

Lateral directional geometric control for small fixed-wing aircraft.*

M. Martínez-Ramírez* H. Rodríguez-Cortés*

* *Sección de Mecatrónica, Depto. de Ingeniería Eléctrica, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, 07360, México (e-mail: {marcoa.martinez,hrodriguez}@cinvestav.mx).*

Abstract: This paper presents a solution to the path following problem for fixed-wing aircraft on the cartesian plane. The solution considers the lateral-directional aircraft dynamics, the geometric structure of the aircraft kinematics, and an inner-outer control loop configuration. Numerical simulations employing Matlab-Simulink and the flight simulator X-Plane are presented to verify the performance of the proposed control algorithm.

Keywords: Aircraft control, path control, control algorithms, flight control, sliding-mode control, geometric approaches.

1. INTRODUCCIÓN

Aplicaciones de vehículos aéreos no tripulados (VANTs), tales como búsqueda y rescate, monitoreo meteorológico y rastreo de vehículos terrestres, requieren de un sistema navegación, guía de vuelo y control (SNGC) que permita seguir referencias en el plano Cartesiano. Los VANTs de ala fija, al tener ventajas sobre sus contrapartes de ala rotatoria, en términos de velocidad y autonomía, son más adecuados para este tipo de misiones. En un VANT de ala fija el seguimiento de referencias en el plano Cartesiano precisa el control de su dinámica lateral-direccional.

La dinámica lateral-direccional describe el movimiento traslacional, a lo largo del eje lateral, y el movimiento rotacional, alrededor de los ejes vertical y longitudinal, bajo la suposición de que la aeronave se desplaza a una velocidad y ángulo de vuelo regulados por el control longitudinal. Bajo estas condiciones, la cinemática lateral-direccional traslacional de la aeronave es igual a la de un robot móvil de tipo unicycle desplazándose a velocidad constante Ren and Beard (2004). La dinámica lateral-direccional tiene como entradas de control a los alerones y el timón. Los ángulos de alabeo y guiñada permiten propagar la acción de control a la posición Cartesiana de la aeronave.

La solución al problema de guía de vuelo y control de la dinámica lateral-direccional involucra dos lazos de control. Un lazo de control externo determina la referencia para el ángulo de alabeo a partir del ángulo de guiñada, que permite reducir la distancia traslacional a la referencia deseada, mientras que un lazo de control interno

define el comportamiento de los alerones y el timón. Desde el punto de vista de la teoría de control, el problema más complejo es el diseño de lazo externo de control. Los siguientes trabajos se centran en el diseño de este lazo de control. En Samar et al. (2007) se propone un control convencional proporcional-derivativo (PD) con términos no lineales para mejorar el seguimiento en diferentes condiciones de vuelo, especialmente para corregir de errores de seguimiento laterales importantes. En Park et al. (2004) se reporta un control lógico que aproxima el comportamiento de un controlador PD para seguimiento de caminos rectos, agregando términos de prealimentación se logra el seguimiento de caminos curvos. El trabajo Golestani and Mohammadzaman (2015) propone una ley de control lateral de tipo proporcional-integral-derivativo (PID) con una componente lineal invariante en el tiempo en el lazo de prealimentación y una ganancia variante en el tiempo en el lazo de retroalimentación; el análisis de estabilidad se basa en el criterio del círculo. En Ren and Beard (2004) se emplea el enfoque de función de Lyapunov de control (FLC) para diseñar un control para seguimiento de trayectorias para el modelo cinemático de una aeronave de ala fija. Se propone una FLC restringida, para considerar, por ejemplo, que la velocidad de la aeronave no puede ser cero o negativa, mientras que el conjunto factible provee la entrada de control. En Rysdyk (2006) se desarrolla una ley de control para la dinámica lateral-direccional basada en el comportamiento del "buen timonel". Se asegura que la integración de esta ley de control con la dinámica de la aeronave preserva las propiedades de estabilidad. Se utiliza un observador para estimar el viento y orientar la trayectoria de referencia con el objetivo.

* El primer autor agradece a CONACYT por el apoyo económico con el CVU: 1079221

Los siguientes trabajos consideran el diseño de los dos lazos de control. En Stephan et al. (2020) se desarrolla un algoritmo para seguimiento de trayectorias en tres dimensiones. La alta precisión de seguimiento se obtiene combinando una trayectoria de referencia al menos dos veces diferenciable con prealimentación basada en planitud diferencial y un control no lineal basado en inversión dinámica. El desempeño y la factibilidad del algoritmo se evalúan a través de pruebas de vuelo. En Luo et al. (2011) se presenta un control lateral direccional de orden fraccionario. El algoritmo de control se evalúa experimentalmente en un VANT de configuración ala voladora. En Yamasaki et al. (2012) se presenta un algoritmo para guía de vuelo y control basado en regímenes deslizantes de segundo orden. El control se complementa con un observador basado en regímenes deslizantes de alto orden para estimar superficies deslizantes inciertas. En Ali et al. (2016) se reporta un lazo externo de control basado en una superficie de conmutación no lineal que genera las referencias para el ángulo de alabeo. El lazo interno de control se basa en una superficie deslizante lineal y el algoritmo de super twisting. El algoritmo propuesto se valida con vuelos experimentales.

