

# Input delay compensation of distributed time-delay systems via observer–predictors <sup>\*</sup>

Leopoldo Vite <sup>\*</sup> Sabine Mondié <sup>\*</sup>

*<sup>\*</sup> Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Ciudad de México 07360, México, (e-mail: {lvite, smondie}@ctrl.cinvestav.mx)*

---

**Abstract:** This work is devoted to the stabilization of linear systems with distributed delay. The approach is based on a prediction-observation protocol that allows compensating input time-delay. The proposed control scheme is tuned by optimizing the smoothed spectral abscissa, which is a smooth relaxation of the non-smooth spectral abscissa function, and provides a trade-off between the decay rate and the  $\mathcal{H}_2$  norm of the system. The proposed controller is applied to the stabilization of combustion in rocket motor chambers.

*Keywords:* Distributed time-delay, observer-predictor, smoothed spectral abscissa.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los retardos de tipo distribuido aparecen en una amplia gama de aplicaciones, por ejemplo, en el modelado de epidemias, redes neuronales, sistemas de tráfico, ver, por ejemplo, (Stépán, 1998; Sipahi et al., 2008; McCluskey, 2010; De la Sen et al., 2015; Michiels et al., 2009; Sardar et al., 2021; Wei et al., 2021).

Algunas herramientas para el análisis de estabilidad de los sistemas con retardos distribuidos se basan en enfoques en el dominio de la frecuencia (Morărescu et al., 2007; Michiels et al., 2010), o en enfoques en el dominio del tiempo, que suelen recaer en desigualdades lineales matriciales (Xie et al., 2001; Zheng and Frank, 2002; Chen and Zheng, 2007; Liu et al., 2016, 2019; Feng et al., 2019, 2020), o en la matriz de Lyapunov (Mondié et al., 2011; Egorov et al., 2017).

Los retardos en los lazos de control pueden suponer importantes retos y limitaciones. Un enfoque eficaz para tratar los retardos en la entrada es emplear una predicción del estado futuro del sistema en el lazo de realimentación, compensando así el retardo.

Algunos controladores basados en predictores son los métodos de reducción (Artstein, 1982) y de asignación de espectro finito (Manitius and Olbrot, 1979), definidos por una ecuación integral implícita en función del estado del sistema y de los valores de entrada pasados, o su versión filtrada, el llamado predictor dinámico (Mondié and Michiels, 2003; Kharitonov, 2015), descrito mediante una ecuación diferencial con retardo distribuido.

En Najafi et al. (2013), se propone un controlador denominado observador-predictor, donde se proveen condiciones suficientes para la estabilización de sistemas lineales con retardo en la entrada en términos de la solución de desigualdades lineales matriciales. El método propuesto en Najafi et al. (2013) fue recientemente extendido a sistemas lineales con retardo en el estado y en la entrada en Zhou et al. (2017).

En esta contribución, motivados por los controladores basados en observadores desarrollados por Najafi et al. (2013) y Zhou et al. (2017), se propone un método para compensar el retardo en la entrada de sistemas con retardo puntual y distribuido. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se demuestra invocando el principio de separación entre el error de predicción y la ley de control de realimentación. La sintonización tanto de las ganancias de realimentación de estado como de las ganancias del observador se realiza optimizando la abscisa espectral suave, una medida de estabilidad introducida en Vanbiervliet et al. (2009) para sistemas libre de retardo y recientemente extendida al caso de sistemas con retardos puntuales (Gomez and Michiels, 2019) y retardos distribuidos (Vite et al., 2021).

La presente contribución se organiza como sigue: en la Sección 2 se plantea el problema. El método propuesto se detalla en la Sección 3 y se ilustra en la Sección 4. El artículo termina con algunos comentarios finales.

Notación: la norma Euclidiana se denota por  $\|\cdot\|$ . La vectorización de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$  se denota por  $\text{vec}(A) \in \mathbb{R}^{np \times 1}$ , obtenida apilando las columnas de  $A$ . La matriz identidad y la matriz nula de dimensiones apropiadas se representan por  $I$  y  $0$ , respectivamente.

