

A Robust Interval Predictive Control for Perturbed Unicycle Mobile Robots

Héctor Ríos^{*,**} Manuel Mera^{***} Tarek Raïssi^{****}
Denis Efimov^{†,‡}

^{*} Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, México (e-mail: hriosb@lalaguna.tecnm.mx)

^{**} CONAHCYT IxM, México.

^{***} Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UPT, México. (e-mail: mlmera@ipn.mx)

^{****} Conservatoire National des Arts et Métiers, France. (e-mail: tarek.raïssi@cnam.fr)

[†] Inria, Univ. Lille, CNRS, UMR 9189-CRISTAL, France. (e-mail: Denis.Efimov@inria.fr)

[‡] Department of Control Systems and Informatics, Information Technologies Mechanics and Optics University, Russia.

Abstract: In this paper, we design a robust control strategy to solve the trajectory-tracking problem for perturbed unicycle mobile robots. The design is composed of an Integral Sliding-Mode Control, an interval predictor-based state-feedback controller and a Model Predictive Control. The controller handles some perturbations in the kinematic model, and state and input constraints that are related to workspace constraints and saturation on the actuators, respectively. The proposed approach ensures the exponential convergence to zero of the tracking error. Some simulation results illustrate the performance of the proposed approach.

Keywords: Unicycle Mobile Robots, Interval Predictive Control, Sliding-Mode Control.

1. INTRODUCTION

Los robots móviles tipo unicycle (UMRs) han sido muy estudiados durante las últimas décadas debido a su gran gama de aplicaciones (ver, *e.g.*, Zhang and Liu (2014) and Khaledyan et al. (2015)). Una de las dificultades principales en el diseño de control para este tipo de sistemas es el hecho de que el modelo cinemático no cumple las condiciones necesarias de Brockett (Brockett, 1982). Por lo tanto, para este tipo de robots, se requiere del diseño de controladores por retroalimentación de estados no-suaves o con ganancias variantes en el tiempo. Además, como se menciona en Tayebi and Rachid (2000) y Wang and Low (2008), incluso cuando no es posible considerar fuerzas externas en el modelo cinemático, existen fenómenos no-modelados u otras señales, *e.g.*, derrape y corrimiento en las ruedas, y señales de control corruptas, que deben considerarse para el diseño del controlador. Asimismo, existen ciertas aplicaciones en donde estos UMRs deben

moverse en espacios de trabajo restringidos, y además, siempre existen limitaciones de energía. Estos efectos se pueden ver como restricciones tanto en los estados como en las entradas. El diseño de controladores para seguimiento de trayectorias, considerando las restricciones no-holónomas, perturbaciones, y restricciones físicas del sistema, es un problema muy desafiante.

En relación a la literatura donde se toman en cuenta perturbaciones en el modelo cinemático, en Thomas et al. (2019), se estudia el problema de estabilización de postura en tiempo finito para UMRs a través de técnicas de control por modos deslizantes (SMC) y retroalimentación de salida. El esquema propuesto considera los efectos del corrimiento en las ruedas, caracterizados como perturbaciones aditivas. En Mera et al. (2020), se propone un esquema de SMC de primer orden que lidia con el problema de seguimiento de trayectorias en UMRs perturbados. Este esquema considera los efectos del derrape y corrimiento en las ruedas, y restricciones de saturación en la entrada, garantizando la convergencia asintótica a cero del error de seguimiento. En Rochel et al. (2022) se presenta un controlador robusto, basado en el algoritmo Super-Twisting, que garantiza la convergencia asintótica a cero del error de seguimiento, a pesar de la presencia de los efectos del derrape y corrimiento en las ruedas.

* Este trabajo se desarrolla en el marco de la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados, TecNM; y fue apoyado por los proyectos SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597 y ECOS NORD M20M04. Héctor Ríos agradece el apoyo por parte de CONAHCYT IxM CVU 270504 Proyecto 922 y de Proyectos TecNM. Manuel Mera agradece el apoyo por parte del proyecto IPN-SIP 20230170.

