

Observer design for a class of nonlinear Hamiltonian systems based on energy function structure

Christian Granados-Salazar* Michael Rojas*
Gerardo Espinosa-Pérez*

* Facultad de Ingeniería UNAM (e-mail: christianf_gs@outlook.com;
michael.rojas@ingenieria.unam.mx; gerardoe@unam.mx).

Abstract: In this paper the observer design problem for a class of nonlinear port-Hamiltonian system is addressed. The class of nonlinear Hamiltonian system is based on the structure of energy function where it is possible to pull the state apart at measured and unmeasured states which generates two interconnected Hamiltonian systems. Exploiting the properties of the class of nonlinear Hamiltonian systems a reduced order observation scheme is proposed. Finally the observer design proposed in this paper is evaluated in a magnetic levitator in order to prove its the convergence properties, also it is comparing the observer convergence characteristics and the observer performance among the observation schemes that are reported in the literature.

Keywords: Nonlinear Observers, Port-controlled Hamiltonian systems, Reduced order observer, magnetic levitator.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PHC, por sus siglas en inglés) son modelos matemáticos que exhiben algunas propiedades físicas de los sistemas bajo estudio, por esta razón esta metodología de modelado es empleada para representar a una gran cantidad de sistemas físicos Maschke and van der Schaft (1993), por lo tanto es de interés desarrollar esquemas de observación que no sólo ayuden a solventar dificultades clásicas asociadas a la medición de los estados si no que además estos esquemas de observación tengan una interpretación física y presenten propiedades estructurales que ayuden al diseño de los esquemas de observación. Existen trabajos que abordan el desarrollo de esquemas de observación para PHC, en donde emplean diferentes propiedades de estos sistemas para realizar el diseño de observadores, por ejemplo en Yaghmaei (2018), Zenfari et al. (2022) presentan el diseño de un esquema de observación que preserva la estructura de un sistema PHC empleando la técnica de contracción para garantizar convergencia del error, otro ejemplo se muestra en Rojas et al. (2021) en donde emplean propiedades de la matriz de interconexión para considerar un tipo especial de no linealidades diseñando un esquema de observación tipo Luenberger que preserva estructura, en (Biedermann et al. (2018)) se aborda el caso particular en el que los estados no medibles del sistema aparecen de manera lineal y se utilizan argumentos basados en la técnica IDA-PBC para estabilizar la dinámica del error de observación, mientras en (Fu et al. (2018)) se aborda el problema conjunto de diseñar de

manera simultánea una ley de control junto con el diseño de un observador de estados incluyendo el problema de rechazo a perturbaciones, por último en Venkatraman and van der Schaft (2010) y Pfeifer et al. (2021) se muestra el diseño de un observador que preserva estructura pero en este caso se emplean características de la función energía para poder establecer las condiciones de convergencia del observador. La organización del artículo está dada de la siguiente manera: En la Sección 2 se presenta la clase de sistemas PCH con las que se trabaja, posteriormente en la Sección 3 se presenta el diseño del esquema de observación para la clase considerada junto con un bosquejo del diseño presentado en Venkatraman and van der Schaft (2010), en la Sección 4 se muestra el diseño del esquema de observación para el levitador magnético realizando una comparación en cuanto al desempeño con el esquema de observación presentado en Venkatraman and van der Schaft (2010) implementado para el mismo sistema electromecánico junto con la evaluación numérica de ambos esquemas y finalmente en la Sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo y algunos comentarios acerca del trabajo futuro.

2. SISTEMAS HAMILTONIANOS

La clase de sistemas Hamiltonianos que se estudiarán en este trabajo se encuentran caracterizados bajo distintas suposiciones, considere el sistema Hamiltoniano dado por

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)]\nabla H(x) + g(x)u \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, mientras $J(x) = -J(x)^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R(x) = R(x)^\top \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ además $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de entradas y $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas.

Suposición 1. Para esta clase de sistemas es posible dividir al estado de la siguiente forma $x = [x_1^\top \ x_2^\top]^\top$,

$$J = \begin{bmatrix} T_1(x_1) & T_3(x_1) \\ -T_3^\top(x_1) & T_2(x_1) \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} K_1(x_1) & K_3(x_1) \\ K_3^\top(x_1) & K_2(x_1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ son los estados medidos, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ son los estados no medidos, mientras $T_1 = -T_1^\top \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $T_2 = -T_2^\top \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $T_3 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $K_1 = K_1^\top \geq 0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $K_2 = K_2^\top \geq 0 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ y $K_3 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$.