---

<sup>\*</sup> Este trabajo fue apoyado por el proyecto CONACYT A1-S-24796.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere el sistema lineal con retardo en la entrada de control de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A_0 z(t) + A_1 z(t-r) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta) z(t+\theta) d\theta + Bu(t-\tau) + D\xi(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $z(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$  y  $\xi(t) \in \mathbb{R}$  son el vector de estado, la entrada de control y la señal exógena, respectivamente,  $r$ ,  $h$ , y  $\tau \in \mathbb{R}^+$  son los retardos,  $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $j = 0, 1$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $D \in \mathbb{R}^n$  y  $G(\theta) : [-h, 0] \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  es una función matricial continua. Denotamos por  $z(t, \varphi)$  la solución del sistema (1) con la función inicial  $\varphi$  que pertenece al espacio de funciones vectoriales continuas a trozos en  $[-\max\{r, h, \tau\}, 0]$ , denotado por  $PC([-\max\{r, h, \tau\}, 0], \mathbb{R}^n)$ .

*Suposición 1.* El sistema con retardo puntual y distribuido de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A_0 z(t) + A_1 z(t-r) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta) z(t+\theta) d\theta + Bu(t) + D\xi(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

puede ser estabilizado por la ley de control de realimentación de estado

$$u(t) = F_0 z(t) + F_1 z(t-r), \quad (3)$$

donde  $F_0$  and  $F_1$  son ganancias de control de dimensiones adecuadas.

El problema considerado en este trabajo es diseñar una ley de control bajo la cual el sistema (1), para  $t > \tau$ , coincida con (2).

## 3. RESULTADOS PRINCIPALES

En esta sección, se presenta un esquema de control basado en observadores de estado para compensar el retardo en la entrada del sistema (1). El esquema de control propuesto en este trabajo se basa en el observador de Luenberger, similar al presentado en Najafi et al. (2013) y Zhou et al. (2017).

### 3.1 Observador-predicor para la compensación de retardo en la entrada

Considere el siguiente controlador basado en un observador de estado

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = A_0 \hat{z}(t) + A_1 \hat{z}(t-r) + \int_{-h}^0 G(\theta) \hat{z}(t+\theta) d\theta + \\ \quad L(\hat{z}(t-\tau) - z(t)) + Bu(t), \\ u(t) = F_0 \hat{z}(t) + F_1 \hat{z}(t-r), \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado predicho y  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de ganancia del observador.

El observador-predicor (4) es una copia de la dinámica de la planta (1) con  $\tau = 0$  más un factor de corrección.

La dinámica del error de observación es

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & A_0 e(t) + A_1 e(t-r) + \int_{-h}^0 G(\theta) e(t+\theta) d\theta + \\ & Le(t-\tau) - D\xi(t), \end{aligned} \quad (5)$$

la cual se obtiene calculando la derivada temporal del error de predicción definido como

$$e(t) = \hat{z}(t-\tau) - z(t). \quad (6)$$

El sistema en lazo cerrado (1),(4) resulta

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & (A_0 + BF_0)z(t) + (A_1 + BF_1)z(t-r) + BF_0 e(t) + \\ & BF_1 e(t-r) + \int_{-h}^0 G(\theta) z(t+\theta) d\theta + D\xi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Por lo tanto, bajo la suposición 1 y en vista de la linealidad de (5) y (7), el sistema en lazo cerrado (1),(4) es estable si la dinámica de error de observación (5) es estable.

La matriz de ganancia  $L$  del observador-predicor debe ajustarse de tal manera que el sistema (5) tenga una convergencia rápida. Este problema puede formularse como la minimización sobre  $L$  de la abscisa espectral del sistema (5) definido como

$$\alpha(l) := \sup\{Re(s) : \det H(s) = 0, s \in \mathbb{C}\}, \quad (8)$$

donde  $l := \text{vec}(L)$  y

$$H(s) := \left( sI - A_0 - A_1 e^{-sr} - Le^{-s\tau} - \int_{-h}^0 G(\theta) e^{s\theta} d\theta \right).$$

Sin embargo, dado que  $\alpha(l)$  es en general una función no suave con respecto a los parámetros del sistema (Michiels and Niculescu, 2014), su optimización requiere algoritmos y software específicos.

