	τ_{12}	165.4 s
τ_3	101.37 s	b	0.00331 $\frac{K}{J}$

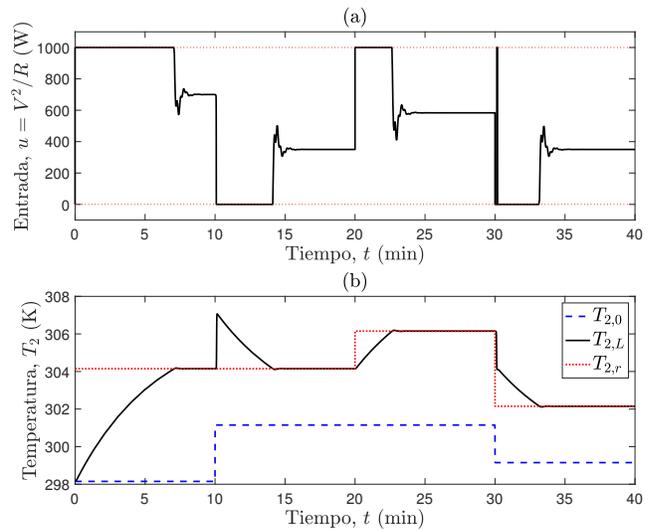


Figura 2. Respuesta dinámica del intercambiador a lazo cerrado. (a) Variable de control: potencia eléctrica aplicada a la resistencia, $u = V^2/R$. (b) Temperaturas de entrada, $T_{2,0}$, salida, $T_{2,L}$, y de referencia, $T_{2,r}$, para el fluido.

de estado, que permiten una regulación satisfactoria. Posteriormente, a $t = 10$ min, se hace un salto en escalón en la temperatura de entrada, por lo que el controlador satura la potencia en la parte inferior, apagando la resistencia, para que se enfríe y después de 4 minutos se logra regresar a la referencia deseada. A $t = 20$ min, se realiza un incremento en la temperatura de referencia, por lo que el controlador vuelve a saturar hacia arriba la potencia de la resistencia para calentar más el sistema, después de aproximadamente 2 minutos se alcanza la consigna y el controlador encuentra nuevamente el valor adecuado para la potencia. Finalmente, a $t = 30$ min se realiza una disminución en la referencia y en la temperatura de entrada (disturbio); el controlador responde rápidamente y apaga la resistencia por un periodo de aproximadamente 3 minutos hasta alcanzar la nueva referencia. Es decir que el controlador presenta propiedades satisfactorias de robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones.

4. CONCLUSIÓN

En este trabajo se desarrolló un controlador basado en principios termodinámicos para la regulación robusta de un intercambiador de calor. El controlador se basa en principios de control geométrico y cuenta con un observador de alta ganancia y un esquema "anti-windup"

Cuadro 2. Parámetros del controlador.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\hat{\tau}_{12}$	181.9 s	G_1	1.195 s^{-1}
$\hat{b}/\hat{\tau}_2$	$3.4 \times 10^{-5} \frac{K}{J \cdot s}$	G_2	0.463 s^{-2}
k_1	0.04 W	G_3	18.309 $\frac{K}{s^3}$
k_2	0.02 J	u^+	1000 W

que le otorgan propiedades de robustez. El esquema de control propuesto se puso a prueba mediante simulación numérica y se observaron propiedades de estabilidad y robustez. Como trabajo futuro se pretende probar experimentalmente el algoritmo propuesto y evaluar si el uso del error basado en la producción de entropía permite optimizar el consumo de energía.

Apéndice A. PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN

Demostración. Primero se analiza el comportamiento del observador, por lo que se define el error $\zeta = x - \xi$, cuya dinámica es

$$\dot{\zeta} = (A - GC)\zeta + \Phi(t)$$

donde A y C están definidos en la proposición, mientras que $\Phi(t) = (0 \ \rho(t) \ \phi(t))^T$, con $\rho(t) = \xi_2^2 - x_2^2 + \frac{e^{-x_1} - e^{-\xi_1}}{T_{2,r}} \hat{b} u + \frac{(e^{-x_1} - 1)x_3 - (e^{-\xi_1} - 1)\xi_3}{T_{2,r}}$. Nótese que el par (A, C) es observable. Además, $|\Phi(t)| \leq \Phi_0 \|\zeta\|$ para $\|\zeta\| \leq \zeta_m$ en una vecindad del origen. Así que si G se calcula de tal forma que $(A - GC)$ es Hurwitz, entonces existen las matrices $P > 0$ y $Q > 0$ que satisfacen la ecuación de Lyapunov $(A - GC)^T P + P(A - GC) = -Q$. Además, al definir la función de Lyapunov $V_\zeta = \zeta^T P \zeta$, se obtiene que $\dot{V}_\zeta \leq -(\lambda_{min} Q - 2P\Phi_0) \|\zeta\|^2$, por lo que el error de observación converge asintóticamente a cero en una vecindad del origen $\|\zeta\| \leq \zeta_m$ para una ganancia G tal que $\lambda_{min} Q > 2P\Phi_0$. Ahora se analiza la acción de control. Para ello, primero se consideran los casos en los que la entrada de control (20d) está saturada. Así, en el límite bajo de saturación los estados del sistema (18) tienden a $(x_1, x_2, x_3) = (\ln(T_{2,0}/T_{2,r}), 0, 0)$, así que la entrada calculada en la ecuación (21) es