Suposición 2. Para esta clase de sistemas físicos, el Hamiltoniano tiene la estructura

$$H(x) = \frac{1}{2}x_2^\top P x_2 + \Phi(x_1) \quad (3)$$

donde $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ es definida positiva. Para los estados medidos x_1 se encuentran caracterizadas las relaciones: $\Phi(x_1) : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}$ que es una función no lineal positiva definida con respecto a x_{1*} que es el punto de mínima energía asociado a los estados medidos.

Suposición 3. El gradiente de la función de energía expresada en (3) es

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} \quad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = P x_2 \quad (5)$$

De acuerdo con la Suposiciones (1)-(3) es posible expresar al sistema (1) de en la forma

$$\dot{x}_1 = [T_1(x_1) - K_1(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} + [T_3(x_1) - K_3(x_1)] P x_2 + g_1(x_1) u \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = -[T_3^\top(x_1) + K_3^\top(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} + [T_2(x_1) - K_2(x_1)] P x_2 + g_2(x_1) u \quad (7)$$

En donde es posible observar que el sistema obtenido de la separación de los estados de acuerdo a la Suposición 1 da como resultado la interconexión de dos sistemas PHC interconectados.

Suposición 4. Considere que la parte no medida del sistema Hamiltoniano expresada por (7) es posible establecer una salida afín a los estados no medidos de la siguiente forma

$$z = [T_3(x_1) - K_3(x_1)] P x_2 \quad (8)$$

en donde la salida z también puede ser representada a través de (6) de la siguiente forma

$$z = \dot{x}_1 - [T_1(x_1) - K_1(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} \quad (9)$$

Una vez establecidas las condiciones estructurales del sistema Hamiltoniano, en la siguiente sección se aborda el problema de diseño de observadores para esta clase de sistemas.

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR

3.1 Diseño de observadores de orden reducido

Para establecer el diseño del observador se emplea la técnica mostrada en Maya-Ortiz and Espinosa-Pérez (2004); Sundarapandian (2006) especializada a sistemas Hamiltonianos. Considere el sistema representado por (1) bajo las suposiciones 1-3, es posible establecer el siguiente esquema de observación

$$\dot{\hat{x}}_2 = -[T_3^\top(x_1) + K_3^\top(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} + [T_2(x_1) - K_2(x_1)] P \hat{x}_2 + g_2(x_1) u + k(z - \hat{z}) \quad (10)$$

en donde z tiene la estructura mostrada en (8) de manera que \hat{z} queda representada de la siguiente forma

$$\hat{z} = [T_3(x_1) - K_3(x_1)] P \hat{x}_2. \quad (11)$$

Considerando (9) y (11) el observador dado por (10) queda expresado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 - k \hat{x}_1 = & \{ [T_2(x_1) - K_2(x_1)] - k [T_3(x_1) - K_3(x_1)] \} P \hat{x}_2 \\ & + g_2(x_1) u - [T_3^\top(x_1) + K_3^\top(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} \\ & + k [T_1(x_1) - K_1(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (12)$$

donde se define la siguiente expresión

$$\dot{s} = \dot{\hat{x}}_2 - k \hat{x}_1 \quad (13)$$

si se retoma la teoría detrás del diseño de observadores por medio de la técnica de Inmersión e Invariancia Astolfi (2003) es posible caracterizar la ganancia k de la siguiente forma

$$k \hat{x}_1 = \frac{d}{dt} \beta(x_1) \quad (14)$$

en donde k se puede obtener a través de la regla de la cadena que caracteriza a la derivada temporal de la función $\beta(x_1) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, es decir

$$k = \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1}. \quad (15)$$

Integrando la expresión (13) considerando (14) y (15) se obtiene

$$s = \hat{x}_2 + \beta(x_1). \quad (16)$$

Observación 1. Para poder encontrar la solución de s es necesario garantizar que la función $\beta(x_1)$ sea integrable.