Este controlador es continuo pero solo ofrece resultados locales. Un controlador robusto en tiempo finito se presenta en Rocha et al. (2022) para sistemas no-holónomos de orden arbitrario. Este controlador puede ser aplicado a un UMR pero las perturbaciones que pueden considerarse no tienen sentido físico para el UMR. Además, ninguno de los trabajos mencionados considera restricciones en los estados.

En el contexto del diseño de control de seguimiento de trayectorias para UMRs restringidos, el esquema de control predictivo por modelo (MPC) (ver, *e.g.*, Mayne et al. (2000) y Mayne et al. (2009)) es muy popular. Por ejemplo, en Xiao et al. (2017) se propone un MPC basado en redes neuronales para estabilizar un robot móvil, tomando en cuenta restricciones en el estado, en la entrada y la presencia de algunas perturbaciones aditivas. En el mismo sentido, un par de esquemas basados en MPC; concretamente, un MPC tipo “tubo” y un MPC nominal robusto, se presentan en Sun et al. (2018) para el seguimiento de trayectorias en UMRs. Estos esquemas son capaces de lidiar con restricciones en la entrada y perturbaciones aditivas acotadas. En Sun et al. (2020), se propone un esquema MPC con horizonte predictivo adaptable para resolver el problema de seguimiento de trayectorias en UMRs. Este controlador es capaz de lidiar con algunas perturbaciones aditivas y con algunas restricciones en el estado y en la entrada. No obstante, en todos los trabajos mencionados anteriormente, las perturbaciones aditivas consideradas carecen de sentido físico ya que tanto el derrape y corrimiento en las ruedas, como las señales de control corruptas, no pueden representarse a través de perturbaciones aditivas sino de perturbaciones multiplicativas. Además, en todos los trabajos mencionados arriba solo se proporcionan propiedades de estabilidad entrada-estado.

Motivados por estos detalles, *i.e.*, perturbaciones significativas y restricciones de estado/espacio de trabajo y de entrada, en este artículo se propone una estrategia de control robusto que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias en UMRs perturbados, considerando restricciones en el estado y en la entrada de control. La estrategia consta del diseño de una ley de control basada en un esquema de control por modos deslizantes integrales (ISMC), junto con un controlador por retroalimentación de estados, basado en un predictor por intervalos, y un esquema MPC. El controlador propuesto lidia con algunas perturbaciones en el modelo cinemático, y con las restricciones de estado y de entrada, que están relacionadas con el espacio de trabajo y la saturación en los actuadores, respectivamente. El esquema de control garantiza la convergencia exponencial a cero del error de seguimiento a pesar de las perturbaciones consideradas y las restricciones del sistema; además, se relaja el gasto computacional debido a un esquema de control conmutado.

Notación: Denote las funciones trigonométricas $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ y $\text{sinc}(\theta)$ como $s(\theta)$, $c(\theta)$ y $\text{sc}(\theta)$, respectivamente. Una secuencia de números enteros $1, \dots, n$ se denota como

$\overline{1, n}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la norma inducida es la norma espectral, *i.e.*, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$. El conjunto de entradas $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$, tales que su norma L_∞ en $[0, \infty]$ es menor que infinito, *i.e.*, $\|u\|_\infty := \|u\|_{[0, \infty]} = \text{esssup}_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty$, se denota como $\mathcal{L}_\infty$. Para un par de vectores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y un par de matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, las relaciones $x_1 \leq x_2$ y $A_1 \leq A_2$ se entienden elemento a elemento. En el mismo sentido, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, defina $A^+ = \max\{0, A\}$, $A^- = A^+ - A$ y $|A| = A^+ + A^-$, de manera similar para vectores. Para una matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la notación $P \prec 0$ ($P \succeq 0$) significa que P es definida negativa (positiva). Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama Metzler cuando todos los elementos fuera de la diagonal son no-negativos. El término $\text{He}(A)$ denota $A + A^T$, para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el modelo cinemático perturbado de un UMR:

$$\dot{\theta} = [1 + d_1(t)]\omega, \quad (1a)$$

$$\dot{x} = [1 + d_2(t)]c(\theta)v, \quad (1b)$$

$$\dot{y} = [1 + d_2(t)]s(\theta)v, \quad (1c)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ denotan el punto medio entre las ruedas y $\theta \in \mathbb{R}$ representa el ángulo de orientación del UMR. Las variables v y ω son las velocidades lineal y angular del UMR, y representan las entrada de control. Los términos d_1 y d_2 describen perturbaciones variantes en el tiempo que son multiplicativas, con respecto a las entradas de control, y pueden ser causadas por el proceso interno de control entre las velocidades de comando y las entrada de voltaje/corriente que se envían a los motores (Guerra et al., 2016); o por fenómenos no-modelados como el derrape y corrimiento en las ruedas (Wang and Low, 2008). Se asume que $d_i(t)$ son desconocidas pero acotadas, *i.e.*, $-1 < d_i(t) \leq d_{\max} < 1$, $i = 1, 2$, con constante conocidas $d_{\max}$.

El objetivo de este trabajo es diseñar un controlador de seguimiento de trayectorias para el UMR que sea capaz de compensar las perturbaciones multiplicativas y que alcance la trayectoria deseada, tomando en cuenta algunas restricciones en el estado y en la entrada, *i.e.*, $x(t) \in \mathbb{X} = [x_{\min}, x_{\max}] \subset \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{Y} = [y_{\min}, y_{\max}] \subset \mathbb{R}$, $v(t) \in \mathbb{V} = [-v_{\max}, v_{\max}] \subset \mathbb{R}$, y $\omega(t) \in \mathbb{W} = [-\omega_{\max}, \omega_{\max}] \subset \mathbb{R}$, para todo $t \geq t_0$, y para ciertos conjuntos dados $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{V}$, y $\mathbb{W}$.

3. DINÁMICA DEL ERROR DE SEGUIMIENTO

Se define el error de seguimiento como

$$e_1 = \theta_d - \theta, \quad (2a)$$

$$e_2 = c(\theta)(x_d - x) + s(\theta)(y_d - y), \quad (2b)$$

$$e_3 = c(\theta)(y_d - y) - s(\theta)(x_d - x), \quad (2c)$$

donde x_d , y_d , y θ_d vienen de un modelo cinemático de referencia para el UMR, *i.e.*, $\dot{\theta}_d = \omega_d$, $\dot{x}_d = c(\theta_d)v_d$, $\dot{y}_d = s(\theta_d)v_d$, donde v_d y ω_d son las velocidades lineal y

angular de referencia, respectivamente. Estas velocidades se asumen continuas y acotadas por ciertas constantes positivas $\underline{v}_d$, $\bar{v}_d$, y $\bar{\omega}_d$, i.e., $0 < \underline{v}_d < v_d(t) \leq \bar{v}_d$, y $\|\omega_d\|_\infty \leq \bar{\omega}_d$, tales que $v_d(t) \in \mathbb{V}$ y $\omega_d(t) \in \mathbb{W}$, para todo $t \geq 0$. Además, las trayectorias del modelo de referencia también deben de cumplir las restricciones de estado, i.e., $x_d(t) \in \mathbb{X}$ y $y_d(t) \in \mathbb{Y}$, para todo $t \geq 0$.