Este artículo presenta una solución al problema de guía de vuelo y control de la dinámica lateral-direccional bajo el enfoque de dos lazos de control. Se propone un algoritmo de super twisting para el control de lazo interno. El control de lazo externo se basa en el método de control no lineal geométrico. El desempeño del algoritmo se evalúa con una simulación numérica cooperativa entre Matlab-Simulink y el simulador de vuelo X-Plane.

Este artículo tiene la siguiente estructura. En la Sección 2 se introduce la dinámica lateral-direccional de la aeronave. La Sección 3 se dedica al diseño de los algoritmos de guía de vuelo y control, mientras que la Sección 4 reporta los resultados de la simulación numérica. La Sección 5 presenta las conclusiones de este trabajo.

2. DINÁMICA LATERAL-DIRECCIONAL

El modelo lateral-direccional que se aborda en este trabajo se obtiene a partir de los modelos presentados en Corona-Sánchez et al. (2019) y Morelli and Klein (2016) bajo las siguientes suposiciones.¹

Suposición 1. La aeronave está equipada con un sistema de control longitudinal que mantiene a la velocidad aerodinámica V y al ángulo de vuelo γ en valores constantes \bar{V} y $\bar{\gamma}$, respectivamente. Como consecuencia los ángulos de ataque α y de cabeceo θ se mantienen en valores constantes $\bar{\alpha}$ y $\bar{\theta}$, respectivamente.

Suposición 2. El ángulo de ataque $\bar{\alpha}$ y el ángulo de derrape β son pequeños, es decir,

$$\bar{\alpha} \approx 0 \rightarrow \bar{\gamma} = \bar{\theta}, \quad \beta \approx 0 \rightarrow \chi = \psi \quad (1)$$

¹ En el resto del artículo, se considera la siguiente notación $\cos(\sigma_1) = c_{\sigma_1}$, $\sin(\sigma_1) = s_{\sigma_1}$ y $\tan(\sigma_1) = t_{\sigma_1}$ para cualquier ángulo σ_1 .

con χ el ángulo azimutal y ψ el ángulo de guiñada. La aeronave realiza giros coordinados, por lo tanto, Stevens et al. (2015)

$$C_Y = 0 \rightarrow r = \frac{g}{V} c_{\bar{\theta}} s_{\phi} \quad (2)$$

con C_Y el coeficiente de fuerza lateral, r la velocidad de guiñada en ejes cuerpo, g la constante de la aceleración gravitacional y ϕ el ángulo de alabeo.

Bajo las suposiciones 1 y 2, el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales describe el modelo dinámico lateral-direccional

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\bar{\theta}} c_{\psi} \bar{V} \\ c_{\bar{\theta}} s_{\psi} \bar{V} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + t_{\bar{\theta}} \frac{r}{c_{\phi}} \\ \frac{1}{c_{\bar{\theta}}} \frac{r}{c_{\phi}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\ I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(I_z - I_y) r^2 t_{\phi} + I_{xz} p r t_{\phi} \\ -(I_y - I_x) p r t_{\phi} - I_{xz} r^2 t_{\phi} \end{bmatrix} + \bar{q} S b \begin{bmatrix} c_l(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \\ c_n(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \end{bmatrix} \quad (4)$$

con x , y la posición cartesiana de la aeronave, p la velocidad de alabeo en ejes cuerpo, I_x , I_y , I_z y I_{xz} los momentos de inercia de la aeronave, b la envergadura del ala, S la superficie alar y $\bar{q} = 1/2\rho\bar{V}^2$ con ρ la densidad del aire. Además, c_l y c_n son los coeficientes aerodinámicos de los momentos de alabeo y de guiñada con δ_a y δ_r las deflexión de los alerones y del timón de dirección, respectivamente.

3. GUÍA DE VUELO Y CONTROL LATERAL-DIRECCIONAL

Esta sección presenta el proceso del diseño del control. Primero, se establece el objetivo de control.

Objetivo de control. Dada una secuencia ordenada de puntos de referencia W_i con coordenadas (x_{d_i}, y_{d_i}) en el plano Cartesiano. Diseñar entradas de control δ_r y δ_a de tal manera que la distancia \tilde{y} entre el eje longitudinal de la aeronave y la línea que une a dos puntos de referencia, W_i , W_{i+1} , asintóticamente converja a cero, ver Figura 1. La aeronave debe desplazarse del punto de referencia W_i al punto de referencia W_{i+1} .

