

Convex control with \mathcal{H}_∞ performance of a hexarotor-UAV

H. Ancheyta-López* S. Gomez-Peñate* P. Gasga*
F. R. López-Estrada*

* *Tecnológico Nacional de México, I.T. Tuxtla Gutiérrez,
TURIX-Dynamics Diagnosis and Control Group, Carretera
Panamericana km 1080 S/N, Tuxtla Gutierrez 29050, México;*

Abstract: This paper is dedicated to the control of a hexarotor-type aerial vehicle based in a convex rewrite. Controller design is considered a parallel-distributed compensation control law to stabilize the vehicle and a H_∞ performance criterion to guarantee robustness against disturbances. The stability condition and robust performance are formulated using the function quadratic of Lyapunov where the sufficient conditions are given by a set of linear matrix inequalities. Finally, it is illustrated the numerical simulations of the proposed method.

Keywords: Hexarotor, robust control, convex system, linear matrix inequality.

1. INTRODUCCIÓN

Los vehículos aéreos no tripulados (VANT) tipo hexarotor han sido utilizados en diversas aplicaciones civiles tales como; el monitoreo de incendios, inspección de infraestructuras, búsqueda y rescate (Altan et al., 2018). Entre los VANTs más conocidos se encuentran los cuadrotoros, hexarrotos y octorrotos (Roy et al., 2021). Sin embargo, la ventaja de los hexarrotos en comparación a los cuadrotoros es que pueden transportar mayor carga útil y tienen mejor tolerancia a fallas.

En la literatura se han reportado diferentes métodos para el control de los hexarrotos, por ejemplo; en Rosales et al. (2019) se propone un novedoso controlador PID adaptativo para un hexarotor donde las condiciones de estabilidad del sistema se garantizan mediante la teoría de Lyapunov. En Ahmed et al. (2020) se realiza una comparación de tres controladores predictivos de un hexarotor en tiempo real y como resultado del experimento, demostraron que para la presencia de perturbaciones resulta tener complicaciones de estabilidad. Uno de los principales problemas de control en los hexarrotos, es garantizar la estabilidad y desempeño en presencia de perturbaciones. En Kim and Lee (2016) se diseña un controlador robusto por modos deslizantes (CMD) con un error máximo del 20% en la convergencia de los estados. En Shawky et al. (2021) se presenta un controlador predictivo con una acción integral para el rechazo de perturbaciones de un hexarotor. En Zhang et al. (2019) diseñan una estrategia de control de retroceso no

lineal robusta para resolver el problema de seguimiento de trayectoria de un hexarotor. No obstante, el modelado y control del hexarotor no es trivial por que la dinámica no lineal resulta ser altamente complejo (Rajappa et al., 2015). Existe un enfoque de diseño que cual involucra la no linealidad del sistema a través de una reescritura y de esta manera obtener un modelo Takagi-Sugeno (T-S), conocido también como representación convexa. Esta representación esta dada por una colección de modelos lineales que son interpolados mediante funciones de ponderación (Ohtake et al., 2003).

Los investigadores que han enfocado sus trabajos en el diseño de controladores basados en modelos T-S aplicados en VANTs son: En Ortiz-Torres et al. (2020) se desarrolla un control tolerante a fallas en un quadrotor y realiza un diagnóstico para estimar las fallas en los actuadores. En Al-Mahturi et al. (2020) se presenta un controlador difuso basado en una escritura T-S aplicado a un hexarotor, el cual se adaptó a un CMD para mejorar su solidez frente a ráfagas de viento. En este trabajo se propone un esquema de control en cascada para la estabilización de un hexarotor. El diseño del controlador se basa en una reescritura convexa a través del método del sector no lineal. Como parte del diseño se considera un criterio de desempeño H_∞ para minimizar el efecto de las perturbaciones.

El documento está organizado de la siguiente manera: En las Secciones 2 y 3 se presentan el modelado matemático del hexarotor y su representación convexa. El diseño del controlador con desempeño H_∞ se muestra en la Sección 4. Los resultados que demuestran la efectividad del método se discuten en la Sección 5 y finalmente, en la Sección 6 se mencionan las conclusiones.