Por lo tanto, la dinámica del error de seguimiento está dada como

$$\dot{e}_1 = -\omega d_1(t) + \tau_1, \quad (3a)$$

$$\dot{e}_2 = [1 + d_1(t)]\omega e_3 - v d_2(t) + \tau_2, \quad (3b)$$

$$\dot{e}_3 = -[1 + d_1(t)]\omega e_2 + v d_3(e_1), \quad (3c)$$

con las entradas de control virtual τ_1 y τ_2 cumpliendo

$$\tau_1 = \omega_d - \omega, \quad (4a)$$

$$\tau_2 = v_d c(e_1) - v. \quad (4b)$$

Note que la dinámica del error (3) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{e} = A(\rho)e + B[\tau + F(\rho)d], \quad (5)$$

donde $e = (e_1, e_2, e_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $d = (d_1, d_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, y

$$A(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1 + d_1(t)]\omega \\ v_{dsc}(e_1) & -[1 + d_1(t)]\omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad F(\rho) = \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix},$$

con el vector de “variables programables” como $\rho = (v_{dsc}(e_1), v, \omega, d_1)^\top \in \mathbb{R}^5$, el cual debe ser acotado. Es claro que el sistema (5) está en una forma lineal con parámetros variantes (LPV) y las restricciones en el estado y en la entrada están dadas como sigue:

$$\mathbb{E} = \{e \in \mathbb{R}^3 : (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R} \times [-\bar{x}y, \bar{x}y] \times [-\bar{x}y, \bar{x}y]\}, \quad (6)$$

$$\mathbb{U} = \{\tau \in \mathbb{R}^2 : (\tau_1, \tau_2) \in [-\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_1] \times [-\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_2]\}, \quad (7)$$

donde $\bar{x}y = (x_{\max} - x_{\min}) + (y_{\max} - y_{\min})$, $\bar{\tau}_1 = \bar{\omega}_d + \omega_{\max}$, y $\bar{\tau}_2 = \bar{v}_d + v_{\max}$. Además, note que siempre existe una matriz Metzler $A_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, y algunas matrices $A_j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $j = \bar{1}, n$, para alguna $n \in \mathbb{N}_+$ tales que las siguientes igualdades

$$A(\rho) = A_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho) A_j, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho) = 1, \quad (8)$$

con $\alpha_j(\rho) \in [0, 1]$, se satisface para el sistema (5). De este modo, ahora el problema es diseñar una ley de control robusta τ tal que las trayectorias del sistema (5) converjan a cero a pesar de las perturbaciones d , tomando en cuenta las restricciones en el estado y la entrada (6) y (7), i.e., $e(t) \in \mathbb{E}$ y $\tau(t) \in \mathbb{U}$, para todo $t \geq 0$.

Entonces, la idea es diseñar un controlador con la siguiente estructura:

$$\tau = u_0 + u_1. \quad (9)$$

El controlador (9) está dividido en dos partes. El término no-lineal u_1 es el ISMC que compensará los efectos de las perturbaciones acopladas a la señal de control, desde

el inicio, tomando en cuenta únicamente las restricciones en la entrada; mientras que u_0 representa el control nominal, que está compuesto por un controlador por retroalimentación de estados, basado en un predictor por intervalos, y un esquema MPC que lidiará con las restricciones en el estado y la entrada.

De acuerdo a (7), $\|\tau\| \leq \tau_{\max}$, para una $\tau_{\max} > 0$ dada; entonces, se puede asignar un esfuerzo de control específico para cada parte del controlador (9), i.e., $\|u_0\| \leq u_{0\max}$ y $\|u_1\| \leq u_{1\max}$, con algunas constantes $u_{0\max}, u_{1\max} > 0$ tales que $u_{0\max} + u_{1\max} \leq \tau_{\max}$.

4. DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO

El enfoque de control propuesto garantiza la estabilidad exponencial de la dinámica del error de seguimiento. En las siguientes secciones vamos a describir la metodología propuesta.