En este trabajo, para sintonizar la ganancia  $L$ , se emplea una nueva medida de estabilidad denominada abscisa espectral suave introducida en Gomez and Michiels (2019) para sistemas con retardos puntuales y recientemente extendida al caso de sistemas con retardos distribuidos en Vite et al. (2021).

La abscisa espectral suave del sistema (5) se denota por  $\tilde{\alpha}_\epsilon(l)$  y se define como el mapeo  $l \mapsto \tilde{\alpha}_\epsilon(l)$  que resuelve de forma única la ecuación

$$f(l, \tilde{\alpha}_\epsilon(l)) = \frac{1}{\epsilon},$$

donde  $\epsilon$  es un número positivo dado, y

$$f(l, s_\gamma) := \| -H_\gamma^{-1}(s) D \|_{\mathcal{H}_2}^2,$$

$$\begin{aligned} H_\gamma(s) = & sI - (A_0 - s_\gamma I) - A_1 e^{-s_\gamma r} - \\ & Le^{-s_\gamma \tau} e^{-s_\gamma \tau} - \int_{-h}^0 G(\theta) e^{\theta(s+s_\gamma)} d\theta, \end{aligned}$$

con  $s_\gamma > \alpha(l)$ .

La optimización de la abscisa espectral suave puede formularse como un problema de minimización sin restricciones de la forma

$$\min_{l=\text{vec}(L)} \tilde{\alpha}_\epsilon(l). \quad (9)$$

La propiedad de suavidad de  $\tilde{\alpha}_\epsilon(l)$  permite el empleo de técnicas estándar basadas en el gradiente para su solución, en contraste con la minimización de la abscisa espectral  $\alpha(l)$ .

Dado que  $\tilde{\alpha}_\epsilon(l) \rightarrow \alpha(l)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , el minimizador  $l^*(\epsilon)$  se aproxima a un minimizador de la abscisa espectral para valores de  $\epsilon$  cercanos a cero, asegurando una rápida convergencia del sistema (5).

El Algoritmo 1, resume el procedimiento para la estabilización del sistema (5) mediante la optimización de la abscisa espectral suave, ver Vite et al. (2021) para más detalles.

---

**Algoritmo 1**

---

**Requerir:**  $\epsilon > 0$  y vector de parámetros iniciales  $l_0$   
1: mientras  $\tilde{\alpha}_\epsilon(l^*) > 0$  realizar:  
2: resolver el problema de minimización (9) con  $l_0$   
3: disminuir  $\epsilon$   
4: si  $\epsilon \approx 0$   
5: actualizar  $l_0$  y  $\epsilon > 0$   
6: fin si  
7: fin ciclo

**Devolver:** parámetros de estabilización  $l^*$ .

---

### 3.2 Cadena de sub-predictores para la compensación de retardo

Con el fin de compensar grandes retardos en la entrada del sistema (1),  $\tau$  es dividido en  $N \in \mathbb{Z}^+$  tramos y se aplica una estructura secuencial de sub-predictores. La cadena de sub-predictores propuesta se basa en los esquemas de control desarrollados en Najafi et al. (2013) y Zhou et al. (2017), donde cada sub-predictor predice los estados para  $\Delta_\tau = \frac{\tau}{N}$  segundos por delante.

*Teorema 1.* Considere válida la Suposición 1. Considere el controlador de la forma

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_i(t) = A_0 \hat{z}_i(t) + A_1 \hat{z}_i(t-r) + L_i(\hat{z}_i(t-\Delta_\tau) - \hat{z}_{i+1}(t)) + \int_{-h}^0 G(\theta) \hat{z}_i(t+\theta) d\theta + Bu(t - (i-1)\Delta_\tau) \\ \dot{\hat{z}}_N(t) = A_0 \hat{z}_N(t) + A_1 \hat{z}_N(t-r) + L_N(\hat{z}_N(t-\Delta_\tau) - z(t)) + \int_{-h}^0 G(\theta) \hat{z}_N(t+\theta) d\theta + Bu(t - (N-1)\Delta_\tau) \\ u(t) = F_0 \hat{z}_1(t) + F_1 \hat{z}_1(t-r), \end{cases} \quad (10)$$

