

Modified computed torque control for trajectory tracking of a 8 DOF mobile manipulator robot. ^{*}

J. G. Perez-Fuentevilla ^{*} A. B. Morales-Diaz ^{**}
A. Rodriguez-Angeles ^{*}

^{*} *Departamento de ingeniería eléctrica, CINVESTAV-IPN, Ciudad de México, México (e-mail: jorge.perezf@cinvestav.mx, aangeles@cinvestav.mx).*

^{**} *Programa de robótica y manufactura avanzada, CINVESTAV-Salttillo, Ramos Arizpe, México (e-mail: america.morales@cinvestav.edu.mx)*

Abstract: In this paper, a nonlinear controller based on a computed torque control scheme is proposed for solving the trajectory tracking problem of a 8 DOF mobile manipulator robot, considering a (2,0) type differential mobile robot that satisfy its nonholonomic constraint. A stability analysis using Lyapunov method is presented; semiglobal, uniformly ultimately bounded (UUB) stability is proved. Numeric simulation with a circular parametric trajectory using KUKA youBot model is shown. Results show an effective convergence and good control performance.

Keywords: Mobile manipulator robot, Nonholonomic constraint, Computed torque control, Trajectory tracking, KUKA youBot.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los robots manipuladores móviles (RMM) se ha vuelto de interés debido a las posibilidades en el ramo industrial Zhou et al. (2022), en temas de seguridad Saitoh et al. (1995), de servicios Chi-wu and Ke-fei (2009), en sistemas cooperativos Sugar and Kumar (1999) o incluso en algo tan cotidiano como abrir una puerta, Nagatani and Yuta (1995).

Una de las ventajas en este tipo de robots es el alcance que se puede obtener a diferencia de un robot manipulador fijo; además, la redundancia de los RMM permite alcanzar o tomar posturas en algún punto del espacio imposibles para un robot de base fija.

Se han estudiado diversas técnicas de control para el seguimiento de trayectoria en este tipo de robots. Hay trabajos en los que se añade una compensación robusta tomando como base un controlador PD clásico Chi-wu and Ke-fei (2009), enfoques más sofisticados en donde se diseña un sistema de seguimiento adaptable basado en redes neuronales Wang et al. (2014), o leyes de control basada en un esquema ADRC Ningyue et al. (2015).

En este trabajo se propone un controlador por par calculado, añadiendo términos de corrección sobre el error

^{*} Se agradece el apoyo del CONACYT mediante el proyecto CB-2017-2018-A1-S-26123.

de posición y compensación de gravedad para resolver el problema de seguimiento, tomando como modelo el robot KUKA youBot, un RMM pensado con fines educativos y de investigación que cuenta con una base móvil de tipo omnidireccional —el cual se opera como una base diferencial— y un manipulador de 5 GDL, Bischoff et al. (2011). Se presenta un análisis donde se garantiza estabilidad semiglobal y UUB del controlador, y se dan resultados de simulación.

La motivación se encuentra en considerar la base tipo diferencial, lo cual resulta en tener un sistema subactuado no tan fácil de controlar.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En este caso, se define una trayectoria deseada para la posición cartesiana y orientación de la plataforma móvil (x, y, θ) , y una diferente para el efector final que considera las coordenadas en el espacio y dos orientaciones medidas desde el marco inercial $(x_{ef}, y_{ef}, z_{ef}, \zeta_{ef}, \psi_{ef})$. Se considera que ambas trayectorias comparten el espacio de trabajo, es decir, que son alcanzables y la cinemática inversa del robot tiene solución.

Se considera la configuración del robot mostrada en la Figura 1, note que el móvil se considera de tipo unicycle y por lo tanto está gobernado por el modelo cinemático (1).