* Este trabajo fue financiado por el Tecnológico Nacional de México a través del programa Proyectos de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación, con clave de proyecto 13965.22-P.

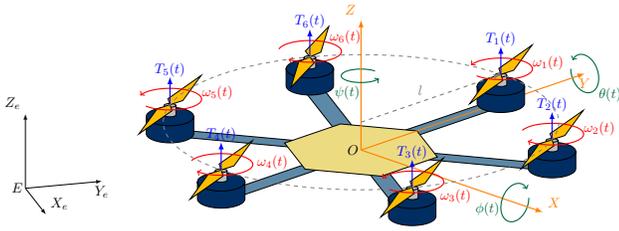


Fig. 1. Hexarrotor

2. MODELO MATEMÁTICO

Los hexarrotos cuentan con seis actuadores los cuales proporcionan las fuerzas de empuje. Tres rotores giran en sentido de las manecillas del reloj y el resto giran en sentido opuesto, como se ilustra en la Figura 1. Para la obtención del modelo matemático se consideran dos ejes de referencia; O el marco fijado en el centroide del VANT y E el marco fijo en la tierra.

El modelo matemático se deduce a partir del enfoque de Newton-Euler tomando en cuenta que: la estructura del marco es rígida y simétrica, las hélices son rígidas, el centro de gravedad se encuentra en el origen del marco de referencia del eje del cuerpo y el empuje es proporcional al cuadrado de la velocidad del rotor. El modelo matemático que describe la dinámica traslacional y rotacional del hexarrotor es el siguiente (Adir and Stoica, 2012):

$$\begin{aligned} \dot{x}_b(t) &= \alpha(t) \frac{1}{m} u_e(t), \\ \dot{y}_b(t) &= \beta(t) \frac{1}{m} u_e(t), \\ \ddot{z}_b(t) &= -g + \cos \phi(t) \cos \theta(t) \frac{1}{m} u_e(t), \\ \ddot{\phi}(t) &= \dot{\theta}(t) \dot{\psi}(t) \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_p}{I_x} \dot{\theta}(t) \Omega(t) + \frac{1}{I_x} \tau_\phi(t), \\ \ddot{\theta}(t) &= \dot{\phi}(t) \dot{\psi}(t) \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_p}{I_y} \dot{\phi}(t) \Omega(t) + \frac{1}{I_y} \tau_\theta(t), \\ \ddot{\psi}(t) &= \dot{\phi}(t) \dot{\theta}(t) \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} \tau_\psi(t), \end{aligned} \quad (1)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \cos \phi(t) \sin \theta(t) \cos \psi(t) + \sin \phi(t) \sin \psi(t), \\ \beta(t) &= \cos \phi(t) \sin \theta(t) \sin \psi(t) - \sin \phi(t) \cos \psi(t), \\ x_b(t), y_b(t), z_b(t) &\text{ definen la posición de traslación, } \phi(t) \text{ es el ángulo de alabeo (roll), } \theta(t) \text{ ángulo de cabeceo (pitch), } \psi(t) \text{ es el ángulo de guiñada (yaw), } I_x, I_y, I_z \text{ son los momentos de inercia de cada eje, } l \text{ es la longitud del hexarrotor, } m \text{ es la masa del hexarrotor, } J_p \text{ la inercia del rotor propulsor y } g \text{ es la constante gravitacional. } u_e(t) \text{ es el empuje total del VANT, } \tau_\phi(t) \text{ es el momento en alabeo, } \tau_\theta(t) \text{ es el momento en cabeceo, } \tau_\psi(t) \text{ es el momento en guiñada, los cuales dependen directamente de las velocidades rotacionales de los rotores } \omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_6(t) \text{ y están definidos de la siguiente forma:} \end{aligned}$$