donde  $i = \overline{1, N-1}$ . Entonces, el sistema en lazo cerrado (1),(10) es estable si los siguientes sistemas son estables

$$\dot{e}_i(t) = A_0 e_i(t) + A_1 e_i(t-r) + L_i e_i(t-\Delta_\tau) + \int_{-h}^0 G(\theta) e_i(t+\theta) d\theta, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (11)$$

$$\dot{e}_N(t) = A_0 e_N(t) + A_1 e_N(t-r) + L_N e_N(t-\Delta_\tau) + \int_{-h}^0 G(\theta) e_N(t+\theta) d\theta - D\xi(t). \quad (12)$$

*Demostración 1.* Al introducir los errores de predicción

$$\begin{aligned} e_i(t) &= \hat{z}_i(t - (N-i+1)\Delta_\tau) - \hat{z}_{i+1}(t - (N-i)\Delta_\tau), \\ e_N(t) &= \hat{z}_N(t - \Delta_\tau) - z(t), \end{aligned}$$

donde  $i = \overline{1, N-1}$ , se sigue que

$$\hat{z}_1(t - N\Delta_\tau) = z(t) + e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_N(t), \quad (13)$$

para  $t \geq 0$ .

El sistema (1) en lazo cerrado con el controlador (10) es

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_0 z(t) + A_1 z(t-r) + \int_{-h}^0 G(\theta) z(t+\theta) d\theta + \\ & B(F_0 \hat{z}_1(t - N\Delta_\tau) + F_1 \hat{z}_1(t-r - N\Delta_\tau)) + D\xi(t). \end{aligned}$$

En vista de los errores de predicción  $e_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , y de la ecuación (13), el sistema de lazo cerrado (1),(10) satisface

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A_0 + BF_0)z(t) + (A_1 + BF_1)z(t-r) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta) z(t+\theta) d\theta + D\xi(t) + \\ & BF_0(e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_N(t)) + \\ & BF_1(e_1(t-r) + e_2(t-r) + \dots + e_N(t-r)), \end{aligned} \quad (14)$$

mientras que las dinámicas de los errores de predicción resultan

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= A_0 e_i(t) + A_1 e_i(t-r) + L_i e_i(t-\Delta_\tau) - \\ & L_{i+1} e_{i+1}(t-\Delta_\tau) + \int_{-h}^0 G(\theta) e_i(t+\theta) d\theta, \\ \dot{e}_N(t) &= A_0 e_N(t) + A_1 e_N(t-r) + L_N e_N(t-\Delta_\tau) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta) e_N(t+\theta) d\theta - D\xi(t), \end{aligned} \quad (15)$$

con  $i = \overline{1, N-1}$ . Debido a la estructura triangular superior del sistema en lazo cerrado (14), (15), el sistema en lazo cerrado (1), (10) es estable si los siguientes sistemas

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_0(t) &= (A_0 + BF_0)\eta_0(t) + (A_1 + BF_1)\eta_0(t-r) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta)\eta_0(t+\theta) d\theta + D\xi(t), \\ \dot{\eta}_i(t) &= A_0 \eta_i(t) + A_1 \eta_i(t-r) + L_i \eta_i(t-\Delta_\tau) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta)\eta_i(t+\theta) d\theta, \quad i = \overline{1, N-1} \\ \dot{\eta}_N(t) &= A_0 \eta_N(t) + A_1 \eta_N(t-r) + L_N \eta_N(t-\Delta_\tau) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta)\eta_N(t+\theta) d\theta - D\xi(t) \end{aligned}$$

son estables. En vista de la Suposición 1, la estabilidad del último conjunto de ecuaciones es equivalente a la estabilidad de los siguientes sistemas

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= A_0 e_i(t) + A_1 e_i(t-r) + L_i e_i(t-\Delta_\tau) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta) e_i(t+\theta) d\theta, \quad i = \overline{1, N-1} \\ \dot{e}_N(t) &= A_0 e_N(t) + A_1 e_N(t-r) + L_N e_N(t-\Delta_\tau) + \\ & \int_{-h}^0 G(\theta) e_N(t+\theta) d\theta - D\xi(t). \end{aligned}$$

Con esto finaliza la demostración.

