

On Disturbance Rejection for a Class of Underactuated Hamiltonian Systems

Fernanda Ramos-García* Jorge Alberto Estopier de la Cruz*
Gerardo Espinosa-Pérez*

* *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, México (e-mail: ferramosgarcia03@gmail.com, jestopierc@gmail.com, gerardoe@unam.mx).*

Resumen: In this work, the problem of additive perturbations is studied for a class of port Control Hamiltonian (PCH) systems. The considered class of Hamiltonian systems includes underactuated systems, which continue to be an important open study area. The starting point of the used methodology begins by considering that a previous tracking control has already made the equilibrium point of the error dynamic system asymptotically stable. The Integral Control (IC) reported in Ortega and Romero (2012) and Ferguson et al. (2017) are implemented in the PCH class system, so that it can reject the constant additive perturbations and conserves the Hamiltonian system structure. The results are compared and tested in a studied case with the system application of the Permanente Magnet Synchronous Motor (PMSM), and the MATLAB Simulink simulations obtained are exposed to compare the performance of both controls.

Keywords: Nonlinear control, Passivity Based Control, Constant Disturbance Rejection, Underactuated Systems, Port Controlled Hamiltonian Systems.

1. INTRODUCCIÓN

La metodología del control basado en pasividad (PBC por sus siglas en inglés) se caracteriza por el moldeado de energía del sistema, lo que le da algunas características de robustez frente a dinámicas pasivas no modeladas. Sin embargo, en aplicaciones prácticas el ruido en las mediciones y entradas es algo inevitable, por lo cual es necesario el diseño de un control robusto frente a perturbaciones aditivas externas.

En el estudio de las perturbaciones en general se dividen en dos áreas, el preservar la estabilidad del sistema perturbado en caso de perturbaciones constantes y el garantizar estabilidad entrada salida (ISS por sus siglas en inglés) del sistema en caso de perturbaciones variantes en el tiempo. El problema de perturbaciones que afectan la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas sigue siendo un problema abierto y de gran interés, como se explica en Ortega et al. (2021). El uso de un lazo de control integral (IC por sus siglas en inglés) para el rechazo de perturbaciones constantes desconocidas se usa en la industria para eliminar algunos efectos que afectan el desempeño de los controladores como el ruido en mediciones, perturbaciones en las entradas sólo por mencionar algunos. Así

mismo, en la academia existen varios resultados donde se enfocan en el uso de una acción integral de control para el rechazo de perturbaciones constantes aditivas. Uno de los principales problemas en el caso del rechazo a perturbaciones constantes se focaliza en el caso del ruido que entra en las coordenadas no actuadas. La robustez del control frente a estas perturbaciones desacopladas constantes se ha resuelto de dos maneras; a través de un cambio de coordenadas para tener una estructura pH deseada como lo describe en Donaire and Junco (2009) y más específicamente en Ortega and Romero (2012), donde la función de energía del sistema en lazo cerrado es la suma de la función de energía de la planta más la del controlador. La segunda metodología se caracteriza por evitar el cambio de coordenadas y proponer una función de energía del controlador que dependa de la planta, similar al marco de trabajo de Control por Interconexión (CbI por sus siglas en inglés), como lo describen en Ferguson et al. (2017).

En este trabajo nos enfocamos en los sistemas que pueden representar a través del formalismo Hamiltoniano y ser modelados a través de sistemas de puerto Hamiltoniano (pH por sus siglas en inglés), los cuales describen la dinámica de una importante clase de sistemas físicos no lineales como lo reportan en Dalsmo and Van Der Schaft (1998). Así mismo, la estructura intrínseca de sistemas de Hamiltonianos controlados por puerto (PCH por sus siglas en inglés) permite observar las interconexiones del

* Authors thank the support given by PAPITT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica): Project DGAPA-UNAM IN118019 and IA105421

sistema, su disipación y el manejo de la energía en el sistema físico. Las metodologías desarrolladas para el diseño de controles para los sistemas PCH han permitido obtener una interpretación física de las entradas de control que nos permitan comprender de manera sencilla los sistemas. Dentro de las metodologías más relevantes esta la Interconexión e Inyección de Amortiguamiento del Control Basado en Pasividad (IDA-PBC por sus siglas en inglés) descrito en Ortega and Garcia-Canseco (2004) y CbI estudiado en Ortega et al. (2008), los cuales se caracterizan por preservar la estructura del sistema.