$$u_b(t) = D_T T(t), \quad (2)$$

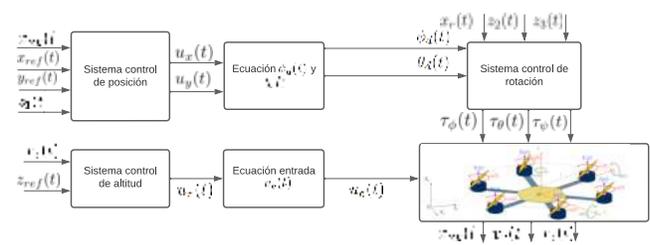


Fig. 2. Diagrama de control

donde:

$$u_b(t) = [u_e(t) \tau_\phi(t) \tau_\theta(t) \tau_\psi(t)]^\top, \quad (3)$$

$$D_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{l}{\sqrt{3}} & l & \frac{l}{\sqrt{3}} & -\frac{l}{\sqrt{3}} & -l & -\frac{l}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{k_D} & 0 & \frac{2}{k_D} & \frac{2}{k_D} & 0 & -\frac{2}{k_D} \\ \frac{2}{k_T} & \frac{2}{k_T} & \frac{2}{k_T} & \frac{2}{k_T} & \frac{2}{k_T} & \frac{2}{k_T} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$T(t) = [T_1(t) T_2(t) T_3(t) T_4(t) T_5(t) T_6(t)]^\top, \quad (5)$$

donde k_D es el factor de arrastre, k_T es el factor de empuje, $u_b(t)$ es el vector de entradas, D_T es una matriz de distribución y $T(t)$ el vector de empujes vertical de cada rotor, y están definidos como:

$$T_i(t) = k_T \omega_i^2(t), \text{ para } i = 1, \dots, 6. \quad (6)$$

La perturbación en el sistema $\Omega(t)$ es causada por los residuos de las velocidades de los rotores y se define como:

$$\Omega(t) = \omega_2(t) + \omega_4(t) + \omega_6(t) - \omega_1(t) - \omega_3(t) - \omega_5(t). \quad (7)$$

Cabe destacar que a pesar de que se tiene una expresión matemática para la perturbación $\Omega(t)$, esta se considera desconocida, ya que las velocidades rotacionales de cada rotor se desconocen.

3. MODELADO PARA EL DISEÑO DE CONTROL

Para estabilizar el hexarrotor se construye el esquema de control mostrado en la Figura 2. Por tanto, se escribe el sistema en el espacio de estados, donde se tienen las siguientes 12 variables de estados: $x_1(t) = x_b(t)$, $x_2(t) = \dot{x}_b(t)$, $x_3(t) = y_b(t)$, $x_4(t) = \dot{y}_b(t)$, $x_5(t) = z_b(t)$, $x_6(t) = \dot{z}_b(t)$, $x_7(t) = \phi(t)$, $x_8(t) = \dot{\phi}(t)$, $x_9(t) = \theta(t)$, $x_{10}(t) = \dot{\theta}(t)$, $x_{11}(t) = \psi(t)$, $x_{12}(t) = \dot{\psi}(t)$. El método requiere de dividir el modelo en tres subsistemas: altitud, posición y rotación.

3.1 Subsistema de altitud

Para el subsistema de altitud se define el vector de estado

$$x_z(t) = \begin{bmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_b(t) \\ \dot{z}_b(t) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

y el modelo matemático está definido mediante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6(t) \\ -g + \frac{1}{m} \cos x_7(t) \cos x_9(t) u_e(t) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Definiendo la entrada virtual $u_z(t)$, como:

$$u_z(t) = -g + \frac{\cos(x_7(t))\cos(x_9(t)) u_e(t)}{m}, \quad (10)$$

se obtiene el siguiente submodelo lineal:

$$\dot{x}_z(t) = A_z x_z(t) + B_z u_z(t), \quad (11)$$

donde:

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Para este caso, como el subsistema es lineal, se define una ley de control por retroalimentación de estado:

$$u_z(t) = K_z \begin{bmatrix} x_5(t) - z_{ref}(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

donde K_z es una matriz de ganancias que hacen al subsistema de altitud estable.