Similar al caso de un observador-predicador, las dinámicas de los errores de observación (12) pueden estabilizarse optimizando la abscisa espectral suave.

La estrategia de estabilización propuesta para el sistema (1) puede resumirse como sigue:

- (1) Considere el sistema libre de retardo (2). Obtener las ganancias estabilizantes  $F_0$  y  $F_1$  del sistema en lazo cerrado (2),(3) y calcular su abscisa espectral denotado por  $\alpha(k)$ . La estabilización del sistema en lazo cerrado (2),(3) puede realizarse mediante la optimización de la abscisa espectral suave aplicando los resultados en Vite et al. (2021).
- (2) Definir un conjunto de  $N$  observadores-predicadores y calcular las ganancias  $L_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , empleando el enfoque de optimización de la abscisa espectral suave. Note que es posible emplear la misma ganancia en todos los sub-predicadores, a saber,  $L_1 = L_2 = \dots = L_N = L$ .
- (3) Calcular la abscisa espectral  $\alpha(l)$  de las dinámicas de los errores de observación con las ganancias  $L_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , obtenidas en el paso anterior.
- (4) Comprobar si se satisface  $\alpha(l) < \alpha(k)$ . En caso contrario, incrementar  $N$  en el paso (3) hasta obtener  $\alpha(l) < \alpha(k)$ .
- (5) Por último, aplicar la ley de control (10) al sistema (1).

#### 4. EJEMPLO ILUSTRATIVO

En esta sección, se presenta un ejemplo para ilustrar el método de diseño del controlador desarrollado. Se demuestra la aplicación de los resultados en la estabilización de la combustión en cámaras de motores de cohetes. Considere el sistema

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(t-r) + \int_{-h}^0 G(\theta) z(t+\theta) d\theta + Bu(t-\tau) + D\xi(t), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

con matrices tomadas de Zheng and Frank (2002)

$$A_0 = \begin{bmatrix} \rho - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varsigma J} \\ -\frac{p}{(1-\varsigma)J} & 0 & -\frac{1}{(1-\varsigma)J} & \frac{1}{(1-\varsigma)J} \\ 0 & E^{-1} & -E^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{h} & 0 & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\varsigma$  es la longitud fraccionaria para el suministro de presión,  $J$  es un término inercial,  $E$  es un parámetro de elasticidad,  $p$  es la relación entre la presión en estado

estacionario y la caída de presión del inyector en estado estacionario y  $\rho$  es el exponente de presión del proceso de combustión. Los parámetros del sistema se establecen como sigue:  $\varsigma = 0,5$ ,  $J = 2$ ,  $E = 1$ ,  $p = 1$ ,  $\rho = 2$ ,  $r = 0$ ,  $h = 0,6$ , y  $\tau = 1,2$ .

#### Caso libre de retardo

La estabilización del sistema (16) cuando  $\tau = 0$  se puede lograr con el control de realimentación

$$u(t) = F_0 z(t) + F_1 z(t-r). \quad (17)$$

Dado que  $A_1 = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la ganancia de realimentación  $F_1$  se establece como  $F_1 = [0 \ 0 \ 0]$  y el sistema de lazo cerrado (16), (17) se reduce a

$$\dot{z}(t) = (A_0 + BF_0)z(t) + \int_{-h}^0 G(\theta)z(t+\theta)d\theta + Bu(t) + D\xi(t),$$

para  $t \geq 0$ .

En lo subsecuente, se describe el proceso de sintonización de la ganancia de realimentación  $F_0$  tal que la norma  $\mathcal{H}_2$  de la matriz de transferencia del sistema en lazo cerrado (16), (17), dado por

$$T(k, s) = \left( sI - (A_0 + BF_0) - \int_{-h}^0 G(\theta)e^{\theta s} d\theta \right)^{-1} D,$$

con  $k := \text{vec}(F_0)$ , sea minimizada, empleando el enfoque de la abscisa espectral suave.