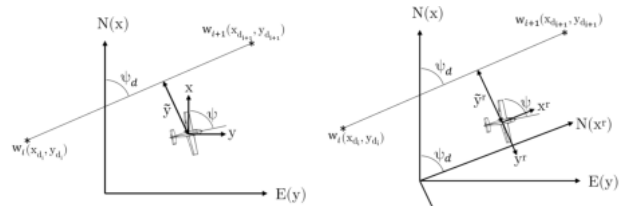


Fig. 1. Error de la distancia lateral de la aeronave en el sistema de ejes NED \tilde{y} (izquierda) y error de distancia lateral de la aeronave en el sistema de ejes auxiliar \tilde{y}^T (derecha).

Para satisfacer el objetivo de control, este trabajo sigue el enfoque de diseñar dos lazos de control. El objetivo del lazo de control interno se expresa de la siguiente manera

$$\lim_{t \rightarrow T} \tilde{p} \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow T} \tilde{r} \rightarrow 0 \quad (5)$$

donde $T \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{r} = r - r_d$ y $\tilde{p} = p - p_d$ con p_d y r_d las velocidades angulares de referencia determinadas por el controlador de lazo externo.

Un controlador con convergencia en tiempo finito puede diseñarse como sigue. Considere que los coeficientes de los momentos aerodinámicos tienen la siguiente estructura Morelli and Klein (2016)

$$c_l = c_{l_0} + c_{l_\beta} \beta + \frac{b}{2\bar{V}} c_{l_p} p + \frac{b}{2\bar{V}} c_{l_r} r + c_{l_{\delta_a}} \delta_a + c_{l_{\delta_r}} \delta_r$$

$$c_n = c_{n_0} + c_{n_\beta} \beta + \frac{b}{2\bar{V}} c_{n_p} p + \frac{b}{2\bar{V}} c_{n_r} r + c_{n_{\delta_a}} \delta_a + c_{n_{\delta_r}} \delta_r$$

con c_{i_0} , c_{i_β} , c_{i_p} y c_{i_r} con $i = l, n$ los coeficientes aerodinámicos de estabilidad y $c_{i_{\delta_a}}$, $c_{i_{\delta_r}}$ con $i = l, n$ los coeficientes aerodinámicos de control. La dinámica rotacional (4) puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta, p, r) \\ \varphi_2(\beta, p, r) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

con

$$\varphi_1 = c_{l_0} + c_{l_\beta} \beta + \frac{b}{2\bar{V}} c_{l_p} p + \frac{b}{2\bar{V}} c_{l_r} r$$

$$\varphi_2 = dsc_{n_0} + c_{n_\beta} \beta + \frac{b}{2\bar{V}} c_{n_p} p + \frac{b}{2\bar{V}} c_{n_r} r$$

$$B = \bar{q} S b \begin{bmatrix} I_x & -I_{xz} \\ -I_{xz} & I_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{l_{\delta_a}} & c_{l_{\delta_r}} \\ c_{n_{\delta_a}} & c_{n_{\delta_r}} \end{bmatrix}$$

Se selecciona la superficie deslizante como $\mathbf{S} = [\tilde{p} \ \tilde{r}]^\top$, de tal forma que

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta, p, r) \\ \varphi_2(\beta, p, r) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{p}_d \\ \dot{r}_d \end{bmatrix}$$

El algoritmo de super-twisting propone la siguiente entrada de control Chalanga et al. (2016)²

$$B \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} = -\Lambda_2 \int_0^t \mathbf{sign}(\mathbf{S}(\tau)) d\tau - \Lambda_1 \mathbf{abs}(\mathbf{S})^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\mathbf{S}) \quad (7)$$

donde

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_{11}, \lambda_{12}\}, \quad \Lambda_2 = \text{diag}\{\lambda_{21}, \lambda_{22}\}$$

con $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$, $i = 1, 2$ ganancias positivas.

Considere el siguiente cambio de coordenadas

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}_2 = \Theta(\beta, p, r, t) - \Lambda_2 \int_0^t \mathbf{sign}(\mathbf{S}(\tau)) d\tau$$

donde

$$\Theta(\beta, p, r, t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta, p, r) \\ \varphi_2(\beta, p, r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{p}_d \\ \dot{r}_d \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = -\Lambda_1 \mathbf{abs}(\mathbf{S}_1)^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\mathbf{S}_1) + \mathbf{S}_2 \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_2 = -\Lambda_2 \mathbf{sign}(\mathbf{S}_1) + \dot{\Theta}$$

² Los operadores en letras negras se definen como sigue para cualquier vector $\chi \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{sign}(\chi) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\chi_{11}) \\ \text{sign}(\chi_{12}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{abs}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\chi) = \begin{bmatrix} |\chi_{11}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\chi_{11}) \\ |\chi_{12}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\chi_{12}) \end{bmatrix}$$

Proposición 1. Suponga que B es conocida, y

$$|\dot{\Theta}| \leq \Theta_0 \quad (9)$$

con Θ_0 una constante positiva. Entonces, existen matrices positivas definidas Λ_1 y Λ_2 tales que la dinámica de lazo cerrado (6) y (7) satisfacen (5).