Existe una clase de sistemas PCH subactuados para la cual se ha resuelto el problema de seguimiento, descritos en Ramos-García et al. (2021). Este trabajo se centra en aplicar los resultados de controles robustos publicados en Ortega and Romero (2012) y Ferguson et al. (2017) a la clase para la cual se resolvió el problema de seguimiento, para que al añadir un lazo de control integral que permitan el rechazo de perturbaciones aditivas y comparar su desempeño.

El trabajo se distribuye de la siguiente forma: en la sección 2 se describe la clase de sistemas PCH con la que se trabaja, una vez que el punto de equilibrio de la dinámica del error sin perturbaciones es asintóticamente estable, se añade un lazo de control integral que permite preservar propiedades de estabilidad a pesar de la presencia de perturbaciones constantes externas. En la sección 3 se describe la formulación del problema, donde se presentan los diferentes casos de perturbaciones acopladas y perturbaciones desacopladas. Finalmente, en la sección 4 se describe el proceso del diseño del controlador para finalmente en la sección 5 ilustrar la metodología a través del caso de estudio del PMSM.

2. LA CLASE DE SISTEMA HAMILTONIANOS

Considere la siguiente forma de sistema Hamiltoniano controlado por puerto con perturbaciones aditivas constantes

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \nabla H(x) + g(x)u + d \quad (1)$$

donde los estados $x \in \mathbb{R}^n$, la matriz de interconexión $J(x) = -J(x)^T$, la matriz de disipación $R(x) = R^T(x) \geq 0$, la función Hamiltoniana $H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y su gradiente $\nabla H(x) = \left[\frac{\partial H(x)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_n} \right]^T$, el vector de entradas $u \in \mathbb{R}^m$, la matriz de incidencias de entradas $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, donde si $m < n$ el sistema es subactuado, mientras que si $m = n$ el sistema es completamente actuado, el vector de perturbaciones constantes se puede separar $d = [d_1 \ d_2]^T$, $d_1 \in \mathbb{R}^m$ y $d_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Considere:

S.1 La función Hamiltoniana es de forma cuadrática

$$H(x) = \frac{1}{2}x^T Qx; \quad Q = Q^T > 0$$

por consiguiente, su gradiente es $\nabla H(x) = Qx$.

S.2 La matriz de incidencias de entradas es constante g y de rango completo por columnas.

S.3 La matriz de disipación se puede separar en una parte constante $R_0 = R_0^T \geq 0$ y otra parte no lineal $R_1(x) = R_1^T(x) \geq 0$.

S.4 La matriz de interconexión es una combinación lineal de matrices antisimétricas constantes por los estados

$$J(x) = J_0 + J_1x_1 + \dots + J_nx_n;$$

donde J_i son matrices antisimétricas constantes y x_i son los estados. En caso de que el estado x_i no aparezca en la matriz de interconexión, la matriz $J_i = 0$.

Considerando las suposiciones anteriores **S.1-S.4** la clase de sistemas PCH nominal con la que se trabaja es de la siguiente forma:

$$\dot{x} = [J(x) - R_0 - R_1(x)] Qx + gu + d \quad (2)$$

La dinámica en coordenadas del error en lazo cerrado con el control proporcional de la salida pasiva $\tilde{u} = -Kg^T Q\tilde{x} + v$ está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= [J(x) - R_0 - gKg^T] Q\tilde{x} + B(x^*)\tilde{x} \\ &\quad - \Gamma(x, x^*) + gv \end{aligned} \quad (3)$$

donde $v \in \mathbb{R}^m$. Se define un cambio de variables $\tilde{x} = x - x^*$, $\tilde{u} = u - u^*$, donde x^* es la solución de las trayectorias admisibles, la cual es una copia del sistema (2), $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$, $K = K^T > 0$, el término $B(x^*)\tilde{x} = [J_1x^* \ \dots \ J_nx^*] \tilde{x}$ es una perturbación desvaneciente en el origen, y $\Gamma(x, x^*) = R_1(x)Qx - R_1(x^*)Qx^*$ es un término incrementalmente pasivo.

Si se cumple que $[R_0 + gKg^T]_{sym} > 0$ y $\Gamma(x, x^*) \geq 0$ es incrementalmente pasiva, el punto de equilibrio de la dinámica en coordenadas del error $\tilde{x} = 0$ es asintóticamente estable.