4.1 Control por Modos Deslizantes Integrales

Se define la siguiente variable de deslizamiento

$$s(e(t)) = G[e(t) - e(0)] - G \int_0^t [A_0 e(\sigma) + B u_0(\sigma)] d\sigma, \quad (10)$$

donde $G \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ es tal que $\det(GB) \neq 0$. La manera óptima de diseñar G es $G = B^\top$ o $G = (B^\top B)^{-1} B^\top$, para más detalles se puede ver i.e., Utkin et al. (1999) y Castaños and Fridman (2006). La dinámica de la variable de deslizamiento está dada por

$$\dot{s} = GB[u_1 + F(\rho)d] + G \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho) A_j e. \quad (11)$$

Entonces, se propone el ISMC u_1 como

$$u_1 = -\zeta(e) \frac{(GB)^\top s}{\|(GB)^\top s\|}, \quad (12)$$

con una ganancia positiva $\zeta(e) > 0$, para todo $e \in \mathbb{E}$. El siguiente lema proporciona las condiciones para asegurar la convergencia en tiempo-finito de la variable de deslizamiento a cero, cumpliendo las restricciones en la entrada.

Lema 1. Sea el ISMC (12), con $G = B^\top$, aplicado al sistema (11), para una $u_{1\max} > 0$ dada. Si la ganancia $\zeta(e)$ se selecciona como

$$\zeta(e) = \gamma + F_{\max} + A_{\max} \|e\|, \quad (13)$$

con $F_{\max} = d_{\max} \max(v_{\max}, \omega_{\max})$, $A_{\max} = \sum_{j=1}^n \|A_j\|$, y alguna $\gamma > 0$ tal que $0 < \gamma \leq u_{1\max} - F_{\max} - A_{\max} e_{\max}$, con $e_{\max} = \sqrt{\pi^2 + 2\bar{x}y^2}$, se cumple para una $u_{1\max} > 0$ dada; entonces, $s = 0$ es Uniformemente Estable en Tiempo-Finito.

Las pruebas se omiten debido a restricciones de espacio.

Así, el controlador robusto u_1 lidiará con las perturbaciones $F(\rho)d$ y con parte de las incertidumbres paramétricas $\sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho) A_j e$, satisfaciendo $\|u_1\| \leq u_{1\max}$.

Note que el término $F(\rho)d$ está acoplado a la señal de control, y por lo tanto, se puede compensar completamente desde el inicio. Sin embargo, dado que las incertidumbres paramétricas $\sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho)A_j e$ no están acopladas a la señal de control, solo se puede compensar su proyección en el espacio acoplado de la matriz B .

Además, es posible fijar $u_{1\max}$ de acuerdo a la cota de las perturbaciones, *e.g.*, $u_{1\max} = 1.1(F_{\max} + A_{\max}e_{\max})$; y entonces, asignar el resto del esfuerzo de control a u_0 , *i.e.*, $u_{0\max} \leq \tau_{\max} - 1.1(F_{\max} + A_{\max}e_{\max})$.

4.2 Predictor por Intervalos

Dado que se da el modo deslizante desde $t = 0$, de (11) y recordando que $GB = I_2$, el control equivalente es igual a

$$u_{1eq} = -G \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho)A_j e - F(\rho)d. \quad (14)$$

Por lo tanto, tomando en cuenta (8) y sustituyendo (14) en (5), se obtiene que la dinámica del sistema, en el modo deslizante, está dada por

$$\dot{e} = \left[A_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho)\tilde{A}_j \right] e + Bu_0, \quad (15)$$

donde $\tilde{A}_j = (I_3 - BG)A_j$. Entonces, de acuerdo con Efimov et al. (2013a) y dos Reis de Souza et al. (2022), se tiene que $-\bar{A}e^- - \underline{A}e^+ \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j(\rho)\tilde{A}_j e \leq \bar{A}e^+ + \underline{A}e^-$, donde $\bar{A} = \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j^+$, $\underline{A} = \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j^-$, y con un par de vectores $\underline{e}, \bar{e} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\underline{e} \leq e \leq \bar{e}$. Así, es posible diseñar el siguiente predictor por intervalos (Leurent et al., 2020) para el sistema (15)

$$\dot{z} = \mathcal{A}_0 z + \mathcal{A}_1 z^+ + \mathcal{A}_2 z^- + \mathcal{B}u_0, \quad (16)$$

donde $z = (\underline{e}^\top, \bar{e}^\top)^\top \in \mathbb{R}^6$, y las matrices del sistema están dadas como