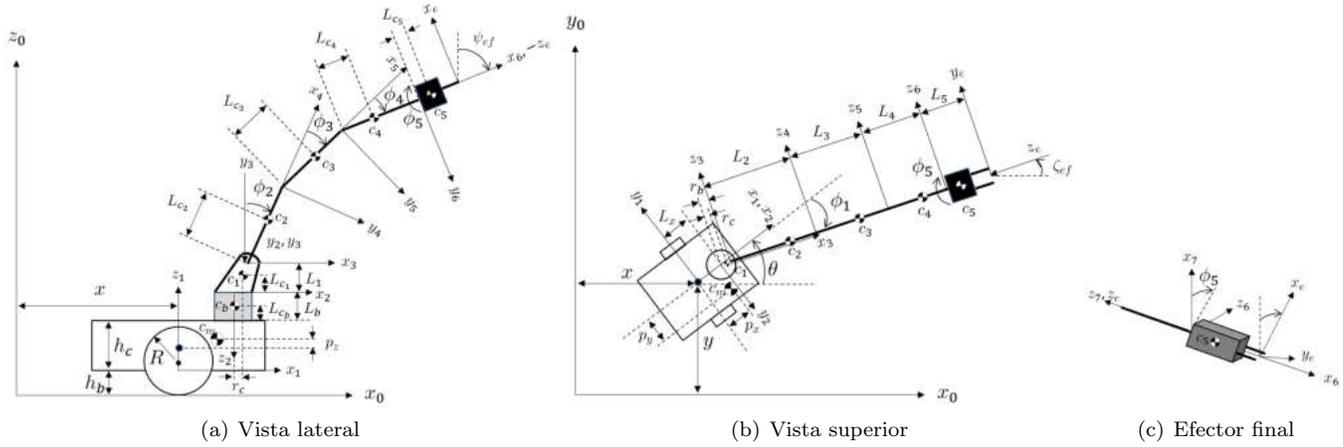


Figura 1. Configuración del robot.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\quad (1)$$

x, y son las coordenadas del móvil en el plano x_0, y_0 ; θ es la orientación del móvil con respecto a x_0 ; v, ω son las velocidades longitudinal y angular, respectivamente.

Es bien sabido que este tipo de plataformas móviles satisfacen la restricción no holonómica:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Definimos los parámetros:

- $m_m, m_b, m_i, i = 1, \dots, 5$: Masas de la base móvil, del eslabón fijo, y del i -ésimo eslabón del manipulador.
- h_b, h_c : Distancia desde el piso hasta la base móvil, y altura del móvil.
- R : Radio de las ruedas.
- p_x, p_y, p_z : Distancia al centro de masa del móvil.
- L : Distancia medida desde el eje longitudinal del móvil hasta una de sus ruedas.
- $L_i, i = b, 1, \dots, 5$: Longitud del i -ésimo eslabón.
- $L_{c_i}, i = b, 1, \dots, 5$: Distancia al centro de masa del i -ésimo eslabón.
- r_b, r_c : Radio medido desde el centro del eslabón fijo a la base del segundo eslabón, y al centro de masa del primer eslabón, respectivamente.
- L_x : Distancia medida desde el centroide del móvil hasta el centroide del eslabón fijo.
- $I_i = \text{diag}(I_{ixx}, I_{iyy}, I_{izz}), i = m, b, 1, \dots, 5$: Tensores de inercia del móvil y del i -ésimo eslabón.
- b_{q_i} : Coeficiente de fricción viscosa relacionada con la coordenada generalizada q_i .

El vector de coordenadas generalizadas se define como $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4 \ \phi_5]^T$.

2.1 Cinemática directa.

El vector de posición que relaciona el marco de referencia del efector final con el marco inercial es

$${}^0\mathbf{O}_e = [x_{ef} \ y_{ef} \ z_{ef}]^T \quad (3)$$

$$\begin{aligned}x_{ef} &= x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin (\phi_2 + \phi_3) \\ &\quad + (L_4 + L_5) \sin (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \cos (\phi_1 - \theta) \\ y_{ef} &= y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin (\phi_2 + \phi_3) \\ &\quad + (L_4 + L_5) \sin (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \sin (\phi_1 - \theta) \\ z_{ef} &= h_b + h_c + L_1 + L_b + L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos (\phi_2 + \phi_3) \\ &\quad + (L_4 + L_5) \cos (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)\end{aligned}$$

2.2 Cinemática inversa.

De la Figura 1, las orientaciones del efector final son:

$$\theta - \phi_1 = \zeta_{ef} \quad (4)$$

$$\phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \psi_{ef} \quad (5)$$

donde

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \quad (6)$$

Podemos definir una orientación deseada ζ_{efd} en (4) y obtener ϕ_1 . Igualmente una posición deseada para el efector final $[x_{efd} \ y_{efd} \ z_{efd}]^T$ en (3) y, en adición con (5) (usando una orientación deseada ψ_{efd}), se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales que se puede resolver numéricamente para ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 . Finalmente, la orientación restante del efector final está directamente afectada por ϕ_5 , por lo que siempre podemos definir una función deseada dependiente del tiempo.