Prueba. La ecuación (8) puede expandirse como se muestra a continuación

$$\dot{s}_{11} = -\lambda_{11} |s_{11}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_{11}) + s_{21}, \quad \dot{s}_{21} = -\lambda_{21} \text{sign}(s_{11}) + \dot{\Theta}_1$$

$$\dot{s}_{12} = -\lambda_{12} |s_{12}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_{12}) + s_{22}, \quad \dot{s}_{22} = -\lambda_{12} \text{sign}(s_{11}) + \dot{\Theta}_2$$

donde se considera la notación $\mathbf{S}_1 = [s_{11} \ s_{12}]^\top$, $\mathbf{S}_2 = [s_{21} \ s_{22}]^\top$ and $\Theta = [\Theta_1 \ \Theta_2]^\top$. Entonces, (s_{11}, s_{21}) y (s_{12}, s_{22}) definen dos algoritmos de super-twisting Chalanga et al. (2016). Como se demuestra en Moreno and Osorio (2012), si 9 se mantiene, los estados (s_{11}, s_{21}) y (s_{12}, s_{22}) convergen a cero en tiempo finito de tal manera que \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 convergen a cero en tiempo finito. \triangleleft

Ahora se diseña el lazo externo de control. Al expresar el modelo cinemático (3) en términos de \tilde{p} y \tilde{r} se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\bar{\theta}} c_\psi \bar{V} \\ c_{\bar{\theta}} s_\psi \bar{V} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_d + t_{\bar{\theta}} \frac{r_d}{c_\phi} \\ \frac{1}{c_{\bar{\theta}}} \frac{r_d}{c_\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{p} + t_{\bar{\theta}} \frac{\tilde{r}}{c_\phi} \\ \frac{1}{c_{\bar{\theta}}} \frac{\tilde{r}}{c_\phi} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Al seleccionar $r_d = \frac{g}{\bar{V}} c_{\bar{\theta}} s_\phi$ para mantener la condición de giro coordinado y considerar que la relación en (2) se satisface, la ecuación (10) puede simplificarse como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\bar{\theta}} c_\psi \bar{V} \\ c_{\bar{\theta}} s_\psi \bar{V} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_d + \frac{g}{\bar{V}} s_{\bar{\theta}} t_\phi \\ \frac{g}{\bar{V}} t_\phi \end{bmatrix} \quad (11)$$

Las ecuaciones cinemáticas angulares en (11) no consideran que el espacio de configuración de los ángulos ϕ y ψ es el círculo unitario \mathbb{S}^1 ³. El círculo unitario puede proyectarse al grupo de Lie $SO(2)$ como sigue Marsden and Ratiu (1999)⁴

$$\forall \psi \in [0, 2\pi] \quad \exists \quad R_\psi \in SO(2)$$

donde

$$SO(2) = \left\{ R_\psi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid R_\psi^\top R_\psi = I, \det(R_\psi) = 1 \right\}$$

con $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matriz identidad. En coordenadas locales, se tiene

$$R_\psi = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \quad (12)$$

La cinemática de la aeronave en (11) en términos de la matriz (12) puede expresarse como

$$\dot{X} = R_\psi \mathcal{V}, \quad \dot{R}_\psi = R_\psi \bar{r}^\wedge \quad (13)$$

$$\dot{\phi} = \bar{r} s_{\bar{\theta}} + p_d$$

³

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid P^\top P = 1 \right\}$$

⁴ En este trabajo no se considera el espacio de configuración del ángulo del alabeo.

con

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{r}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{r} \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}, \bar{v} = \frac{\bar{V}}{V} c_{\bar{\theta}}, \bar{r} = \frac{g}{V} t_\phi$$

El operador $(\cdot)^\wedge : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{so}(2)$ proyecta la velocidad angular \bar{r} al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$, esto es, Fecko (2006)

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\bar{r} \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}, \forall \bar{r} \in \mathbb{R} \right\}$$