En la siguiente sección se trabajará a partir de la dinámica en coordenadas del error expresado por (3) con perturbaciones aditivas constantes, con la premisa que el punto de equilibrio del sistema nominal es asintóticamente estable.

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección, se explica la formulación del problema de control resuelta. Usando la teoría de sistemas perturbados, este trabajo considera que el sistema nominal cuenta con puntos de equilibrio asintóticamente estable y se añadirá un lazo de control integral al sistema perturbado para poder rechazar las perturbaciones constantes aditivas, se considera el sistema (3) con perturbaciones constantes, considerando $B(x^*)Q\tilde{x} \equiv 0$, donde es posible expresar la dinámica en coordenadas del error del sistema separando al sistema en los estados actuados y no actuados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_1(x) - R_{01} - gKg^T & J_{12}(x) - R_{012} \\ -J_{12}^T(x) - R_{012}^T & J_2(x) - R_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\tilde{x}_1} H(\tilde{x}) \\ \nabla_{\tilde{x}_2} H(\tilde{x}) \end{bmatrix} \\ &\quad - [\Gamma(x, x^*)] + \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^m$ son los estados actuados del sistema y $\tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ son los estados no actuados y d el término de perturbación constante, que se puede descomponer en las perturbaciones acopladas d_1 y las perturbaciones desacopladas d_2 .

El punto de equilibrio deseado $\tilde{x}^* \in \mathbb{R}^n$ de la dinámica en coordenadas del error es aislado y satisface

$$\tilde{x}^* = \arg \min H(\tilde{x}) \quad (5)$$

lo que implica que el sistema sin perturbaciones y $v = 0$, tiene un punto de equilibrio en \tilde{x}^* . Más aun, con el control previo, si se cumple que $[R_0 + gKg^T]_{sym} > 0$ y $\Gamma(x, x^*) \geq 0$ el punto de equilibrio es asintóticamente estable si la salida y es de estado cero detectable.

El objetivo de control es claro y es preservar la estabilidad del punto de equilibrio deseado a pesar de la presencia de perturbaciones aditivas constantes acopladas o desacopladas.

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El resultado principal se expone a continuación, la ley de control para el sistema (4) tal se resuelva el problema formulado en la sección previa. El resultado se separa en dos partes, primero el rechazo a perturbaciones aditivas acopladas y posteriormente el rechazo a perturbaciones aditivas desacopladas.

4.1 Perturbación Acoplada

En la siguiente proposición, se garantiza la estabilidad del punto de equilibrio del sistema con perturbaciones aditivas constantes acopladas.

Dado el sistema con una perturbación aditiva, constante, acoplada a la entrada para el sistema (4), con $d_2 = 0$.

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - R_0 - gKg^T]Q\tilde{x} + B(x^*)Q\tilde{x} - \Gamma(x, x^*) + g(v + d_1) \quad (6)$$

$$y = g^T Q\tilde{x} \quad (7)$$

donde $[R_0 + gKg^T]_{sym} > 0$, $\Gamma(x, x_*) \leq 0$ y $y \in \mathbb{R}^m$ es la salida pasiva del sistema.

Proposición 1:

El sistema (6) en lazo cerrado con el control integral

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= K_i y \\ v &= -\eta \end{aligned} \quad (8)$$

donde $K_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, el punto de equilibrio en $[\tilde{x} \ \eta]^T = [0 \ d_1]^T$ es asintóticamente estable.

Prueba 1:

El sistema (6) con el control (8) en lazo cerrado esta dado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J(x) - R_0 - gKg^T]Q\tilde{x} + \Gamma(x, x^*) + g(-\eta + d) \\ -k_i g^T Q\tilde{x} \end{bmatrix}$$

Sea $V(\tilde{x}, \eta)$ una función candidata de Lyapunov dada por la suma de la función de energía de la planta y del controlador

$$V(\tilde{x}, \eta) = \frac{1}{2}\tilde{x}Q\tilde{x} + \frac{1}{2}(\eta - d_1)^\top K_i^{-1}(\eta - d_1) \quad (9)$$