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{A} \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{A} & 0 \\ \underline{A} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B^\top & B^\top \end{pmatrix}^\top.$$

Entonces, para estabilizar la dinámica del error de seguimiento (5), necesitamos diseñar una retroalimentación de estados u_0 que lleve las trayectorias del sistema (16) a cero (ver, *e.g.*, Efimov et al. (2013b)).

4.3 Control por Retroalimentación de Estado

La señal de control u_0 se propone como

$$u_0(t) = \begin{cases} \mathcal{U}_0(t), & z(t_i) \notin \mathbb{E}_f, \\ \bar{u}_0(t), & z(t_i) \in \mathbb{E}_f, \end{cases} \quad (17)$$

donde $\mathcal{U}_0$ es la señal de control que proporcionará el MPC, para todo $t \in [t_i, t_i + h)$, con $h \in (0, T)$ y T como el tiempo de aplicación y el intervalo de predicción para el MPC, respectivamente; y $\bar{u}_0$ representa la ley de control por retroalimentación de estado. El conjunto de conmutación $\mathbb{E}_f$ se definirá más adelante.

El controlador por retroalimentación de estado $\bar{u}_0$ se diseña, con base en (16), como

$$\bar{u}_0 = K_0 z + K_1 z^+ + K_2 z^-, \quad (18)$$

donde $K_0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$ son las ganancias a diseñar. El siguiente lema proporciona una manera constructiva de diseñar estas ganancias para asegurar la convergencia de las trayectorias del sistema (16) a cero.

Lema 2. *Sea la ley de control (18) aplicada al sistema (16), i.e., $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$. Asuma que existen dos vectores $\underline{e}_0, \bar{e}_0 \in \mathbb{R}^3$, tales que $\underline{e}_0 \leq e(0) \leq \bar{e}_0$, y que existen matrices diagonales $0 < X_l \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $0 \leq R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $Q_l, R_0 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, y matrices $Y_l \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$, $l = \bar{0}, 2$, tales que las siguientes desigualdades matriciales*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \star & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \star & \star & \Omega_{33} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (19)$$

$$Q_0 + \min\{Q_1, Q_2\} + 2\min\{R_1, R_2\} > 0, \quad (20)$$

$$\Omega_{11} = \text{He}(\mathcal{A}_0 X_0 + \mathcal{B} Y_0) + Q_0,$$

$$\Omega_{12} = \mathcal{A}_1 X_1 + \mathcal{B} Y_1 + X_0 \mathcal{A}_0^\top + Y_0^\top \mathcal{B}^\top + R_1,$$

$$\Omega_{13} = \mathcal{A}_2 X_2 + \mathcal{B} Y_2 - X_0 \mathcal{A}_0^\top - Y_0^\top \mathcal{B}^\top - R_2,$$

$$\Omega_{22} = \text{He}(\mathcal{A}_1 X_1 + \mathcal{B} Y_1) + Q_1,$$

$$\Omega_{23} = \mathcal{A}_2 X_2 + \mathcal{B} Y_2 - X_1 \mathcal{A}_1^\top - Y_1^\top \mathcal{B}^\top + R_0,$$

$$\Omega_{33} = Q_2 - \text{He}(\mathcal{A}_2 X_2 + \mathcal{B} Y_2),$$

son factibles. Si las ganancias se diseñan como $K_l = Y_l X_l^{-1}$, $l = \bar{0}, 2$; entonces, las trayectorias del sistema (16) convergen a cero exponencialmente.