En la ecuación (13) es evidente que la cinemática traslacional puede controlarse a través de la matriz R_ψ y del ángulo de alabeo ϕ . Cuando la línea que une a los puntos de referencia W_i y W_{i+1} es paralela al eje $N(x)$, el objetivo de control se satisface al regular la posición y de la aeronave a la ubicación de la línea. Para el caso en el que la línea que une a W_i con W_{i+1} forma un ángulo ψ_d con respecto al eje $N(x)$ se introduce el siguiente cambio de coordenadas

$$X^r = R_{\psi_d}^T X, \quad R_{\psi_d} = \begin{bmatrix} c_{\psi_d} & -s_{\psi_d} \\ s_{\psi_d} & c_{\psi_d} \end{bmatrix}$$

Las coordenadas X^r expresan la posición de la aeronave con respecto a un sistema de referencia cuyo eje $N(x^r)$ es paralelo a la dirección de la línea que une a W_i con W_{i+1} . Se tiene,

$$\dot{X}^r = R_{\psi_d}^T R_\psi \mathcal{V} \quad (14)$$

ya que ψ_d es constante para cada par de puntos de referencia. Al definir

$$\tilde{R}_\psi = R_r^T R_\psi, \quad R_r = R_{\psi_d} R_{\psi_c} \quad (15)$$

con R_{ψ_c} una matriz a definir. La ecuación (14) puede expresarse como sigue

$$\dot{X}^r = R_{\psi_c} \tilde{R}_\psi \mathcal{V} \quad (16)$$

Ahora el objetivo es regular a \tilde{R}_ψ en la matriz identidad I de tal forma que la cinemática traslacional (16) asintóticamente converja a

$$\dot{X}^r = R_{\psi_c} \mathcal{V} \quad (17)$$

En el sistema de referencia $N(x^r)E(y^r)$ la distancia lateral de la aeronave a la línea de referencia es

$$\tilde{y}^r = (X^r - R_{\psi_d}^T X_{d_i})^\top e_2$$

con X_{d_i} las coordenadas del punto de referencia W_i y $e_2 = [0 \ 1]^\top$. Para definir R_{ψ_c} considere que la ecuación (17) puede expresarse como⁵

$$\dot{\tilde{x}}^r = \bar{v} c_{\psi_c}, \quad \dot{\tilde{y}}^r = \bar{v} s_{\psi_c} \quad (18)$$

En (18) la entrada de control virtual es s_{ψ_c} por lo tanto, debe ser una señal que tome valores dentro del conjunto $[-1, 1]$. Se propone

$$s_{\psi_c} = -\tanh(k\tilde{y}^r)$$

con k una constante positiva. De tal forma que

$$R_{\psi_c} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \tanh^2(k\tilde{y}^r)} & \tanh(k\tilde{y}^r) \\ -\tanh(k\tilde{y}^r) & \sqrt{1 - \tanh^2(k\tilde{y}^r)} \end{bmatrix}$$

La dinámica de la matriz de error de rotación (15) es

$$\dot{\tilde{R}}_\psi = \tilde{R}_\psi \tilde{r}^\wedge, \quad \tilde{r} = \bar{r} - \bar{r}_d, \quad \bar{r}_d = (R_r^T \dot{R}_r)^\vee \quad (19)$$

⁵ Notar que $R_{\psi_d}^T X_{d_i}$ es constante entre cada par de puntos de referencia. Además, $\tilde{x}^r = (X^r - R_{\psi_d}^T X_{d_i})^\top e_1$ con $e_1 = [1 \ 0]^\top$.

Proposición 2. Considere la dinámica de la matriz de error de rotación (19) en lazo cerrado con la ley de control

$$\dot{\tilde{r}} = (R_{\psi_d}^T \dot{R}_{\psi_d})^\vee - k_R P_a(\tilde{R})^\vee, \quad P_a(\tilde{R}_\psi) = \frac{1}{2}(\tilde{R}_\psi - \tilde{R}_\psi^\top) \quad (20)$$

Existe $k_R > 0$ tal que el punto de equilibrio $\tilde{R}_\psi = I$ es casi globalmente asintóticamente estable.⁶

Prueba. La dinámica de lazo cerrado (19)-(20) es

$$\dot{\tilde{R}}_\psi = -k_R \tilde{R} P_a(\tilde{R}) \quad (21)$$

La siguiente ecuación algebraica caracteriza los puntos de equilibrio de (21)

$$0 = -k_R \tilde{R} P_a(\tilde{R})$$

Es fácil verificar que $\tilde{R}_\psi \pm I$ son puntos de equilibrio de (21). Al linealizar (21) puede verificarse que $\tilde{R}_\psi = -I$ es inestable. Considere, ahora, la siguiente función de Lyapunov Koditschek (1989)

$$\Phi = \frac{1}{2} \text{trace}(I - \tilde{R}_\psi)$$

La derivada respecto al tiempo de Φ a lo largo de las trayectorias de (21) es

$$\dot{\Phi} = -k_R \left(P_a(\tilde{R}_\psi)^\vee \right)^2$$

Por lo tanto, las trayectorias de (21) convergen al conjunto, Khalil (2002)

$$\mathcal{D} = \left\{ \tilde{R}_\psi \in SO(2) \mid P_a(\tilde{R}_\psi) = 0 \right\}$$

el cual sólo contiene a las matrices $\tilde{R}_\psi = \pm I$. Con esto se completa la prueba. \triangleleft