2.3 Modelo dinámico.

El modelo dinámico completo del sistema está dado por

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (7)$$

donde $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz de Coriolis, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es el vector de fuerzas gravitacionales, $\mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el vector de fuerzas de fricción y $\boldsymbol{\tau} = [F_x \ F_y \ \tau_c \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5]^T$ es el vector de fuerzas y torques del sistema, con F_x y F_y las fuerzas traslacionales del móvil sobre x_0 y y_0 respectivamente, τ_c el torque con el que gira el móvil respecto a su centro, y τ_j , $j = 1, \dots, 5$ los torques del j -ésimo eslabón. En la Figura 2 se muestran todas las fuerzas y torques presentes en la plataforma móvil.

El problema del modelo (7) es que no cumple con la restricción no holonómica (2). Por lo que se hace un mapeo del modelo cinemático (1) incorporando la restricción al modelo completo con una transformación de coordenadas $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta}$, vea Portillo Vélez (2013), donde $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5 \ \eta_6 \ \eta_7]^T = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \dot{\phi}_3 \ \dot{\phi}_4 \ \dot{\phi}_5]^T$ es un nuevo vector de estados, $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ una matriz de rango completo e invertible que genera el espacio nulo de $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, una matriz que se obtiene de reescribir la restricción (2) en la forma $\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$, por tanto se satisface $\mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = 0$. Así,

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = [\sin \theta \ -\cos \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Existe una relación de torques y fuerzas entre el vector $\boldsymbol{\tau}$ y un nuevo vector de torques reducido $\boldsymbol{\tau}_{\text{red}} = [\tau_i \ \tau_d \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5]^T$ donde τ_i y τ_d son los torques a nivel de rueda del móvil. Esta relación se escribe como $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_{\text{red}}$, a $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ se le llama *matriz de motorización*.

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos \theta & \frac{1}{R} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Finalmente, el modelo que satisface la restricción (2) es:

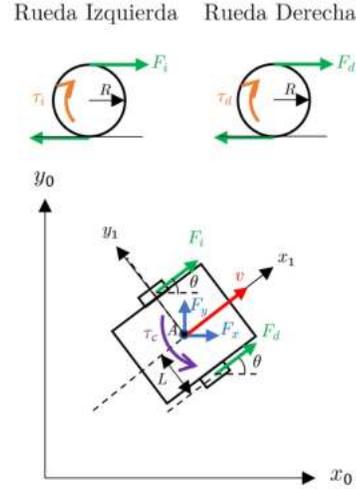


Figura 2. Descripción de fuerzas y torques en la plataforma móvil.

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\boldsymbol{\eta} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) \quad (10) \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta}$$

Donde

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \\ \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_{\text{red}}$$

3. ESTRATEGIA DE CONTROL.

El problema de seguimiento de trayectoria para un robot diferencial se puede resolver considerando un robot virtual en un esquema líder-seguidor Infante et al. (2019); Gutiérrez et al. (2017).

Sean $\mathbf{q}_d = [q_{1d} \ q_{2d} \ q_{3d} \ q_{4d} \ q_{5d} \ q_{6d} \ q_{7d} \ q_{8d}]^T = [x_d \ y_d \ \theta_d \ \phi_{1d} \ \phi_{2d} \ \phi_{3d} \ \phi_{4d} \ \phi_{5d}]^T$ los valores deseados para las posiciones; y $\boldsymbol{\eta}_d = \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_d)\dot{\mathbf{q}}_d =$

$[\eta_{1d} \ \eta_{2d} \ \eta_{3d} \ \eta_{4d} \ \eta_{5d} \ \eta_{6d} \ \eta_{7d}]^T = [v_d \ \dot{\theta}_d \ \dot{\phi}_{1d} \ \dot{\phi}_{2d} \ \dot{\phi}_{3d} \ \dot{\phi}_{4d} \ \dot{\phi}_{5d}]^T$ los valores deseados de velocidad. Se toma en cuenta que todas las trayectorias de referencia son funciones *suaves* y al menos dos veces diferenciables con respecto al tiempo.