La derivada de la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}, \eta) &= \tilde{x}^\top Q\dot{\tilde{x}} + (\eta - d_1)^\top K_i^{-1}\dot{\eta} \\ &= -\tilde{x}^\top Q[R_0 + gKg^T]Q\tilde{x} - \tilde{x}^\top Q\Gamma(x, x^*) \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado es estable. A través de argumentos del principio de invarianza de LaSalle se garantiza estabilidad asintótica del punto de equilibrio. \square

4.2 Perturbación no acoplada con cambio de coordenadas

Considere el sistema PH si disipación no lineal sólo con perturbaciones constantes desacopladas $d_1 = 0$, de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= [J(x) - R_0 - gKg^T]Q\tilde{x} + B(x^*)Q\tilde{x} \\ &\quad + gv + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ y &= g^T Q\tilde{x} \end{aligned} \quad (10)$$

Proposición 2:

El sistema (10) con la ley de control integral

$$\begin{aligned} v &= \hat{u}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= K_i[\nabla_2 H(\psi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \zeta), \tilde{x}_2)] \end{aligned} \quad (11)$$

donde, $\hat{u}, \psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, el punto de equilibrio es asintóticamente estable si existen los mapeos \hat{u}, ψ tal que, ψ sea un difeomorfismo:

$$\text{rank}\{(\nabla_1 \psi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \zeta), \tilde{x}_2)\} = m \quad (12)$$

además cumpla con la ecuación de la dinámica de matching (DyM)

$$\begin{aligned} \zeta &= -F_{21}(x)\nabla H(x) - F_{22}(x)\nabla_2 H(x) \\ &\quad + F_{21}(\psi(\chi), x_2)[\nabla_1 H(\psi(\chi), x_2)] \\ &\quad + F_{22}(\psi(\chi), x_2)[\nabla_2 H(\psi(\chi), x_2)] \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\chi = [\tilde{x} \ \zeta]^T$,

$$\begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(x) - R_{01} - gKg^T & J_{12}(x) - R_{012} \\ -J_{12}^\top(x) - R_{012}^\top & J_2(x) - R_{02} \end{bmatrix}$$

y la señal de control sea independiente de la perturbación d_2 por lo que

$$\nabla_{z_2} \psi(\chi) d_2 = 0 \quad (14)$$

Prueba 2:

El sistema (10) expresado en las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \zeta) \\ z_2 &= \tilde{x}_2 \\ z_3 &= \zeta \end{aligned} \quad (15)$$

en lazo cerrado con el control (11) toma la forma

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} F(z_1, z_2) \\ [0 \ K_i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -K_i \\ 0 \end{bmatrix} \nabla V(z) \quad (16)$$

donde la función Hamiltoniana del sistema

$$V(z) := [z_1 \ z_2] Q [z_1 \ z_2]^\top + \frac{1}{2} (z_3 - d_2)^\top K_i^{-1} (z_3 - d_2) \quad (17)$$

El sistema perturbado separado toma la forma, expresando la Γ ahora en términos de \tilde{x} y x^* sin afectar su propiedad de pasividad incremental

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= F_{11}(x) \nabla_{\tilde{x}_1} H(\tilde{x}) + F_{12}(x) \nabla_{\tilde{x}_2} H(\tilde{x}) + g_1 \hat{u} \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= F_{21}(x) \nabla_{\tilde{x}_1} H(\tilde{x}) + F_{22}(x) \nabla_{\tilde{x}_2} H(\tilde{x}) + d_2 \end{aligned}$$

De $\dot{z}_2 = \dot{\tilde{x}}_2$ se obtiene

$$\psi(\chi) = \tilde{x}_1 + Q_1^{-1} F_{21}^\dagger(x) \zeta \quad (18)$$

donde F_{21}^\dagger es la pseudo inversa de F_{21} . Por otro lado, el gradiente del mapeo $\psi(\chi)$ es

$$\nabla \psi(\chi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi(\chi)}{\partial \tilde{x}_1} \\ \frac{\partial \psi(\chi)}{\partial \tilde{x}_2} \\ \frac{\partial \psi(\chi)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \zeta Q_1^{-1} \frac{\partial F_{21}^\dagger(x)}{\partial \tilde{x}_1} \\ 0 \\ Q_1^{-1} F_{21}^\dagger \end{bmatrix} \quad (19)$$

sustituyendo (19) en la igualdad para \dot{z}_1 entre (15) y el sistema (16), se obtiene el mapeo \hat{u}