Proposición 1. Considere la clase de sistemas PHC con la estructura mostrada en la ecuación (1) y el siguiente esquema de observación

$$\begin{aligned} \dot{s} = & \left\{ [T_2(x_1) - K_2(x_1)] - \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} [T_3(x_1) - K_3(x_1)] \right\} P \hat{x}_2 \\ & + g_2 u - [T_3^\top(x_1) + K_3^\top(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} \\ & + \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} [T_1(x_1) - K_1(x_1)] \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\hat{x}_2 = s + \beta(x_1) \quad (18)$$

donde $\beta : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ es una función continua e integrable. Si la matriz

$$\left\{ [T_2(x_1) - K_2(x_1)] - \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} [T_3(x_1) - K_3(x_1)] \right\} P \quad (19)$$

es definida negativa generalizada $\forall x_1$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_2 - \hat{x}_2) = 0. \quad (20)$$

de manera asintótica.

Prueba 1. De acuerdo a la Proposición 1 y considerando que el error de observación es $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$, la dinámica del error para los estados no medibles es

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= [T_2(x_1) - K_2(x_1)] P \tilde{x}_2 - \\ &\quad \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} [T_3(x_1) - K_3(x_1)] P \tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{x}_2) = \frac{1}{2} \tilde{x}_2^\top P \tilde{x}_2 \quad (22)$$

en donde su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2^\top P A P \tilde{x}_2$$

con

$$A = \text{sym} \left\{ [T_2(x_1) - K_2(x_1)] - \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} [T_3(x_1) - K_3(x_1)] \right\}$$

en donde $\text{sym}\{\cdot\}$ representa la parte simétrica de una matriz. Si la parte simétrica de la matriz

$$\left\{ [T_2(x_1) - K_2(x_1)] - \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} [T_3(x_1) - K_3(x_1)] \right\}$$

es definida negativa, entonces $\tilde{x}_2 = 0$ tiene propiedades de estabilidad asintótica, por lo tanto se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_2 - \hat{x}_2) = 0 \quad (23)$$

de manera asintótica.

3.2 Diseño de observadores de acuerdo con Venkatraman and van der Schaft (2010)

En Venkatraman and van der Schaft (2010) se considera una clase de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto descritos como

$$\dot{x} = [J(x_1, u_1) - R(x_1)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(y) u_2 \quad (24)$$

donde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ considerando que $x_1 \in \mathbb{R}^p$ es la parte medible del estado mientras que $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$ corresponde a la parte no medible del estado. En este sentido, se define $y = x_1$ como la salida del sistema y se considera que el Hamiltoniano $H(x_1, x_2) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ y además cumple con la Suposición 2. Para este sistema se propone un observador de la forma

$$\dot{\hat{x}} = [J(\hat{x}_1, u_1) - R(\hat{x}_1)] \frac{\partial H}{\partial \hat{x}}(\hat{x}) + g(y) u_2 + L(\hat{x}_1) v \quad (25)$$

y se construye un sistema aumentado, considerando (24) y (25), para finalmente proponer

$$v = L_1^{-1}(\hat{x}_1) X^{-1} (k(y, \hat{x}, u_1) y_d + v_d) \quad (26)$$

y diseñar $L(\hat{x}_1)$ y $k(y, \hat{x}, u_1)$, con $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$, de tal forma que el sistema completo sea estrictamente pasivo con respecto a la variedad $\mathcal{M} = \{(x, \hat{x}) : x = \hat{x}\}$ desde la entrada v_d hasta la salida $y_d = \hat{x}_1 - x_1$ garantizando convergencia asintótica del observador.

4. CASO DE ESTUDIO: LEVITADOR MAGNÉTICO

El caso de estudio consiste en analizar el comportamiento de dos esquemas de observación, el primero es el mostrado en este trabajo y el segundo corresponde al mostrado en Venkatraman and van der Schaft (2010).