Se definen los errores de seguimiento en el marco local del robot, con respecto al robot virtual,

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} e_{r_x} \\ e_{r_y} \\ e_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

De manera general, se tienen los errores en los estados:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} = [e_x \ e_y \ e_\theta \ e_{\phi_1} \ e_{\phi_2} \ e_{\phi_3} \ e_{\phi_4} \ e_{\phi_5}]^T \\ \mathbf{e}_\eta = \eta_d - \eta = [e_v \ \dot{e}_\theta \ \dot{e}_{\phi_1} \ \dot{e}_{\phi_2} \ \dot{e}_{\phi_3} \ \dot{e}_{\phi_4} \ \dot{e}_{\phi_5}]^T \end{cases} \quad (12)$$

Se considera la ley de control

$$\begin{aligned} \tau_{\text{red}} = & \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) [\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) + \dot{\eta}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_\eta \\ & + \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \end{aligned} \quad (13)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{B}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) &= \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \eta, \\ \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) &= \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) &= [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7]^T \\ u_1 &= k_1 e_{r_x}, \quad u_2 = k_2 v_d \frac{\sin e_\theta}{e_\theta} e_{r_y} + k_3 e_\theta \\ u_3 &= k_4 e_{\phi_1}, \quad u_4 = k_5 e_{\phi_2}, \quad u_5 = k_6 e_{\phi_3} \\ u_6 &= k_7 e_{\phi_4}, \quad u_7 = k_8 e_{\phi_5} \end{aligned}$$

Se considera que las trayectorias de referencia para el móvil v_d y $\dot{\theta}_d$ cumplen con la restricción no holonómica.

Se consideran las ganancias

$$k_i > 0, \quad i = 1, \dots, 8.$$

$\mathbf{K}_p \triangleq \text{diag}(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}, k_{p_4}, k_{p_5}, k_{p_6}, k_{p_7}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ es una matriz diagonal definida positiva, $\mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d)$ es un vector que corrige el error a nivel de posición y $\mathbf{G}^*(\mathbf{q})$ es el término de compensación de gravedad.

3.1 Dinámica en lazo cerrado.

Sustituyendo el control (13) en (10), se obtiene la ecuación en lazo cerrado:

$$\dot{\mathbf{e}}_\eta + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_\eta + \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) = 0 \quad (14)$$

De (14), se pueden extraer las últimas 5 ecuaciones

$$\ddot{e}_{\phi_i} + k_{p_{i+2}} \dot{e}_{\phi_i} + k_{i+3} e_{\phi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (15)$$

(15) se trata de un conjunto de 5 ecuaciones lineales y desacopladas correspondientes a los eslabones del manipulador, por lo que, haciendo las ganancias $k_{p_{i+2}}, k_{i+3} > 0$ obtenemos estabilidad asintótica para e_{ϕ_i} y \dot{e}_{ϕ_i} , es decir, las posiciones y velocidades del manipulador. Esto se puede extrapolar para un manipulador de n GDL.

Para la parte correspondiente al móvil, se tiene el conjunto de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \dot{e}_v + k_{p_1} e_v + k_1 e_{r_x} = 0 \\ \ddot{e}_\theta + k_{p_2} \dot{e}_\theta + k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} e_{r_y} + k_3 e_\theta = 0 \end{cases} \quad (16)$$

3.2 Dinámica de los errores.

Definimos los errores

$$\mathbf{e}_\gamma = [e_{r_x} \ e_{r_y} \ e_\theta \ \dot{e}_\theta \ e_v]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{e}_\mu = [e_{\phi_1} \ \dot{e}_{\phi_1} \ e_{\phi_2} \ \dot{e}_{\phi_2} \ e_{\phi_3} \ \dot{e}_{\phi_3} \ e_{\phi_4} \ \dot{e}_{\phi_4} \ e_{\phi_5} \ \dot{e}_{\phi_5}]^T \quad (18)$$

Donde (17) es el vector de errores correspondientes a la base móvil, y (18) es el vector de errores correspondientes al manipulador.