Ahora se propaga la acción de control al ángulo de alabeo. Se define

$$\zeta = \frac{g}{V} t_\phi - \bar{r}$$

de tal forma que

$$\dot{\zeta} = \frac{g}{V} (1 + t_\phi^2) \left(p_d + \frac{g}{V} s_{\bar{\theta}} t_\phi \right) - \dot{\bar{r}} \quad (22)$$

Proposición 3. Suponga que $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Entonces, (22) en lazo cerrado con la ley de control

$$p_d = -\frac{g}{V} s_{\bar{\theta}} t_\phi + \frac{\bar{V}}{g(1 + t_\phi^2)} (-K\zeta + \dot{\bar{r}}) \quad (23)$$

con $K > 0$ tiene un punto de equilibrio localmente exponencialmente estable en $\zeta = 0$.

Prueba. La dinámica de lazo cerrado (22)-(23) es

$$\dot{\zeta} = -K\zeta$$

por lo tanto, ζ converge exponencialmente a cero si la restricción $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ se mantiene. \triangleleft El resultado principal se establece como sigue

⁶ Se dice que una solución de equilibrio de un sistema dinámico es casi globalmente asintóticamente estable si es asintóticamente estable con un dominio casi global de atracción, es decir, el dominio de atracción es todo el espacio de estados excluyendo el conjunto de la medida de Lebesgue cero Lee (2015), Coates and Fossen (2021).

Proposición 4. Considere la dinámica lateral-direccional (3)-(4) en lazo cerrado con el controlador (7), (23) y el algoritmo de guía lateral (20). Existen ganancias Λ_1 , Λ_2 , k , k_R y K tales que el error \tilde{y}^r converja localmente asintóticamente a cero.

Prueba. De las proposiciones 1, 2, 3, y 4, ninguna señal puede diverger al infinito en tiempo finito. Por lo tanto, para conseguir que \tilde{y} converja asintóticamente a cero, las ganancias de control deben seleccionarse de tal manera que los errores \tilde{r} y \tilde{p} converjan a cero más rápido que ζ y \tilde{R}_ψ a 0 e I , respectivamente. Las ganancias k_R , K deben ser seleccionadas de tal manera que ζ converja a cero más rápido que la convergencia de \tilde{R}_ψ a I .

Si los errores \tilde{r} , \tilde{p} , ζ y \tilde{R}_ψ convergen a sus referencias, de la ecuación (17), se tiene

$$\dot{\tilde{x}}^r = \bar{v}\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y}^r)^2}, \quad \dot{\tilde{y}}^r = -\bar{v}\tanh(k\tilde{y}^r) \quad (24)$$

De la segunda ecuación en (24) se puede ver que \tilde{y} converge a cero. \triangleleft

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Esta sección reporta los resultados de la simulación numérica. Los algoritmos de control y guía lateral se implementan en Simulink, mientras que el simulador de vuelo X-Plane ejecuta el modelo dinámico de la aeronave. La comunicación entre Simulink y X-Plane usa el User Datagram Protocol (UDP) Thomas (Retrieved February 25, 2022). La aeronave de control remoto conocida como Telemaster se modela en Plane Maker, un programa incluido en X-Plane que permite el diseño de aeronaves, ver Figura 2 (izquierda). Los parámetros principales de

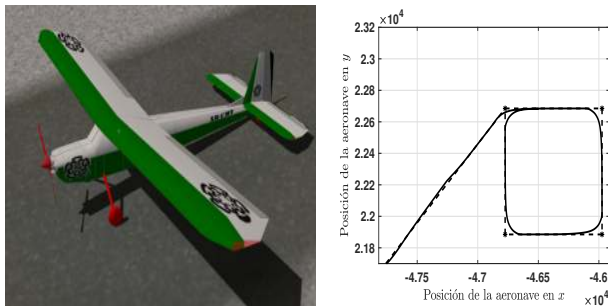


Fig. 2. Telemaster modelado en Plane Maker (izquierda) y trayectoria seguida por la aeronave en las simulaciones numéricas (derecha).