4.1 Modelo matemático

Considere el modelo matemático Hamiltoniano expresado en la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde g es la fuerza de gravedad, m es la masa del balón del levitador, $k > 0$ es una constante asociada al número de espiras de la bobina del levitador, mientras q es la posición de la bola, p es el momentum vertical y φ es el flujo magnético del inductor. Para este sistema la función de energía está dada por

$$H(q, p, \varphi) = mgq + \frac{p^2}{2m} + \frac{\varphi^2}{2k} (1 - q) \quad (28)$$

4.2 Diseño del observador con estructura Hamiltoniana

Para este diseño considere las siguientes suposiciones

Suposición 5. Condiciones de diseño

- Todos los parámetros de este sistema electromecánico se consideran conocidos.
- Las variables a medir son la posición q y el flujo magnético φ

De acuerdo con la clase definida por (1), el Hamiltoniano puede reescribirse como

$$H(q, p, \Phi) = \frac{1}{2m} p^2 + \Phi(x_1) \quad (29)$$

con $\Phi(x_1) = mgq + \frac{\varphi^2}{2k} (1 - q)$. Con base en esto es posible dividir al sistema representado por (27) de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline T_1 & T_3 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline K_1 & K_3 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que se obtiene que

$$\dot{x}_1 = T_3 P x_2 - K_1 \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} + g_1 u \quad (30)$$

$$\dot{x}_2 = -T_3^\top \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} + g_2 u \quad (31)$$

en donde el gradiente de la función $\Phi(x_1)$ toma la forma

$$\frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial q} = mg - \frac{\varphi^2}{2k} (1 - q)^2 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial \varphi} = \frac{\varphi}{k} (1 - q). \quad (33)$$

Para el sistema representado por (4.2) el observador propuesto es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{s} = & -\frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} T_3 P \hat{x}_2 - T_3^\top \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} + g_2 u + \\ & + \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} K_1 \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} g_1 u \end{aligned} \quad (34)$$

$$\hat{x}_2 = s + \beta(x_1) \quad (35)$$

el cual, de acuerdo a las matrices definidas toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{s} = & -\frac{1}{m} \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial q} \hat{p} - \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial q} + \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial \varphi} \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial \varphi} \\ & - \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial \varphi} V \end{aligned} \quad (36)$$

$$\hat{p} = s + \beta(x_1) \quad (37)$$

La dinámica del error se define de la siguiente forma $\dot{\tilde{p}} = \dot{p} - \dot{\hat{p}}$ de lo que se obtiene

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{1}{m} \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial q} \tilde{p} \quad (38)$$

Para que se cumplan las condiciones establecidas por la Proposición 1 la función $\beta(x_1)$ que se propone para este sistema es

$$\beta(x_1) = L_1 q \quad (39)$$

donde $\frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} = L_1$. Al sustituir la ecuación anterior en la dinámica del error se tiene

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{1}{m} L_1 \tilde{p} \quad (40)$$

con $L_1 \neq 0$ la ganancia de diseño del observador. Para caracterizar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{p}) = \frac{1}{2} \tilde{p}^2 \quad (41)$$

Para garantizar estabilidad exponencial de $\tilde{p} = 0$ es suficiente que en la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema de la función candidata de Lyapunov dada por

$$\dot{V}(\tilde{p}) = -\frac{L_1}{m} \tilde{p}^2 \quad (42)$$

la ganancia L_1 sea estrictamente mayor que cero.

4.3 Diseño del observador Venkatraman and van der Schaft (2010)

Considere el sistema expresado por (27) junto con el Hamiltoniano dado por (28), entonces el esquema de observación propuesto en Venkatraman and van der Schaft (2010) queda caracterizado por las siguientes ecuaciones

$$\dot{\hat{\varphi}} = -\frac{R}{k} (\hat{\varphi}(1 - \hat{q})) + V + v_1 \quad (43)$$