Definimos el vector completo del error como sigue

$$\mathbf{e}_\Gamma = [\mathbf{e}_\gamma \ \mathbf{e}_\mu]^T \quad (19)$$

Tomando en cuenta la definición de los errores en (11), (12) y el modelo cinemático (1), se tiene:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{x}_d + (e_v - v_d) \cos(\theta_d - e_\theta) \\ \dot{e}_y = \dot{y}_d + (e_v - v_d) \sin(\theta_d - e_\theta) \\ \dot{e}_{r_x} = v_d \cos(e_\theta) + (\dot{\theta}_d - \dot{e}_\theta) e_{r_y} + e_v - v_d \\ \dot{e}_{r_y} = (\dot{e}_\theta - \dot{\theta}_d) e_{r_x} + v_d \sin(e_\theta) \\ \dot{e}_\theta = e_{\eta_2} \\ \dot{e}_{\phi_i} = e_{\eta_{i+2}}, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases} \quad (20)$$

Las ecuaciones (15), (16) y (20) conforman lo que llamamos dinámica de los errores.

Debido a la linealización que se logró en el lazo cerrado para la parte del manipulador, solo es necesario demostrar la estabilidad para la parte del móvil, es decir, para \mathbf{e}_γ .

3.3 Análisis de estabilidad.

Propóngase la función candidata de Lyapunov

$$V(\mathbf{e}_\Gamma) \triangleq \frac{1}{2} k_1 (e_{r_x}^2 + e_{r_y}^2) + \frac{1}{2} (k_3 e_\theta^2 + \dot{e}_\theta^2 + e_v^2) \quad (21)$$

Derivando respecto al tiempo y usando (20) y (16)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}_\Gamma) = & k_1 v_d e_{r_x} (\cos(e_\theta) - 1) + k_1 v_d e_{r_y} \sin(e_\theta) \\ & - k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} - k_{p_2} \dot{e}_\theta^2 - k_{p_1} e_v^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Luego, se quiere demostrar

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}_R) \leq & \|k_1 v_d e_{r_x} (\cos(e_\theta) - 1)\| + \|k_1 v_d e_{r_y} \sin(e_\theta)\| \\ & + \left\| k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} \right\| - \|k_{p_2} \dot{e}_\theta^2\| - \|k_{p_1} e_v^2\| \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \|e_{r_x}\| &\leq \|\mathbf{e}_R\|, & \|e_{r_y}\| &\leq \|\mathbf{e}_R\| \\ \|\dot{e}_\theta\| &\leq \|\mathbf{e}_R\|, & \|e_v\| &\leq \|\mathbf{e}_R\| \end{aligned}$$

Se acota (23) término a término de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_1 \|v_d\| \|e_{r_x}\| \|\cos(e_\theta) - 1\| &\leq 2k_1 \|v_d\| \|\mathbf{e}_R\| \\ k_1 \|v_d\| \|e_{r_y}\| \|\sin(e_\theta)\| &\leq k_1 \|v_d\| \|\mathbf{e}_R\| \\ k_2 \left\| v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} \right\| &\leq k_2 \|v_d\| \|\mathbf{e}_R\|^2 \\ k_{p_2} \|\dot{e}_\theta^2\| &\leq k_{p_2} \|\mathbf{e}_R\|^2 \\ k_{p_1} \|e_v^2\| &\leq k_{p_1} \|\mathbf{e}_R\|^2 \end{aligned}$$

De tal forma que (23) se puede re-escribir como sigue:

$$\dot{V}(\mathbf{e}_R) \leq 3k_1 \|v_d\| \|\mathbf{e}_R\| + (k_2 \|v_d\| - k_{p_2} - k_{p_1}) \|\mathbf{e}_R\|^2 \quad (24)$$

Se pueden establecer condiciones para asegurar que $\dot{V}(\mathbf{e}_R) \leq 0$. De esta forma, se consigue una *estabilización semiglobal* en un conjunto compacto que se puede hacer arbitrariamente grande al ajustar los valores de las ganancias (Khalil, 2015, pp. 198-199), donde el sistema será estable, aunque de forma acotada.