La abscisa espectral suave del sistema en lazo cerrado (16), (17) es denotado por  $\tilde{\alpha}_\epsilon(k)$ , definido como el mapeo  $k \mapsto \tilde{\alpha}_\epsilon(k)$  que resuelve de forma única la ecuación

$$f(k, \tilde{\alpha}_\epsilon(k)) = \frac{1}{\epsilon},$$

donde  $\epsilon > 0$  y

$$f(k, s_\gamma) := \|H_\gamma^{-1}(s)D\|_{\mathcal{H}_2}^2,$$

$$H_\gamma(s) = sI - (A_0 + BF_0 - s_\gamma I) - \int_{-h}^0 G(\theta)e^{\theta(s+s_\gamma)} d\theta,$$

donde  $s_\gamma$  es un número mayor a la abscisa espectral del sistema en lazo cerrado (16), (17), denotado por  $\alpha(k)$ .

La optimización de  $\tilde{\alpha}_\epsilon(k)$  se formula como un problema de minimización sin restricciones de la forma

$$\min_{k=\text{vec}(F_0)} \tilde{\alpha}_\epsilon(k). \quad (18)$$

Dado que  $\tilde{\alpha}_\epsilon(k) > \alpha(k)$  para cualquier  $\epsilon > 0$  y vector  $k$ , una solución de (18) tal que

$$\alpha_\epsilon(k^*(\epsilon)) \leq 0$$

donde

$$k^*(\epsilon) := \arg \min_k \tilde{\alpha}_\epsilon(k),$$

denota el minimizador de (18), resuelve el problema de estabilización del sistema (16) en lazo cerrado con (17).

Considere  $\epsilon = \epsilon^*$  tal que

$$\tilde{\alpha}_{\epsilon^*}(k^*(\epsilon^*)) = 0.$$

Como se muestra en Vite et al. (2021),  $k^*(\epsilon^*)$  es un optimizador de la norma  $\mathcal{H}_2$  de la matriz de transferencia del sistema en lazo cerrado (16), (17), esto es

$$k^*(\epsilon^*) = \arg \min_k \|T(k, s)\|_{\mathcal{H}_2}^2,$$

y

$$\|T(k^*, s)\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon^*}}.$$

Resolviendo el problema de minimización (18), se halla que  $\tilde{\alpha}_{\epsilon^*}(k^*(\epsilon^*)) \approx 0$  cuando  $\epsilon^* \approx 0.3165$ . Para este  $\epsilon^*$ , se obtiene el minimizador

$$k^*(\epsilon^*) = (4.34505 \quad -55.1629 \quad 6.87399 \quad -49.2579)^T,$$

el cual que corresponde a un minimizador de la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema en lazo cerrado (16), (17), y

$$\|T(k^*(\epsilon^*), s)\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon^*}} \approx 1.7789.$$

Por último, la abscisa espectral del sistema en lazo cerrado (16),(17) resulta  $\alpha(k) = -0.60732$ .

#### Compensación del retardo mediante sub-predictores secuenciales

Considere un retardo en la entrada  $\tau = 1.2$ . Para compensar este retardo, se aplica un conjunto de  $N = 4$  sub-predictores, por lo tanto

$$\Delta_\tau = \frac{\tau}{N} = \frac{1.2}{4} = 0.3.$$

Cuando  $N = 4$ , el controlador (10) se reduce a

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_i(t) = A_0 \hat{z}_i(t) + A_1 \hat{z}_i(t-r) + L_i(\hat{z}_i(t-\Delta_\tau) - \hat{z}_{i+1}(t)) + \\ \int_{-h}^0 G(\theta) \hat{z}_i(t+\theta) d\theta + Bu(t - (i-1)\Delta_\tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\hat{z}}_4(t) = A_0 \hat{z}_4(t) + A_1 \hat{z}_4(t-r) + L_4(\hat{z}_4(t-\Delta_\tau) - z(t)) + \\ \int_{-h}^0 G(\theta) \hat{z}_4(t+\theta) d\theta + Bu(t - 3\Delta_\tau), \\ u(t) = F_0 \hat{z}_1(t). \end{cases} \quad (19)$$

De tal manera, en vista de la Suposición 1, el sistema en lazo cerrado (16),(19) es asintóticamente estable si los siguientes sistemas son asintóticamente estables

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= A_0 e_i(t) + A_1 e_i(t-r) + L_i e_i(t-\Delta_\tau) + \\ &\int_{-h}^0 G(\theta) e_i(t+\theta) d\theta, \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{e}_4(t) &= A_0 e_4(t) + A_1 e_4(t-r) + L_4 e_4(t-\Delta_\tau) + \\ &\int_{-h}^0 G(\theta) e_4(t+\theta) d\theta - D\xi(t). \end{aligned} \quad (20)$$

En este caso, se emplea la misma ganancia en todos los sub-predictores, es decir  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L = \text{diag}[l_1, l_2, l_3, l_4]$ .