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{m} \hat{p} + m v_2$$

$$\dot{\hat{p}} = -mg + \frac{\hat{\varphi}^2}{2k} + m v_2$$

en donde

$$v_1 = -\left[\delta + \frac{1}{m^2} + \frac{R}{k} \{|1 - \hat{q}| + |\varphi|\} + \frac{1}{4k^2} |\varphi + \hat{\varphi}| \right] \xi_1 + v_{d1}$$

$$v_2 = -\left[\delta + \frac{1}{m^2} + \frac{R}{k} \{|1 - \hat{q}| + |\varphi|\} + \frac{1}{4k^2} |\varphi + \hat{\varphi}| \right] \xi_2 + v_{d2}$$

para este caso considere que el error para este esquema de observación se encuentra definido por $\tilde{x} = \hat{x} - x$ por lo tanto $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\tilde{\varphi}, \tilde{q}, \tilde{p} - \tilde{q})$, bajo estas consideraciones v_{d1} y v_{d2} quedan definidos de la siguiente forma

$$v_{d1} = -\left[\frac{R}{k} (\hat{\varphi} \hat{q} - \varphi q) - \frac{\tilde{p}}{2km} (2\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) - \gamma_1 \tilde{\varphi} \right]$$

$$v_{d2} = -\left[\frac{2\tilde{p}}{m^2} - \frac{\hat{\varphi}^2}{2km} + \frac{\varphi^2}{2km} - \gamma_2 \tilde{q} \right]$$

de esta forma se garantiza que la dinámica del error es estrictamente pasiva desde (v_{d1}, v_{d2}) hasta $(\tilde{\varphi}, \tilde{q})$.

Observación 2. Para el esquema de observación mostrado en Venkatraman and van der Schaft (2010) se considera también la Suposición 5, con la diferencia de que el esquema de observación citado es un observador de orden completo.

4.4 Evaluación Numérica

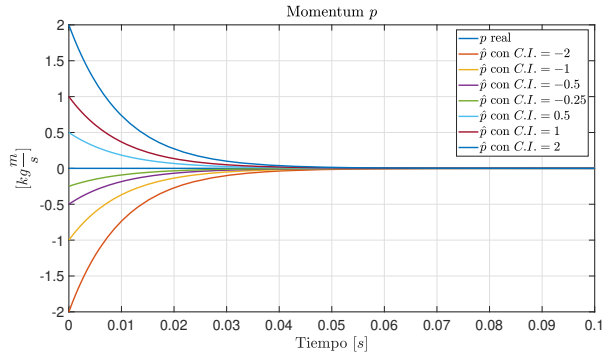
Para realizar la evaluación numérica de los esquemas de control se considera el análisis del levitador en lazo abierto considerando como punto de operación $(\varphi^*, q^*, p^* = (9.9045, 0.5, 0))$ con una entrada de control constante igual a $V = 0.0218$. Los parámetros empleados en el sistema para la realización de la evaluación numérica se muestran en la Figura 1.

Parámetro	Valor
Masa m	0.1[kg]
Resistencia R	0.20[Ω]
Número de vueltas en el inductor k	50
Aceleración de gravedad g	9.81 $\frac{m}{s^2}$
Ganancia del observador L_1	10

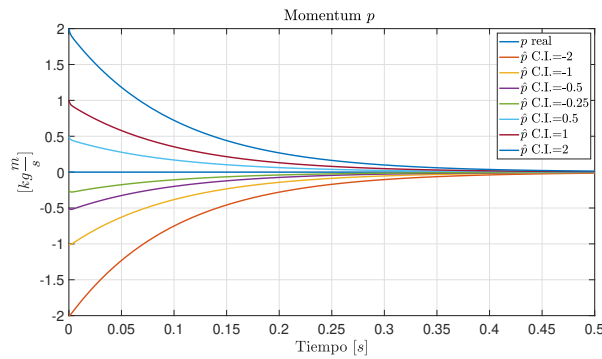
Table 1.

En la Figura 1a se muestra el comportamiento del *momentum* observado (\hat{p}), se puede observar cómo sin

importar la condición inicial se cumple con el objetivo de observación en alrededor $0.04[s]$; mientras que en la Figura 1b se muestra el desempeño del observador dado (43) considerando solo la estimación del *momentum* ante diferentes condiciones iniciales, se puede observar como en este caso el esquema de observación cumple con su objetivo cerca de los $0.4[s]$.



(a) *Momentum p*. Desempeño del observador con estructura Hamiltoniana.