la aeronave son $I_x = 11.671kgm^2$, $I_z = 17.285kgm^2$, $I_{xz} = -0.024kgm^2$, $b = 2.386m$, y $S = 0.858m^2$. Los coeficientes aerodinámicos de control son $c_{n_{da}} = 0.4762$, $c_{n_{dr}} = 1.5888$, $c_{l_{da}} = 0.8507$, y $c_{l_{dr}} = 0.0154$ obtenidos con el software SIDPAC Morelli and Klein (2016). Se utiliza una versión modificada del controlador de la dinámica longitudinal propuesto en Rosario-Gabriel and Cortés (2018) para regular a la velocidad y el ángulo de vuelo

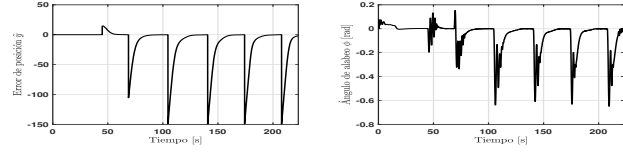


Fig. 3. Error lateral \tilde{y} (izquierda) y ángulo de alabeo ϕ (derecha).

en $\bar{V} = 20m/s$, y $\bar{\gamma} = 0.0174rad$, respectivamente. Las pruebas para sintonizar el controlador propuesto permiten hacer las siguientes conclusiones. Λ_1 modifica las oscilaciones de p y r una vez que han alcanzado a p_d and r_d , respectivamente. Λ_2 ajusta el tiempo para alcanzar a p_d y r_d . Valores pequeños en Λ_1 y Λ_2 resultan en una respuesta lenta y oscilaciones de gran amplitud; por el contrario, valores altos producen una rápida respuesta y oscilaciones de baja amplitud, pero de alta frecuencia, en algunos casos, pueden ocasionar inestabilidad. El criterio de sintonización para las ganancias k , K y K_R considera evitar ángulos de alabeo grandes. Valores grandes para k demandan un mayor esfuerzo del controlador lateral, generando deflexiones grandes en las superficies de control. Valores pequeños para k permiten hacer lenta la convergencia del error lateral \tilde{y}^r . Los valores de sintonización de las ganancias son $\Lambda_1 = \text{diag}\{2, 3\}$, $\Lambda_2 = \text{diag}\{5, 8\}$, $K = 1.9$, $k_R = 0.8$ y $k = 0.015$.

La aeronave despegue del aeropuerto de Atizapan de Zaragoza (MMJC), con $\rho = 0.9629kg/m^3$. Durante los primeros 45s, sólo esta activo el control longitudinal y un control PD para el ángulo de guiñada, para que la aeronave siga la pista. En el segundo 45 se implementa el control y el algoritmo de guía lateral propuesto. La Figura 2 (derecha) muestra la trayectoria descrita por la aeronave, así como las líneas de referencia respecto a las cuales se mide el error lateral. En la Figura 3 se observa el comportamiento del error lateral.

Los puntos de referencia son $W_1 = (-46774, 22685)$, $W_2 = (-45974, 22685)$, $W_3 = (-45974, 21885)$ y $W_4 = (-46774, 21885)$. El cambio de secuencia de puntos de referencia se realiza cuando la aeronave se encuentra a $R_{pf} = 150m$ del punto W_{i+1} . La correcta selección de radio R_{pf} se traduce en que la aeronave realice giros coordinados sin exceder sus capacidades aerodinámicas. Notar, en la Figura 3 que el ángulo de alabeo no excede los 40 grados. La Figura 4a muestra al error de orientación del ángulo de guiñada. Se puede observar que el error converge a cero de manera asintótica después de los picos debido a los cambios de referencia. A la derecha se encuentra la gráfica de la condición de giro coordinado.

La figura 5 muestra los errores de las velocidades angulares \tilde{p} y \tilde{r} . La figura 6 presenta las deflexiones de los alerones y el timón. Cabe resaltar el hecho de que las deflexiones requeridas durante el vuelo fueron menores a las deflexiones máximas que permite la aeronave.

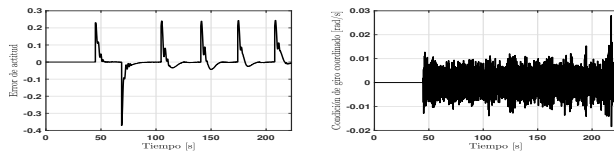


Fig. 4. Error de orientación $(P_a(\tilde{R}_{yb})^V$ (izquierda) y condición de giro coordinado (2).

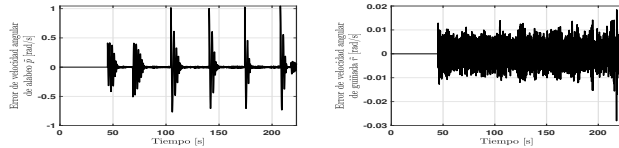


Fig. 5. Error de velocidad rotacional \tilde{p} (izquierda) y \tilde{r} (derecha).