Una vez obtenido $u_z(t)$ se sustituye en la siguiente ecuación para tener el empuje total $u_e(t)$:

$$u_e(t) = \frac{m(u_z(t) + g)}{\cos(x_7(t))\cos(x_9(t))}. \quad (14)$$

3.2 Subsistema de posición $x - y$

Para el subsistema de posición $x - y$ se define el vector de estado:

$$\begin{aligned} x_{xy}(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^\top \\ &= [x_b(t) \ \dot{x}_b(t) \ y_b(t) \ \dot{y}_b(t)]^\top. \end{aligned} \quad (15)$$

Por lo que el modelo del subsistema $x - y$ es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \alpha(t) \frac{u_e(t)}{m} \\ x_4(t) \\ \beta(t) \frac{u_e(t)}{m} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Considerando las entradas virtuales $u_x(t) = \alpha(t)$ y $u_y(t) = \beta(t)$ y (14) se obtiene el siguiente submodelo no lineal:

$$\dot{x}_{xy}(t) = A_{xy} x_{xy}(t) + B_{xy}(t) u_{xy}(t), \quad (17)$$

donde:

$$A_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, u_{xy}(t) = \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix},$$

$$B_{xy}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{g+u_z(t)}{\cos(x_7(t))\cos(x_9(t))} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{g+u_z(t)}{\cos(x_7(t))\cos(x_9(t))} \end{bmatrix}.$$

Con la finalidad de obtener un modelo convexo bajo la transformación del sector no lineal (Ohtake et al., 2003), se define una variable premisa: $z_1(t) = \frac{g+u_z(t)}{\cos(x_7(t))\cos(x_9(t))}$

$\in [10, 80]$. A partir de las cotas propuestas, se definen las funciones de ponderación descritas como:

$$h_1(z_1(t)) = \frac{80 - z_1(t)}{80 - 10}, \quad h_2(z_1(t)) = 1 - h_1(z_1(t)). \quad (18)$$

Con base en las funciones de ponderación, es posible escribir el subsistema no lineal (17) en su forma convexa:

$$\dot{x}_{xy}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z_1(t)) (A_{xy} x_{xy}(t) + B_{xyi} u_{xy}(t)), \quad (19)$$

donde:

$$B_{xy1} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^\top, \quad B_{xy2} = \begin{bmatrix} 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}^\top.$$

Las funciones de ponderación satisfacen la siguiente propiedad de suma convexa:

$$\sum_{i=1}^2 h_i(z_1(t)) = 1, \quad 0 \leq h_i(z_1(t)) \leq 1. \quad (20)$$

La ley de control que se define para el control del sistema $x - y$ se establece como:

$$u_{xy}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z_1(t)) K_{xyi} \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{ref}(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) - y_{ref}(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

donde x_{ref} es la referencia para la posición del eje X , y_{ref} es la referencia para la posición del eje Y y K_{xyi} son matrices de ganancias que hacen al subsistema de posición estable.

Con la obtención de las entradas virtuales $u_x(t)$ y $u_y(t)$ se determinan los ángulos deseados ϕ_d y θ_d para una posición deseada en el plano $X - Y$:

$$\begin{aligned} \theta_d(t) &= \arcsin\left(\frac{\cos(x_{11}(t))u_x(t) + \sin(x_{11}(t))u_y(t)}{\cos(\phi_d(t))}\right), \\ \phi_d(t) &= \arcsin(\sin(x_{11}(t))u_x(t) - \cos(x_{11}(t))u_y(t)). \end{aligned} \quad (22)$$

3.3 Subsistema de rotación

Para diseñar el control del subsistema de rotación se define el vector de estado:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= [7(t) \ x_8(t) \ x_9(t) \ x_{10}(t) \ x_{11}(t) \ x_{12}(t)]^\top \\ &= [\phi(t) \ \dot{\phi}(t) \ \theta(t) \ \dot{\theta}(t) \ \psi(t) \ \dot{\psi}(t)]^\top. \end{aligned} \quad (23)$$