Condición 1. Se pueden elegir ganancias tales que siempre se cumpla

$$k_2 \|v_d\| - k_{p_2} - k_{p_1} < 0 \quad (25)$$

Condición 2. Es necesario que el término de la derecha en (24) sea mayor que el término de la izquierda en magnitud, esto genera un intervalo para la norma del vector del error completo

$$\|\mathbf{e}_R\| \leq \frac{3k_1 \|v_d\|}{k_{p_2} + k_{p_1} - k_2 \|v_d\|} \quad (26)$$

De tal forma que se tiene un error acotado por arriba por una cantidad positiva, esto se llama estabilidad *UUB* (Khalil, 2015, p. 85).

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS.

En esta sección se presentan los resultados de simulación considerando una circunferencia para el móvil y una referencia manteniendo la orientación respecto a la vertical

y la altura constantes para el efector final. Tómanse en cuenta las ganancias de la Tabla 1 y los parámetros mostrados en Fuentesvilla (2022).

De (1) y (6) se tienen los valores deseados para las velocidades del móvil, que cumplen con la restricción (2) y $v_d \neq 0$.

$$v_d = \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}, \quad \dot{\theta}_d = \frac{\dot{x}_d \dot{y}_d - \dot{x}_d \dot{y}_d}{v_d^2} \quad (27)$$

Se considera una trayectoria paramétrica circular con centro en $(x_c, y_c) = (-1, 0)$ y radio $r_d = 1$ para el móvil, con un tiempo final de $t_f = 24$ s.

$$\begin{cases} \delta(t) &= \frac{2\pi}{t_f} t - \sin\left(\frac{2\pi}{t_f} t\right) \\ x_d(t) &= x_c + r_d \cos(\delta(t)) \\ y_d(t) &= y_c + r_d \sin(\delta(t)) \end{cases} \quad (28)$$

Para el efector final se tiene una circunferencia con el mismo centro, pero con un radio $r_{ef} = 1.3$.

$$\begin{cases} \delta_{ef}(t) &= \delta(t) + \sin^{-1}\left(\frac{L_x}{r_{ef}}\right) \\ x_{ef_d}(t) &= x_c + r_{ef} \cos(\delta_{ef}(t)) \\ y_{ef_d}(t) &= y_c + r_{ef} \sin(\delta_{ef}(t)) \\ z_{ef_d}(t) &= 0.46 \end{cases} \quad (29)$$

Se definen las orientaciones deseadas del efector final como sigue:

$$\psi_{ef_d}(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_{ef_d}(t) = \theta_d - \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

Todas las condiciones iniciales son puestas en cero, excepto $\theta(0) = \pi/2$. Además, se define $\phi_{5d}(t) = 0$.

Las gráficas de desempeño se muestran en la Figura 3.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.

Se ha presentado un controlador que garantiza la convergencia de un RMM de 8 GDL a una trayectoria deseada y se ha validado en simulación usando el modelo del KUKA youBot. Se logró demostrar estabilidad semiglobal, uniforme y últimamente acotada y se han dado las condiciones en las que se satisface.

Como trabajo futuro sería interesante extender el control al caso de sincronización con dos o más RMM añadiendo acoplamientos dinámicos con fines de manipulación cooperativa y una etapa de control de fuerza.

REFERENCIAS

Bischoff, R., Huggenberger, U., and Prassler, E. (2011). Kuka youbot - a mobile manipulator for research

Tabla 1. Ganancias de control.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}	k_{p5}	k_{p6}	k_{p7}
700	555	300	1000	1000	2000	2500	100	400	720	350	350	350	350	350