$$\hat{u} = g^\dagger \alpha \mu \quad (20)$$

donde g^\dagger es la pseudo inversa izquierda y

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\frac{\partial \psi(\chi)}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \psi(\chi)}{\partial \tilde{x}_1}^\top} \\ \mu &= \left(\zeta Q_1^{-1} \frac{\partial F_{21}^\dagger(x)}{\partial \tilde{x}_1} \right) (F_{11}(x) Q_1 \tilde{x}_1) \\ &\quad + \left(\zeta Q_1^{-1} \frac{\partial F_{21}^\dagger(x)}{\partial \tilde{x}_1} \right) (F_{12}(x) Q_2 \tilde{x}_2) \\ &\quad + Q_1^{-1} F_{21}^\dagger(x) K_i Q_2 \tilde{x}_2 \end{aligned}$$

Al obtener estos mapeos, el sistema es MDICS (Matched Disturbance Integral Controlled System) equivalente. Por lo que al derivar la función de energía a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{V} \leq 0$ y usando el principio de invarianza de LaSalle se garantiza la estabilidad asintótica del punto de equilibrio. \square

4.3 Perturbaciones no acopladas sin cambio de coordenadas

En esta sección se trabaja con el resultado de Ferguson et al. (2017) donde se diseña el control integral sin ser necesario el cambio de coordenadas pero añadiendo a la función de energía un término cruzado entre la planta y el control.

Proposición 3:

Considere el sistema (10) con la entrada de control

$$\begin{aligned} v &= (J_{11}(x) - R_{01}) \nabla_{\tilde{x}_1} H_c(E^T \tilde{x}_1 - \zeta) \\ \dot{\zeta} &= E^T J_{12}(x) \nabla_{\tilde{x}_2} H \end{aligned} \quad (21)$$

donde $E \in \mathbb{R}^{m \times p}$ es una matriz constante de rango completo y $H_c(\tilde{x}_1, \zeta) = \frac{1}{2} \tilde{x}_1^\top E E^\top \tilde{x}_1 - \zeta^\top E^\top \tilde{x}_1 + \zeta^\top \zeta$ es una función convexa en $z = E^\top \tilde{x}_1 - \zeta$.

Prueba 3:

El sistema en lazo cerrado del sistema (10) con la ley de control (21)

$$[\dot{\chi}] = \begin{bmatrix} J(x) - R_0 - gKg^\top \\ [0 \ E^\top J_{12}(x)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -J_{12}^\top(x) E \\ 0 \end{bmatrix} \nabla H_{cl} - \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\chi = [\tilde{x} \ \zeta]^\top$, y la función Hamiltoniana del sistema en lazo cerrado es $H_{cl}(\tilde{x}, \zeta) = H(\tilde{x}) + H_c(\tilde{x}_1, \zeta) : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = H_{cl}(\chi) - (\chi^*)^\top \nabla H_{cl}(\chi^*) - H_{cl}(\chi^*) \quad (22)$$

Donde su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema.

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{\partial V(\chi)}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} + \frac{\partial V(\chi)}{\partial \zeta} \dot{\zeta} \\
 &= \frac{\partial H_{cl}(\chi)}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} - \frac{\partial H_{cl}(\chi^*)}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}}^* \\
 &\quad + \frac{\partial H_c(\tilde{x}_1, \zeta)}{\partial \zeta} \dot{\zeta} - \frac{\partial H_c(\tilde{x}_1^*, \zeta^*)}{\partial \zeta} \dot{\zeta}^* \\
 &\leq -\nabla_{\tilde{x}_1}^\top H_{cl}(R_{01} + gKg^\top) \nabla_{\tilde{x}_1} H_{cl} \leq 0 \quad (23)
 \end{aligned}$$

Como (23) es negativo semi definido, solo se puede garantizar estabilidad del punto de equilibrio, sin embargo como V es estrictamente convexo, existe un conjunto compacto y como $R_{01} + gKg^\top > 0$, con el principio de invarianza de LaSalle se garantiza que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

□

5. CASO DE ESTUDIO

En esta sección, se presenta el control descrito en la sección anterior para el caso de estudio del motor síncrono de imanes permanentes, considerando el par de carga como una perturbación no acoplada. En este trabajo se considera el modelo del sistema PMSM en el marco dq presentado en Meisel (1984).