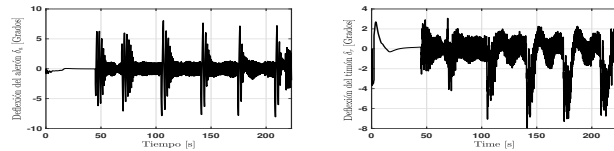


Fig. 6. Deflexión del alerón δ_a (izquierda) y del timón de dirección δ_r (derecha).

5. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un control no lineal y un algoritmo de guía de vuelo para la dinámica lateral-direccional de la aeronave. El control no lineal está basado en un controlador de segundo orden de modos deslizantes, el algoritmo de super-twisting, el cual garantiza convergencia en tiempo finito. El algoritmo de la guía de vuelo ha sido diseñado tomando en cuenta las propiedades geométricas de la orientación del ángulo de guiñada. Las simulaciones numéricas muestran que el algoritmo propuesto lleva el error lateral a cero. El control completo, así como el algoritmo de la guía de vuelo, fueron implementados en Matlab-Simulink y el simulador de vuelo X-Plane.

REFERENCIAS

Ali, S.U., Samar, R., Shah, M.Z., Bhatti, A.I., Munawar, K., and Al-Sggaf, U.M. (2016). Lateral guidance and control of uavs using second-order sliding modes. *Aerospace Science and Technology*, 49, 88–100. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.11.033>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963815003776>.

Chalanga, A., Kamal, S., Fridman, L.M., Bandyopadhyay, B., and Moreno, J.A. (2016). Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6), 3677–3685. doi:10.1109/TIE.2016.2523913.

Coates, E.M. and Fossen, T.I. (2021). Geometric reduced-attitude control of fixed-wing uavs. *Applied Sciences*, 11(7). doi:10.3390/app11073147. URL <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/7/3147>.

Corona-Sánchez, J.J., Guzmán Caso, Ó.R., and Rodríguez-Cortés, H. (2019). A coordinated turn controller for a fixed-wing aircraft. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 233(5), 1728–1740.

Fecko, M. (2006). *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511755590.

Golestani, M. and Mohammadzaman, I. (2015). Pid guidance law design using short time stability approach. *Aerospace Science and Technology*, 43, 71–76. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.02.016>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963815000735>.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall. URL https://books.google.com.mx/books?id=t_d1QgAACAAJ.

Koditschek, D.E. (1989). The application of total energy as a Lyapunov function for mechanical control systems. *Contemporary Mathematics*, 97, 131.

Lee, T. (2015). Global exponential attitude tracking controls on $so(3)$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(10), 2837–2842. doi:10.1109/TAC.2015.2407452.

Luo, Y., Chao, H., Di, L., and Chen, Y. (2011). Lateral directional fractional order (π) α control of a small fixed-wing unmanned aerial vehicles: controller designs and flight tests. *IET control theory & applications*, 5(18), 2156–2167.

Marsden, J.E. and Ratiu, T.S. (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Texts in applied mathematics. Springer.

Morelli, E.A. and Klein, V. (2016). *Aircraft system identification: theory and practice*, volume 2. Sunflyte Enterprises Williamsburg, VA.

Moreno, J.A. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 1035–1040. doi:10.1109/TAC.2012.2186179.

Park, S., Deyst, J., and How, J. (2004). A new nonlinear guidance logic for trajectory tracking. In *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit*, 1–16.

Ren, W. and Beard, R.W. (2004). Trajectory tracking for unmanned air vehicles with velocity and heading rate constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(5), 706–716.

Rosario-Gabriel, I. and Cortés, H.R. (2018). Aircraft longitudinal control based on the lanchester's phugoid dynamics model. In *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 924–929. doi:10.1109/ICUAS.2018.8453350.

Rysdyk, R. (2006). Unmanned aerial vehicle path following for target observation in wind. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(5), 1092–1100. doi:10.2514/1.19101. URL <https://doi.org/10.2514/1.19101>.

Samar, R., Ahmed, S., and Aftab, F. (2007). Lateral control with improved performance for uavs. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(7), 37–42.

Stephan, J., Pfeifle, O., Notter, S., Pinchetti, F., and Fichter, W. (2020). Precise tracking of extended three-dimensional dubins paths for fixed-wing aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 43(12), 2399–2405. doi:10.2514/1.G005240. URL <https://doi.org/10.2514/1.G005240>.

Stevens, B.L., Lewis, F.L., and Johnson, E.N. (2015). *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. John Wiley & Sons.

Thomas, P. (Retrieved February 25, 2022). *X-Plane Blockset*. MATLAB Central File Exchange. URL <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/76028-x-plane-blockset>.

Yamasaki, T., Balakrishnan, S., and Takano, H. (2012). Integrated guidance and autopilot design for a chasing uav via high-order sliding modes. *Journal of the Franklin Institute*, 349(2), 531–558.