Es importante decir que la estructura diagonal requerida para $P_0 = X_0^{-1}$ es factible dado que la existencia de una matriz diagonal P_0 , como solución de la ecuación de Lyapunov $\text{He}(P_0 \mathcal{A}_0) \prec 0$, es equivalente a la estabilidad de una matriz Metzler $\bar{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B} K_0$. De esta manera, el controlador (18) proporciona convergencia exponencial a cero para el predictor por intervalos (16). Además, debido a que $\mathcal{A}_0$ es una matriz Metzler y $\underline{e}_0 \leq e(0) \leq \bar{e}_0$, para un par de vectores $\underline{e}_0, \bar{e}_0 \in \mathbb{R}^3$, la propiedad de inclusión $\underline{e}(t) \leq e(t) \leq \bar{e}(t)$ se satisface (ver *e.g.*, Efimov et al. (2013b) y Efimov et al. (2012)); por lo tanto, las trayectorias del sistema (3) también convergerán a cero y el problema considerado estará resuelto siempre y cuando se cumpla que $x(t) \in \mathbb{X}$, $y(t) \in \mathbb{Y}$, $v(t) \in \mathbb{V}$, y $\omega(t) \in \mathbb{W}$, para todo $t \geq 0$.

En este momento, podemos definir el conjunto $\mathbb{E}_f$ de la siguiente manera

$$\mathbb{E}_f = \{z \in \mathbb{R}^6 : V_z(z) \leq \beta^{-1} \varepsilon\}, \quad (21)$$

donde $V_z = z^\top P_0 z + z^\top P_1 z^+ - z^\top P_2 z^-$, ε es una constante positiva, y $\beta = \min_{i=\bar{1}, \bar{6}} \lambda_i [\Phi(P_0 + P_1^+ + P_2^+)^{-1}]$, con $\Phi = \bar{Q}_0 + \min\{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\} + 2\min\{\bar{R}_1, \bar{R}_2\}$, y $X_l = P_l^{-1}$, $\bar{Q}_l = P_l Q_l P_l$, $\bar{R}_l = P_l R_l P_l$, para $l = \bar{0}, 2$. Es claro que para cualquier $\varepsilon > 0$, $\mathbb{E}_f$ es un conjunto invariante para el sistema (16); y además, todas las trayectorias dentro de $\mathbb{E}_f$ convergerán a cero. De esta manera, siempre es posible seleccionar ε tal que $\mathbb{E}_f \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, *i.e.*, tal que $x(t) \in \mathbb{X}$ y $y(t) \in \mathbb{Y}$ se cumplen para todo $t \geq t_f \geq 0$.

4.4 Control Predictivo por Modelo

Antes de seguir con la descripción del esquema MPC, es necesario introducir la siguiente suposición:

Suposición 1. *Existen $\zeta(e)$, K_0 , K_1 , y K_2 , satisfaciendo las condiciones de los Lemas 1 y 2, tales que*

$$-\zeta(e(t)) \frac{(GB)^\top s(t)}{\|(GB)^\top s(t)\|} + K_0 z(t) + K_1 z^+(t) + K_2 z^-(t) \in \mathbb{U},$$

para cualquier $z \in \mathbb{E}_f$ y todo $t \geq t_f \geq 0$.

Esta suposición implica que siempre existe un controlador (9), dado por (12) y (18), tal que el sistema (5) es estabilizable, y dentro de $\mathbb{E}_f$, las restricciones del estado y la entrada se cumplen.