Optimizando la abscisa espectral suave sobre  $L$  con  $\epsilon = e^{-5}$  y punto de partida  $l_0 = 0 \in \mathbb{R}^{16 \times 1}$ , se obtiene

$$L = \text{diag}[0.52052 \quad -1.8299 \quad -2.5135 \quad -0.73718].$$

Con estos parámetros, la abscisa espectral suave de las dinámicas de errores de observación dadas en (20) es  $\tilde{\alpha}_\epsilon(l) = -1.7903$ , mientras que la abscisa espectral resulta ser  $\alpha(l) = -1.9026$ .

Dado que se satisface  $\alpha(l) < \alpha(k)$ , el control basado en el observador (19) estabiliza el sistema (16) cuando  $\tau = 1.2$ .

Para verificar la efectividad del método de control propuesto, en la siguiente subsección se presentan simulaciones numéricas.

#### Resultados de simulación

En las Figuras 1 y 2 se ilustran los resultados vía simulación del sistema (16) en lazo cerrado con (19). Las simulaciones numéricas demuestran la eficacia del método propuesto.

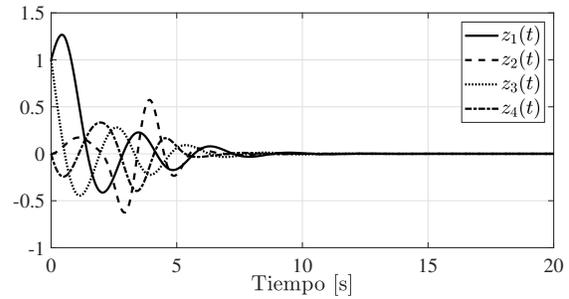


Fig. 1. Estado  $z(t)$  del sistema en lazo cerrado (16),(19).

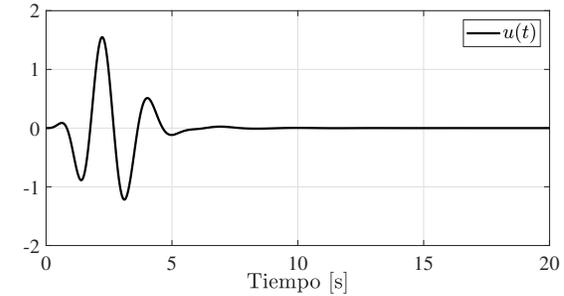


Fig. 2. Señal de control  $u(t)$  del sistema en lazo cerrado (16),(19).

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un esquema de control basado en observadores de estado para la compensación del retardo en la entrada de sistemas lineales con retardo puntual y distribuido. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se demuestra invocando el principio de separación entre el error de observación-predicción y la ley de control por realimentación de estado. Cabe destacar dos ventajas principales de la estrategia de sintonización aplicada. En primer lugar, la sintonización de la ganancia de realimentación de estado mediante la optimización de la abscisa espectral suave para  $\epsilon^*$  minimiza la norma

$\mathcal{H}_2$  del sistema en lazo cerrado. En segundo lugar, la sintonización de las ganancias del observador mediante la optimización de la abscisa espectral suave para valores de  $\epsilon$  cercanos a cero asegura una rápida convergencia de esquema de predicción al estado futuro.