$$\bar{u} = \frac{k_1 \hat{\tau}_2}{T_{2,0} \hat{b}} \ln \left(\frac{T_{2,r}}{T_{2,0}} \right) > 0,$$

que es positiva ya que $T_{2,r} \in (T_{2,0}, T_{2,r}^+]$, por lo que la entrada (20d) del controlador tiende a desaturarse. Por otro lado, en el límite alto de saturación los estados del sistema (18) tienden a $(x_1, x_2, x_3) = (\ln(T_{2,r}^+/T_{2,r}), 0, -\hat{b}u^+/\hat{\tau}_2)$, así que la entrada calculada en la ecuación (21) es $\bar{u} = u^+ - \hat{\tau}_2 k_1 \ln(T_{2,r}^+/T_{2,r})/\hat{b}T_{2,r}^+$. Para que al acercarse a este estado estacionario la entrada (20d) del controlador tienda a desaturarse es necesario que $\bar{u} < u^+$, es decir que $-k_1 \ln(T_{2,r}^+/T_{2,r})/T_{2,r}^+ \leq 0$, y como $T_{2,r} \leq T_{2,r}^+$ entonces con $k_1 > 0$ se garantiza que eventualmente la entrada del controlador calculada con la ecuación (20d) se desature conforme se aproxima el sistema al punto fijo.

Finalmente, se analiza el caso en que no existe saturación, para esto hay que considerar que el observador tiene convergencia por lo que la entrada (20d) tiende a la entrada ideal (21) que estabiliza el sistema si $A_0 - B_0 K$ es Hurwitz, garantizando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon = 0$ para un conjunto de parámetros $(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{b})$ en una vecindad de los valores nominales (τ_1, τ_2, b) . \square

REFERENCIAS

- Alonso, A. A., Ydstie, B. E., Nov 2001. Stabilization of distributed systems using irreversible thermodynamics. *Automatica* 37 (11), 1739–1755.
- Alonso, A. A., Ydstie, B. E., Banga, J. R., 2002. From irreversible thermodynamics to a robust control theory for distributed process systems. *Journal of Process Control* 12 (4), 507 – 517.
- Alonso, A. A., Ydstie, E. B., Jan 1996. Process systems, passivity and the second law of thermodynamics. *Computers & Chemical Eng.* 20, S1119–S1124.
- Favache, A., Dochain, D., Maschke, B., 2010. An entropy-based formulation of irreversible processes based on contact structures. *Chemical Engineering Science* 65 (18), 5204 – 5216.
- García-Morales, G.J., Cervantes-Bobadilla, M., Hernández-Pérez J.A., Saavedra-Benítez, Y.I., Adam-Medina, M., and Guerrero-Ramírez, G.V., 2022. Inverse artificial neural network control design for a double tube heat exchanger. *Case Studies in Thermal Engineering* 34, 102075.
- García-Sandoval, J., González-Álvarez, V., Calderón, C., 2015. Stability analysis and passivity properties for a class of chemical reactors: internal entropy production approach. *Computers & Chemical Eng.* 75, 184–195.
- García-Sandoval, J., Hudon, N., Dochain, D., González-Álvarez, V., Jan 2016. Stability analysis and passivity properties of a class of thermodynamic processes: An internal entropy production approach. *Chemical Engineering Science* 139, 104–113.
- García-Sandoval, J. P., 2021. Towards the control of heat exchangers based on thermodynamic principles. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2021*, 80–85.
- Hosea, M., Shampine, L., 1996. Analysis and implementation of TR-BDF2. *Applied Numerical Mathematics* 20 (1), 21–37.
- Kanoh, H., Itoh, T., Abe, N., 1997. Nonlinear \mathcal{H}_∞ control for heat exchangers controlled by the manipulation of flow rate. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 30 (4), 2237–2248.
- Oravec, J., Bakošová, M., Mészáros, A., Míková, N., 2016. Experimental investigation of alternative robust model predictive control of a heat exchanger. *Applied Thermal Engineering* 105, 774–782.
- Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., Escobar, G., 2002. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica* 38 (4), 585 – 596.
- Pérez-Pirela, M., García-Sandoval, J., Camacho, O., 2018. Development of a simplified model for a distributed-parameter heat exchange system for thermodynamic principles-based control purposes. *IFAC-PapersOnLine* 51 (13), 396–401.
- Pérez-Pirela, M., García-Sandoval, J.P., 2018. Control por modos deslizantes de un sistema de intercambio de calor: validación experimental. *Enfoque UTE*, 9(4), 110–119.