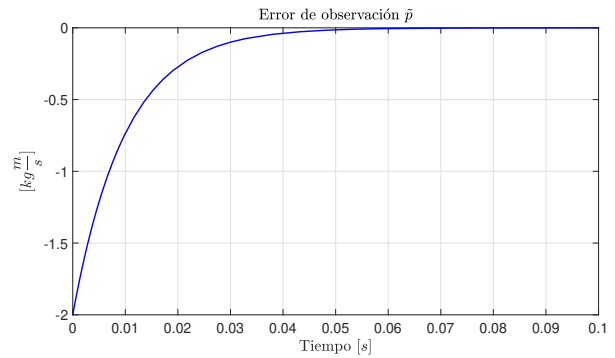


(b) *Momentum p*. Desempeño del observador Venkatraman and van der Schaft (2010)

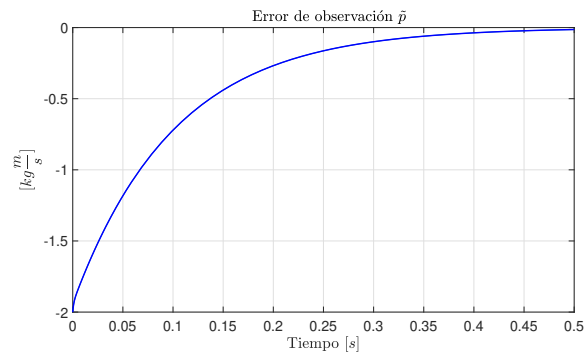
Fig. 1. Comparación entre ambos esquemas de observación ante diferentes condiciones iniciales

Para complementar el análisis en la Figura 2 se muestran los errores de observación, en la Figura 2a se muestra el comportamiento del error de observación del esquema con estructura Hamiltoniana considerando el caso de la condición inicial $\hat{q}_0 = 2$, en donde se muestra que el error de observación del esquema con estructura Hamiltoniana tiende a cero aproximadamente en $0.04[s]$ mientras que el error de observación obtenido por el esquema diseñado en Venkatraman and van der Schaft (2010) tiende a cero en $0.4[s]$ como se muestra en la Figura 2b. Para complementar el análisis en la Figura 2b se muestra el comportamiento del error de observación del esquema reportado en Venkatraman and van der Schaft (2010) considerando el caso de la condición inicial $\hat{q}_0 = 2$

Para complementar este análisis en la Figura 3 se muestra la integral del error cuadrático de medio del error de observación para ambos esquemas considerando una condición inicial $\hat{q}_0 = 2$



(a) Error de observación para el esquema con estructura Hamiltoniana.



(b) Error de observación para el esquema Venkatraman and van der Schaft (2010).

Fig. 2. Errores de observación.

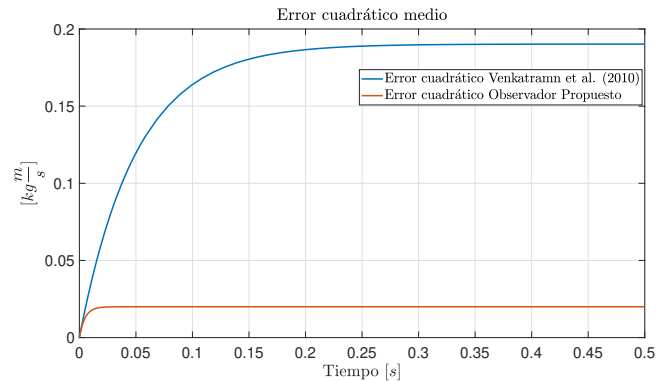


Fig. 3. Integral del error cuadrático medio

es posible observar que ambos casos logran una medida de desempeño constate con la diferencia que el esquema diseñado por Venkatraman and van der Schaft (2010) posee un error cuadrático de observación más grande que el esquema mostrado en este trabajo. Con el análisis anterior es posible establecer lo siguiente

Observación 3. Para garantizar que el observador Venkatraman and van der Schaft (2010) cumpla con el objetivo de observación es necesario garantizar la existencia de una ley de retroalimentación que logre que el sistema aumentado

$$\dot{x} = [J(x_1, u) - R(x_1)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(y)u_2$$

$$\dot{\hat{x}} = [J(\hat{x}_1, u) - R(\hat{x}_1)] \frac{\partial H(\hat{x})}{\partial \hat{x}} + g(y)u_2 + L_1(\hat{x}_1)v$$

sea estrictamente pasivo con respecto a la variedad $\mathcal{M} = \{(x, \hat{x}) | x = \hat{x}\}$ desde una entrada v_d hasta el error de observación, esta condición complica el diseño de las ganancias del observador; en el esquema de observación presentado en este trabajo de investigación se presenta una metodología que permite obtener de manera sistemática las ganancias del observador, la desventaja de este esquema radica en que es necesario que se cumpla con la condición de integrabilidad de la función $\beta(x_1)$ para garantizar la convergencia del observador.