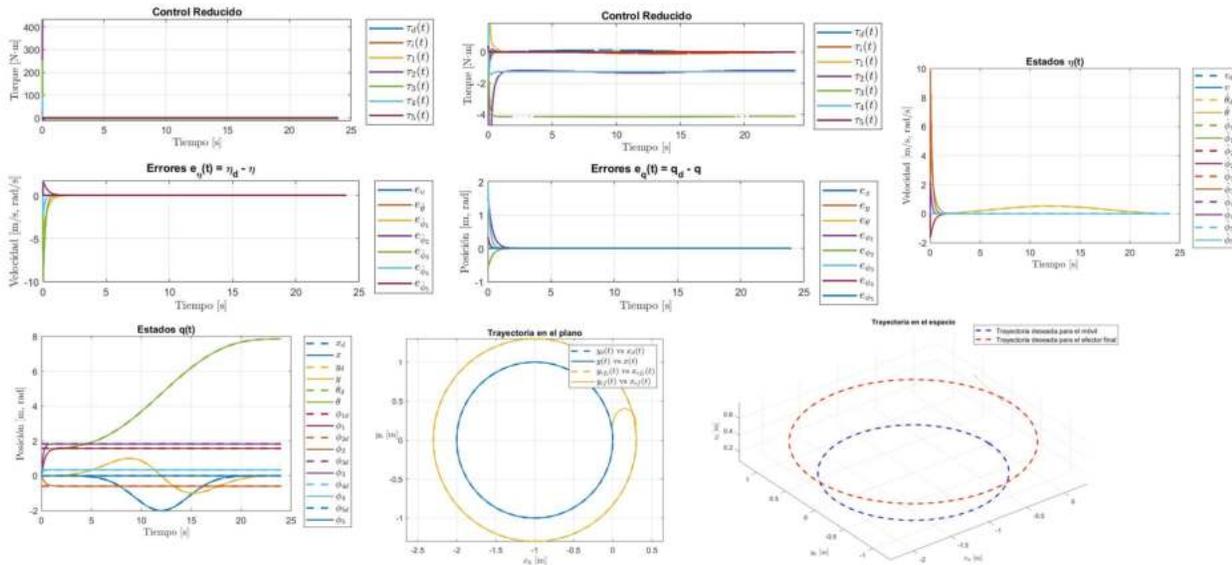


Figura 3. Gráficas de desempeño.

and education. In *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1–4. doi: 10.1109/ICRA.2011.5980575.

Chi-wu, B. and Ke-fei, X. (2009). Robust control of mobile manipulator service robot using torque compensation. In *2009 International Conference on Information Technology and Computer Science*, volume 2, 69–72. doi:10.1109/ITCS.2009.152.

Fuentevilla, G. (2022). <https://sites.google.com/view/parametroskuka/inicio>.

Gutiérrez, H., Morales, A., and Nijmeijer, H. (2017). Synchronization control for a swarm of unicycle robots: Analysis of different controller topologies. *Asian Journal of Control*, 19(5), 1822–1833.

Infante, M., Cruz Morales, R., Velasco-Villa, M., and Rodríguez Ángeles, A. (2019). Formación líder-seguidor para robots diferenciales con parámetros de seguimiento variables. In *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*. AMCA.

Khalil, H.K. (2015). *Nonlinear Control*. Pearson Education, Upper Saddle River, NJ 07458.

Nagatani, K. and Yuta, S. (1995). An experiment on opening-door-behavior by an autonomous mobile robot with a manipulator. In *Proceedings 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human Robot Interaction and Cooperative Robots*, volume 2, 45–50 vol.2. doi: 10.1109/IROS.1995.526137.

Ningyue, Liyan, and Liukeping (2015). The research of mobile manipulator trajectory tracking cooperative control based on the adrc. In *2015 Chinese Automation Congress (CAC)*, 385–389. doi:

10.1109/CAC.2015.7382530.

Portillo Vélez, R.d.J. (2013). *Control Multilateral de Agarre para Robots Cooperativos Maestro/Multi-Esclavo*. Tesis de doctorado, CINVESTAV Unidad Zacatenco.

Saitoh, M., Takahashi, Y., Sankaranarayanan, A., Ohmachi, H., and Marukawa, K. (1995). A mobile robot test-bed with manipulator for security guard application. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, 2518–2523 vol.3. doi:10.1109/ROBOT.1995.525637.

Sugar, T. and Kumar, V. (1999). Multiple cooperating mobile manipulators. In *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C)*, volume 2, 1538–1543 vol.2. doi: 10.1109/ROBOT.1999.772578.

Wang, Y., Mai, T., and Mao, J. (2014). Adaptive motion/force control strategy for non-holonomic mobile manipulator robot using recurrent fuzzy wavelet neural networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 34, 137–153. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2014.05.009>.

Zhou, Z., Li, L., Fürsterling, A., Durocher, H.J., Mouridsen, J., and Zhang, X. (2022). Learning-based object detection and localization for a mobile robot manipulator in sme production. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 73, 102229. doi: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2021.102229>.