## REFERENCES

- Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4), 869–879.
- Chen, W.H. and Zheng, W.X. (2007). Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays. *Automatica*, 43(1), 95–104.
- De la Sen, M., Alonso-Quesada, S., and Ibeas, A. (2015). On the stability of an seir epidemic model with distributed time-delay and a general class of feedback vaccination rules. *Applied Mathematics and Computation*, 270, 953–976.
- Egorov, A.V., Cuvas, C., and Mondié, S. (2017). Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays. *Automatica*, 80, 218–224.
- Feng, Q., Nguang, S.K., and Perruquetti, W. (2020). Dissipative stabilization of linear systems with time-varying general distributed delays. *Automatica*, 122.
- Feng, Q., Nguang, S.K., and Seuret, A. (2019). Stability analysis of linear coupled differential-difference systems with general distributed delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(3), 1356–1363.
- Gomez, M.A. and Michiels, W. (2019). Characterization and optimization of the smoothed spectral abscissa for time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(13), 4402–4418.
- Kharitonov, V.L. (2015). Predictor-based controls: the implementation problem. *Differential Equations*, 51(13), 1675–1682.
- Liu, K., Fridman, E., Johansson, K.H., and Xia, Y. (2016). Generalized Jensen inequalities with application to stability analysis of systems with distributed delays over infinite time-horizons. *Automatica*, 69, 222–231.
- Liu, K., Seuret, A., Xia, Y., Gouaisbaut, F., and Ariba, Y. (2019). Bessel–Laguerre inequality and its application to systems with infinite distributed delays. *Automatica*, 109.
- Manitius, A. and Olbrot, A. (1979). Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE transactions on Automatic Control*, 24(4), 541–552.
- McCluskey, C.C. (2010). Complete global stability for an sir epidemic model with delay—distributed or discrete. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11(1), 55–59.
- Michiels, W., Morărescu, C.I., and Niculescu, S.I. (2009). Consensus problems with distributed delays, with application to traffic flow models. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(1), 77–101.
- Michiels, W. and Niculescu, S.I. (2014). *Stability, Control, and Computation for Time-delay Systems: An Eigenvalue-based Approach*, volume 27. SIAM.
- Michiels, W., Vyhlídal, T., and Zitek, P. (2010). Control design for time-delay systems based on quasi-direct pole placement. *Journal of Process Control*, 20(3), 337–343.
- Mondié, S. and Michiels, W. (2003). Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12), 2207–2212.
- Mondié, S., Ochoa, G., and Ochoa, B. (2011). Instability conditions for linear time delay systems: a Lyapunov matrix function approach. *International Journal of Control*, 84(10), 1601–1611.
- Morărescu, C.I., Niculescu, S.I., and Gu, K. (2007). Stability crossing curves of shifted gamma-distributed delay systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 6(2), 475–493.
- Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F., and Karimadini, M. (2013). Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors. *International Journal of Control*, 86(4), 599–609.
- Sardar, M., Biswas, S., and Khajanchi, S. (2021). The impact of distributed time delay in a tumor-immune interaction system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 142, 110483.
- Sipahi, R., Atay, F.M., and Niculescu, S.I. (2008). Stability of traffic flow behavior with distributed delays modeling the memory effects of the drivers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 68(3), 738–759.
- Stépán, G. (1998). Delay-differential equation models for machine tool chatter. *Dynamics and chaos in manufacturing processes*, 471152935, 165–192.
- Vanbiervliet, J., Vandereycken, B., Michiels, W., Vandewalle, S., and Diehl, M. (2009). The smoothed spectral abscissa for robust stability optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 20(1), 156–171.
- Vite, L., Gomez, M.A., Mondié, S., and Michiels, W. (2021). Stabilisation of distributed time-delay systems: a smoothed spectral abscissa optimisation approach. *International Journal of Control*, 1–13.
- Wei, T., Li, X., and Stojanovic, V. (2021). Input-to-state stability of impulsive reaction–diffusion neural networks with infinite distributed delays. *Nonlinear Dynamics*, 103(2), 1733–1755.
- Xie, L., Fridman, E., and Shaked, U. (2001). Robust  $H_\infty$  control of distributed delay systems with application to combustion control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12), 1930–1935.
- Zheng, F. and Frank, P.M. (2002). Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers. *Automatica*, 38(3), 487–497.
- Zhou, B., Liu, Q., and Mazenc, F. (2017). Stabilization of linear systems with both input and state delays by observer–predictors. *Automatica*, 83, 368–377.