Por lo que el modelo del subsistema de rotación es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_7(t) \\ \dot{x}_8(t) \\ \dot{x}_9(t) \\ \dot{x}_{10}(t) \\ \dot{x}_{11}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_8(t) \\ x_{10}(t)x_{12}(t)\frac{(I_y - I_z)}{I_x} - \frac{J_p}{I_x}x_{10}(t)\Omega(t) + \frac{\tau_\phi(t)}{I_x} \\ x_{10}(t) \\ x_8(t)x_{12}(t)\frac{(I_z - I_x)}{I_y} + \frac{J_p}{I_y}x_8(t)\Omega(t) + \frac{\tau_\theta(t)}{I_y} \\ x_{12}(t) \\ x_8(t)x_{10}(t)\frac{(I_x - I_y)}{I_z} + \frac{\tau_\psi(t)}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Se obtiene el siguiente modelo no lineal para el subsistema de rotación:

$$\dot{x}_r(t) = A_r(t)x_r(t) + B_r u_r(t) + E_r(t)\Omega(t), \quad (25)$$

donde:

$$A_r(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{10}(t)(I_y - I_z)}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_8(t)(I_z - I_x)}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{x_{10}(t)(I_x - I_y)}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}, \quad u_r(t) = \begin{bmatrix} \tau_\phi(t) \\ \tau_\theta(t) \\ \tau_\psi(t) \end{bmatrix}, \quad E_r(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{j_p x_{10}(t)}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{j_p x_8(t)}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para la obtención de un modelo convexo mediante la transformación del sector no lineal, se determinan las variables premisas: $z_2(t) = x_8(t) \in [-3, 3]$ y $z_3(t) = x_{10}(t) \in [-3, 3]$. Con base en las cotas propuestas, considerando límites físicos angulares, se definen funciones de ponderación:

$$\begin{aligned} h_3 &= w_2^0 w_3^0, & h_4 &= w_2^0 w_3^1, \\ h_5 &= w_2^1 w_3^0, & h_6 &= w_2^1 w_3^1, \end{aligned} \quad (27)$$

donde:

$$\begin{aligned} w_2^0 &= \frac{3 - x_8(t)}{3 - (-3)}, & w_2^1 &= 1 - w_2^0, \\ w_3^0 &= \frac{3 - x_{10}(t)}{3 - (-3)}, & w_3^1 &= 1 - w_3^0. \end{aligned} \quad (28)$$

Por tanto, es posible escribir el subsistema no lineal (25) en su forma convexa:

$$\dot{x}_r(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z_2(t), z_3(t)) (A_{r_i} x_r(t) + B_r u_r(t) + E_{r_i} \Omega(t)), \quad (29)$$

donde:

$$A_{r1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3(I_y - I_z)}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3(I_z - I_x)}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-3(I_x - I_y)}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{r1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-3j_p}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-3j_p}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3(I_y - I_z)}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3(I_z - I_x)}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3(I_x - I_y)}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3j_p}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-3j_p}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$A_{r3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3(I_y - I_z)}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3(I_z - I_x)}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-3(I_x - I_y)}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{r3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-3j_p}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{3j_p}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{r4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3(I_y - I_z)}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3(I_z - I_x)}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3(I_x - I_y)}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{r4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3j_p}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{3j_p}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Las funciones de ponderación satisfacen la siguiente propiedad de suma convexa:

$$\sum_{i=1}^4 h_i(z_2(t), z_3(t)) = 1, \quad 0 \leq h_i(z_2(t), z_3(t)) \leq 1. \quad (31)$$

La ley de control que se define para el control del subsistema de rotación se establece como:

$$u_r(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z_2(t), z_3(t)) K_{r_i} \begin{bmatrix} x_7(t) - \phi_d(t) \\ x_8(t) \\ x_9(t) - \theta_d(t) \\ x_{10}(t) \\ x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR CONVEXO CON DESEMPEÑO \mathcal{H}_∞