Considere el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el marco dq es de la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{R_1}{L_1}x_1 + \frac{n_p}{J_m}x_2x_3 + u_d \quad (24) \\
 \dot{x}_2 &= -\frac{R_2}{L_2}x_2 - \frac{n_p}{J_m}(x_1 + \phi)x_3 + u_q \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{n_p}{L_1}x_1x_2 + \frac{n_p}{L_2}(x_1 + \phi)x_2 - \frac{r_m}{J_m}x_3 - \tau_L
 \end{aligned}$$

donde los estados $x_1 = L_1 i_d$, $x_2 = L_2 i_q$ son los flujos electromagnéticos en el eje d y q respectivamente, el tercer estado $x_3 = J_m \omega$ es el momentum del rotor. Los parámetros se obtuvieron de Shah et al. (2014) donde $L_1 = 3,8$ [mH], $L_2 = 3,8$ [mH] y $R_1 = 0,225$ [Ω], $R_2 = 0,225$ [Ω] son las inductancias y resistencias, $\phi = 0,17$ [Wb] es el flujo magnético generado por los imanes permanentes, $n_p = 3$ son el par de polos, $J_m = 0,012$ [Kg m²] es la inercia del rotor y $r_m = 0,00063$ [Ω] es la resistencia mecánica equivalente del motor, con potencia nominal 1 [KW] y par de carga nominal de 1 [Nm]. Las señales de entradas u_d , u_q están dados por el voltaje en el eje d y q , finalmente el par de carga está dado por τ_L , el cual se considerará como perturbación no acoplada. La simulación se realizó en Simulink MATLAB a con el método numérico Runge-Kutta con paso fijo de $h = 10^{-5}$.

El perfil de velocidad implementado se puede observar en la Figura 1. Así mismo, en la misma figura se muestra el par de carga, el cual será considerado como perturbación no acoplada constante, donde el par de carga cambia en

escalones para observar el comportamiento del sistema ante diferentes perturbaciones constantes.

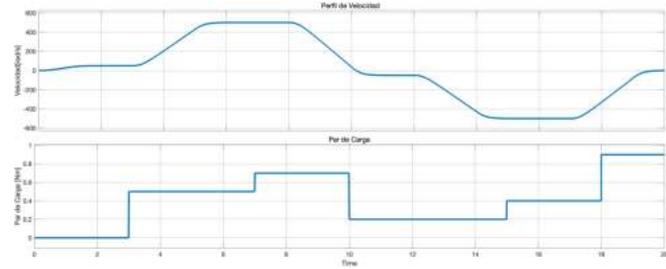


Figura 1. Perfil de Velocidad y Par de Carga del Motor

El perfil de velocidad mostrado anteriormente se puede apreciar a través del comportamiento deseado para el estado deseado x_{3^*} en la Figura 2. En la misma figura se ilustra el estado x_3 de los dos controladores, el de cambio de coordenadas (cc) y el de sin cambio de coordenadas (sc) para el rechazo de perturbaciones no acopladas, donde se puede apreciar que para ambos controles, el estado x_3 tiende al estado x_{3^*} .

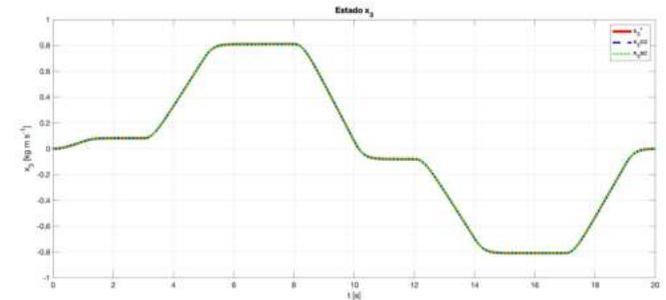


Figura 2. Estado x_3^* y Estado x_3 del PMSM con el control del cambio de coordenadas y control sin cambio de coordenadas

En la Figura 3, se muestran los errores de seguimiento de los estados del motor y finalmente, en la Figura 4, se exponen las entradas de los dos controles comparadas, estas entradas son los voltajes en el marco dq para el sistema.