Observación 4. De acuerdo a la sintonización empleada, el observador presentado en este trabajo de investigación cumple con el objetivo de observación diez veces más rápido que el observador diseñado en Venkatraman and van der Schaft (2010).

5. CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se muestra el diseño de un esquema de observación de orden reducido para una clase de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto no lineales. La clase de sistemas no lineales se encuentra caracterizada por la estructura de la función de energía pero además a través de las propiedades de interconexión de los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto es posible sistematizar la metodología de diseño así como la obtención de las ganancias del observador. Adicionalmente se realizó la validación del esquema de observación propuesto para el levitador magnético y se comparó el resultado obtenido de este esquema de observación con un esquema similar en la literatura reportado en Venkatraman and van der Schaft (2010) en donde el observador diseñado en este trabajo muestra mejores condiciones de desempeño ante variación de condiciones iniciales, una mayor velocidad de convergencia y un menor valor en el error cuadrático medio. La desventaja principal es que el observador diseñado en Venkatraman and van der Schaft (2010) corresponde a un observador de orden completo mientras que el mostrado en este artículo es un observador de orden reducido. Como trabajo futuro queda pendiente extender la clase de sistemas con la cual es posible trabajar de acuerdo a la caracterización de la función energía de los sistemas.

ACKNOWLEDGEMENTS

El trabajo realizado por el primer y segundo autor ha sido apoyada por DGAPA-UNAM bajo el proyecto PAPIIT IN118019.

REFERENCES

Astolfi, Alessandro y Ortega, R. (2003). Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 48(4), 590–606.

- Biedermann, B., Rosenzweig, P., and Meurer, T. (2018). Passivity-based observer design for state affine systems using interconnection and damping assignment. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 4662–4667. doi:10.1109/CDC.2018.8619143.
- Fu, B., Wang, Q., and He, W. (2018). Nonlinear disturbance observer-based control for a class of port-controlled hamiltonian disturbed systems. *IEEE Access*, 6, 50299–50305. doi: 10.1109/ACCESS.2018.2868919.
- Maschke, B. and van der Schaft, A. (1993). Port-controlled hamiltonian systems: Modelling origins and system theoretic properties. In M. Fliess (ed.), *Nonlinear Control Systems Design 1992.*, IFAC Symposia Series, 359–365. Pergamon, Oxford. doi: https://doi.org/10.1016/B978-0-08-041901-5.50064-6.
- Maya-Ortiz, P. and Espinosa-Pérez, G. (2004). Output feedback excitation control of synchronous generators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 14(9-10), 879–890.
- Pfeifer, M., Caspart, S., Strehle, F., and Hohmann, S. (2021). Full-order observer design for a class of nonlinear port-hamiltonian systems. *IFAC-PapersOnLine*, 54(19), 149–154. doi: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.11.070. 7th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control LHMNC 2021.
- Rojas, M., Granados-Salazar, C., and Espinosa-Perez, G. (2021). Observer design for a class of nonlinear hamiltonian systems. *IFAC PapersOnLine.*, 54(19), 125–130.
- Sundarapandian, V. (2006). Reduced order observer design for nonlinear systems. *Applied mathematics letters*, 19(9), 936–941.
- Venkatraman, A. and van der Schaft, A. (2010). Full-order observer design for a class of port-hamiltonian systems. *Automatica*, 46(3), 555 – 561. doi: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.01.019.
- Yaghmaei, Abolfazl y Yazdanpanah, M.J. (2018). Structure preserving observer design for port-Hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(3), 1214–1220.
- Zenfari, S., Laabissi, M., and Achhab, M.E. (2022). Proportional observer design for port hamiltonian systems using the contraction analysis approach. *International Journal of Dynamics and Control*, 10(2), 403–408.