Considerando un sistema T-S general definido como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2^r} h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)), \quad (33)$$

donde $x(t)$, $u(t)$, $d(t)$ son el vector de estado, vector de entrada y la perturbación, respectivamente; A_i , B_i y E_i son matrices conocidas que definen los submodelos LTI del sistema T-S. $h_i(z(t))$ son las funciones de ponderación que dependen de las variables premisas $z(t)$, r es el número de variables premisas. Entonces, con la finalidad de estabilizar el sistema T-S se considera la ley de control definida por:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{2^r} h_i(z(t)) K_i x(t), \quad (34)$$

donde K_i son matrices de ganancias a calcularse. Asumiendo que los pares de matrices (A_i, B_i) son controlables, se sustituye en la ley de control (34) un modelo convexo con perturbación y producir el sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{2^r} \sum_{j=1}^{2^r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left((A_i + B_i K_j) x(t) \right. \\ &\quad \left. + E_i d(t) \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Note que la estabilización es afectada por la perturbación $d(t)$, para minimizar su efecto en la estabilización del sistema, se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\sup_{\|d(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|d(t)\|_{\mathcal{L}_2}} < \gamma, \quad (36)$$

donde γ es el nivel de atenuación y el siguiente teorema da condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema.

Teorema 1. Dado el sistema en lazo cerrado (35) y la ley de control (34), el sistema es estable y robusto si y solo si, existen matrices W_j , $P = P^\top > 0$ y un nivel de atenuación $\gamma > 0$, tal que satisfagan las siguientes LMIs $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$:

$$\begin{bmatrix} MA_i^\top + W_j^\top B_i^\top + A_i M + B_i W_j & E_i & M^\top \\ E_i^\top & -\gamma^2 I & 0 \\ M & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

donde las ganancias del controlador son calculadas por $K_j = W_j M^{-1}$.

Demostración: Considere la función de Lyapunov: $V(x(t)) = x(t)^\top P x(t) > 0$ y el siguiente criterio de desempeño \mathcal{H}_∞ como:

$$\dot{V}(x(t)) + x(t)^\top x(t) - \gamma^2 d(t)^\top d(t) < 0, \quad (38)$$

donde $\dot{V}(x(t))$ es la derivada de la función cuadrática de Lyapunov:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^\top P x(t) + x(t)^\top P \dot{x}(t) < 0. \quad (39)$$

Sustituyendo el sistema en lazo cerrado (35) y la derivada de la función de Lyapunov (39) en (38), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{2^r} \sum_{j=1}^{2^r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i K_j) x(t) + E_i d(t) \right)^\top \\ & \times P x(t) + x(t)^\top P \left(\sum_{i=1}^{2^r} \sum_{j=1}^{2^r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + \right. \\ & \left. B_i K_j) x(t) + E_i d(t) \right) + x(t)^\top x(t) - \gamma^2 d(t)^\top d(t) < 0, \end{aligned}$$

desarrollando y realizando manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2^r} \sum_{j=1}^{2^r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^\top \left(A_i^\top P + K_j^\top B_i^\top P + \right. \\ & \left. P A_i + P B_i K_j + I \right) x(t) + d(t)^\top E_i^\top P x(t) + \\ & \left. x(t)^\top P E_i d(t) - \gamma^2 d(t)^\top d(t) < 0, \quad (40) \end{aligned}$$

usando la propiedad convexa $\sum_{i=1}^{2^r} h_i(z(t)) = 1$, $0 \leq h_i(z(t)) \leq 1$ de las funciones $h_i(z(t))$ y $h_j(z(t))$, factorizando a la izquierda y derecha por el vector $\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$ y su traspuesta $\bar{X}^\top(t)$, se tiene:

$$\bar{X}^\top(t) \begin{bmatrix} \Gamma_i & P E_i \\ E_i^\top P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \bar{X}(t) < 0,$$

con:

$$\Gamma_i = A_i^\top P + K_j^\top B_i^\top P + P A_i + P B_i K_j + I,$$

para juntar las matrices desconocidas P y K_j , la desigualdad es pre y post-multiplicada por $\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ y su

traspuesta, donde $M = P^{-1}$, por tanto, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} M A_i^\top + M K_j^\top B_i^\top + A_i M + B_i K_j M + M^\top M & E_i \\ E_i^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

donde el término cuadrático de la desigualdad puede ser eliminado considerando $W_j = K_j M$, por tanto, las desigualdades lineales matriciales (LMIs) se escriben como:

$$\begin{bmatrix} M A_i^\top + W_j^\top B_i^\top + A_i M + B_i W_j + M^\top M & E_i \\ E_i^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