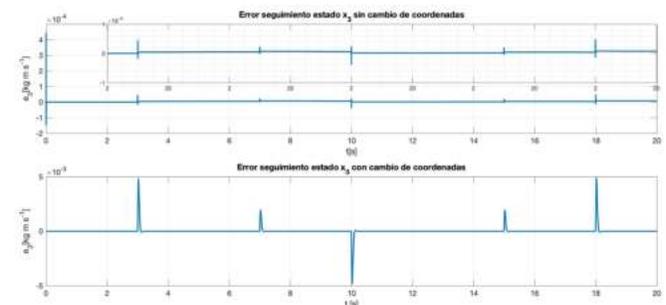


Figura 3. Error de Seguimiento de los estados

Como se puede observar a través de las gráficas de las simulaciones, ambos controles realizan el seguimiento

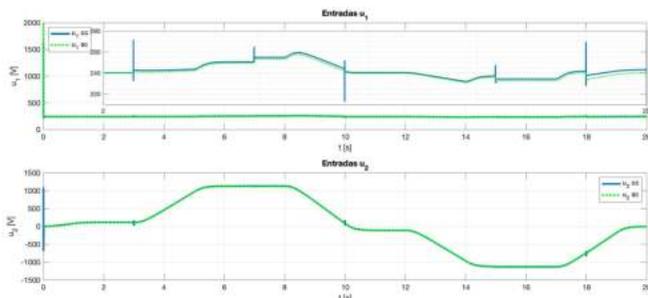


Figura 4. Señales de voltaje de entradas de Control de los controles para rechazo de perturbaciones no acopladas con y sin cambios de coordenadas

de la velocidad angular. Sin embargo, a través de la Figura 3 se puede observar que el control sin cambio de coordenadas presenta un menor transitorio cuando se presentan los cambios en el par de carga. Esto mismo, se refleja en la Figura 4, ya que se presentan transitorios mayores en las entradas de control cuando se presenta el cambio en el par de carga.

6. CONCLUSIONES

A través de este trabajo se presentó el diseño del controlador publicado en Ortega and Romero (2012) y Ferguson et al. (2017) para una clase de sistema PCH subactuado que previamente tiene un control de seguimiento, el cual es capaz de rechazar perturbaciones desconocidas constantes. El primero control presentado está diseñado para rechazar perturbaciones acopladas, mientras que el segundo y tercer controlador se enfoca en el rechazo de perturbaciones desacopladas. Estos últimos están basados en diferentes metodologías que nos permiten hacer una comparación en este trabajo a través de la aplicación presentada, el motor de inducción. Sobre el caso de estudio se comparó el desempeño del los controles robustos ante perturbaciones desacopladas a través de una simulación realizada en Simulink MATLAB donde el par de carga se puede considerar como la perturbación desacoplada a rechazar. Ambos controles, realizaron satisfactoriamente el seguimiento de la velocidad a pesar de presentarse perturbaciones constantes no acopladas sin embargo, el control sin cambio de coordenadas presentó transitorios menores, lo que resulta más atractivo para su implementación.

REFERENCIAS

Dalmo, M. and Van Der Schaft, A. (1998). On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(1), 54–91.

Donaire, A. and Junco, S. (2009). On the addition of integral action to port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 45(8), 1910–1916.

Ferguson, J., Donaire, A., and Middleton, R.H. (2017). Integral control of port-hamiltonian systems: Nonpas-

sive outputs without coordinate transformation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11), 5947–5953.

Meisel, J. (1984). *Principles of electromechanical-energy conversion*. Krieger Publishing Company.

Ortega, R. and Garcia-Canseco, E. (2004). Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of control*, 10(5), 432–450.

Ortega, R. and Romero, J.G. (2012). Robust integral control of port-hamiltonian systems: The case of non-passive outputs with unmatched disturbances. *Systems & Control Letters*, 61(1), 11–17.

Ortega, R., Romero, J.G., Borja, P., and Donaire, A. (2021). *Disturbance Rejection in Port-Hamiltonian Systems*, 153–195. doi:10.1002/9781119694199.ch8.

Ortega, R., Van Der Schaft, A., Castanos, F., and Astolfi, A. (2008). Control by interconnection and standard passivity-based control of port-hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 53(11), 2527–2542.

Ramos-García, F., Espinosa-Pérez, G., and Avila-Becerril, S. (2021). On the trajectory tracking control of hamiltonian systems.

Shah, D., Espinosa-Pérez, G., Ortega, R., and Hilairret, M. (2014). An asymptotically stable sensorless speed controller for non-salient permanent magnet synchronous motors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(4), 644–668.