Finalmente, aplicando el complemento de Schur se obtienen las LMIs descrita en (37) por el Teorema 1.

El controlador convexo y robusto que se plantea en el Teorema 1, es un panorama general para el diseño de controladores, para ser aplicado a los subsistemas se requiere particularizar las variables. Para el controlador del subsistema $x - y$ se considera:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{xy}(t), & E_i(t) &= 0 \\ u(t) &= u_{xy}(t), & d(t) &= \Omega(t) \\ K &= K_{xy}. \end{aligned} \quad (41)$$

Para el control del subsistema de rotación se considera:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_r(t), & E_i(t) &= E_r(t) \\ u(t) &= u_r(t), & d(t) &= \Omega(t) \\ K &= K_r. \end{aligned} \quad (42)$$

5. RESULTADOS

La efectividad del control del hexarrotor se demuestra a través de simulaciones en MATLAB Simulink, el cual se requieren de los valores de los parámetros constantes que se encuentran en la Tabla 1.

Table 1. Parámetros

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m	2 kg	k_D	3.1202×10^{-7}
l	0.5 m	$I_x = I_y$	0.0308 kg m ²
g	9.8 m/s ²	I_z	0.0401 kg m ²
k_T	8.5486×10^{-6}	J_p	6.01×10^{-6} kg m ²

Las ganancias de los controladores de cada subsistema se obtienen mediante la caja de herramientas Yalmip y el solucionador Sedumi de MATLAB. K_z es la ganancia para estabilizar la altitud, K_{xy1}, K_{xy2} contiene las ganancias para estabilizar la posición $x - y$ y $K_{r1}, K_{r2}, K_{r3}, K_{r4}$ son las ganancias para estabilizar los ángulos de rotación. Por cuestiones de espacio las matrices de las ganancias calculadas se omiten.

El seguimiento de referencia en los ejes x, y, z se observa en la Figura 3 donde la posición en x tiene una referencia

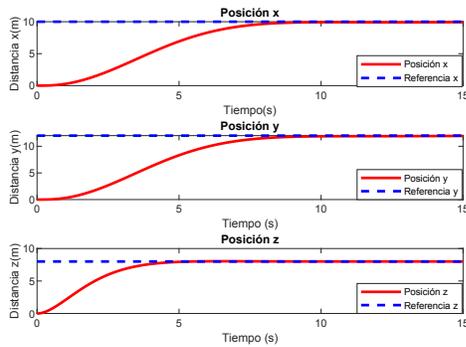


Fig. 3. Seguimiento de referencias

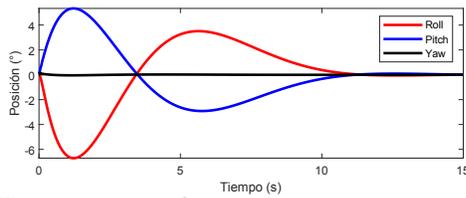


Fig. 4. Posiciones angulares

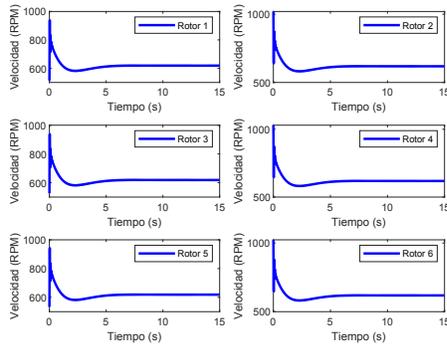


Fig. 5. Señales de control de los seis rotores

de 10 [m], en y 12 [m] y para z 8 [m]. Note que para cuando $t \geq 10$ [s] el VANT se estabiliza en la posición deseada, demostrando su efectividad del controlador.

En la figura 4 se muestra el comportamiento de los ángulos roll, pitch y yaw. No obstante, las posiciones angulares tienen un desplazamiento despreciables cuando realiza los movimientos traslacionales. En la figura 5 se muestran las señales de control de los seis rotores del hexarotor en unidades de RPM y se observa que los motores estarían en un rango de velocidad entre 0 - 1000 RPM y al quedar en hover mantiene una velocidad constante de 618 RPM.

6. CONCLUSIÓN

En este artículo se diseña un control basado en una reescritura convexa a partir del sector no lineal para estabilizar el hexarotor en modo hover. La metodología requiere de un control en cascada, dividiendo el modelo no lineal en subsistemas: altitud, posición $x-y$ y rotación. Los resultados demostrados en la Figura 3 ilustran el buen desempeño del método a pesar de la presencia de la perturbación generada por las velocidades rotacionales de los rotores. Como un trabajo futuro es probar el

algoritmo en un escenario realista contra diferentes tipos de perturbaciones y el ruido de medición inducido por los sensores.

REFERENCES

- Adir, V.G. and Stoica, A.M. (2012). Integral lqr control of a star-shaped octorotor. *Incas Bulletin*, 4(2), 3.
- Ahmed, A., Elias, C.M., and Shehata, O.M. (2020). Control of a hexa-rotor system using various of x-mpc techniques. In *2020 8th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCMA)*, 63–67. IEEE.
- Al-Mahturi, A., Santoso, F., Garratt, M.A., and Anavatti, S.G. (2020). A robust self-adaptive interval type-2 ts fuzzy logic for controlling multi-input-multi-output nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*.
- Altan, A., Aslan, Ö., and Hacıoğlu, R. (2018). Real-time control based on narx neural network of hexarotor uav with load transporting system for path tracking. In *2018 6th international conference on control engineering & information technology (CEIT)*, 1–6. IEEE.
- Kim, H. and Lee, D.J. (2016). Nonlinear attitude stabilization and tracking control techniques for an autonomous hexa-rotor vehicle. In *Wireless Communications, Networking and Applications*, 1279–1292. Springer.
- Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H.O. (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4), 333–341.
- Ortiz-Torres, G., Castillo, P., Sorcia-Vázquez, F.D., Rumbo-Morales, J.Y., Brizuela-Mendoza, J.A., De La Cruz-Soto, J., and Martínez-García, M. (2020). Fault estimation and fault tolerant control strategies applied to vtol aerial vehicles with soft and aggressive actuator faults. *IEEE Access*, 8, 10649–10661.
- Rajappa, S., Ryll, M., Bühlhoff, H.H., and Franchi, A. (2015). Modeling, control and design optimization for a fully-actuated hexarotor aerial vehicle with tilted propellers. In *2015 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*, 4006–4013. IEEE.
- Rosales, C., Soria, C.M., and Rossomando, F.G. (2019). Identification and adaptive pid control of a hexacopter uav based on neural networks. *International journal of Adaptive control and signal processing*, 33(1), 74–91.
- Roy, R., Islam, M., Sadman, N., Mahmud, M., Gupta, K.D., and Ahsan, M.M. (2021). A review on comparative remarks, performance evaluation and improvement strategies of quadrotor controllers. *Technologies*, 9(2), 37.
- Shawky, D., Yao, C., and Janschek, K. (2021). Nonlinear model predictive control for trajectory tracking of a hexarotor with actively tiltable propellers. In *2021 7th International Conference on Automation, Robotics and Applications (ICARA)*, 128–134. IEEE.
- Zhang, J., Gu, D., Deng, C., and Wen, B. (2019). Robust and adaptive backstepping control for hexacopter uavs. *Ieee Access*, 7, 163502–163514.