Ahora vamos a describir la aplicación del MPC, que lidiará con las restricciones del estado y la entrada para toda $z(t_i) \notin \mathbb{E}_f$, y que usa el predictor dado en (16), con $u_0(t) = \mathcal{U}_0(t)$. Defina T y $h \in (0, T)$ como el intervalo de predicción y el tiempo de aplicación del MPC, respectivamente. Así, el problema de control óptimo para el algoritmo MPC está dado de la siguiente manera (ver, e.g., Mayne et al. (2000), Mayne et al. (2009), y Leurent et al. (2020)):

Problema 1. *Para unas matrices $0 \preceq W_l \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $l = 0, 1$, y $0 \preceq W_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dadas, y $t_i = ih$, $i \in \mathbb{N}_+$, encontrar las señales de control*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 = & \underset{u: [t_i, t_i+T] \rightarrow \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} z^\top(t_i + T) W_0 z(t_i + T) \\ & + \int_{t_i}^{t_i+T} [z^\top(\sigma) W_1 z(\sigma) + u_0^\top(\sigma) W_2 u_0(\sigma)] d\sigma, \quad (22) \end{aligned}$$

tales que se cumplan las siguientes restricciones: a) $z: [t_i, t_i + T] \rightarrow \mathbb{R}^6$ es una solución de (16); b) $z(\sigma) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ and $u_0(\sigma) \in \mathbb{U}$ para $\sigma \in [t_i, t_i + T]$; c) $z(t_i + T) \in \mathbb{E}_f$.

Las matrices de peso se pueden elegir de la siguiente forma: $W_0 = P_0 + P_1^+ + P_2^+$, $W_1 = \frac{\beta W_0}{2}$, y $W_2 = \frac{\beta W_0}{8}$. Por lo tanto, si este problema de control óptimo es factible, las trayectorias del sistema (16) convergerán al conjunto terminal $\mathbb{E}_f$, cuando $u_0(t) = \mathcal{U}_0(t)$; y entonces, dentro de $\mathbb{E}_f$, cuando $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$, las trayectorias convergerán a cero satisfaciendo las restricciones del estado y la entrada dadas en (6) y (7).

Finalmente, los resultados de los Lemas 1 y 2, y la solución del Problema 1 proporcionan el resultado principal de este trabajo, descrito por el siguiente Teorema.

Teorema 1. *Considere que la Suposición 1, y las condiciones de los Lemas 1 y 2 se cumplen, y que el Problema 1 es factible. Si la ley de control (9), dada por (12) y (17), se aplica al sistema (3); entonces, el origen de la dinámica del error de seguimiento (3) es Uniformemente Exponencialmente Estable y el sistema (1) satisface las restricciones del estado y la entrada dadas en (6) y (7).*

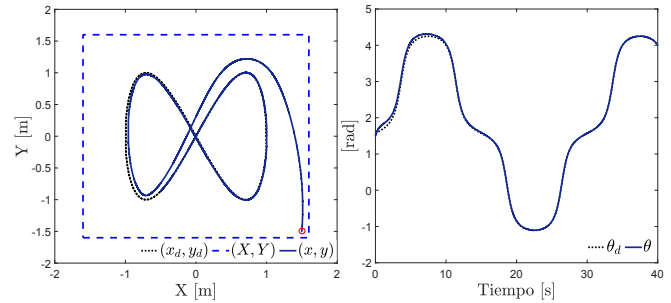


Fig. 1. Trayectorias del Sistema

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las simulaciones se realizaron en MATLAB con el método de discretización de Euler, un paso de muestreo de 0.001[s], la solución de las LMIs se encontró a través de SDPT3-YALMIP en MATLAB, y el MPC se implementó usando el toolbox nlmpe de MATLAB.

Las condiciones iniciales del UMR se toman como $x_0 = 1.5$ [m], $y_0 = -1.5$ [m], y $\theta_0 = 1.5$ [rad], y los conjuntos de restricciones del estado y la entrada están dados por $\mathbb{X} = [-1.6, 1.6]$, $\mathbb{Y} = [-1.6, 1.6]$, $\mathbb{V} = [-5, 5]$, y $\mathbb{W} = [-5, 5]$. La trayectoria deseada está dada por $\omega_d(t) = (\dot{x}_d \ddot{y}_d - \dot{y}_d \ddot{x}_d) / (\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2)$, $v_d(t) = \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}$, $x_d(t) = c(0.21t)$, $y_d(t) = s(0.42t)$, y $\theta_d(t) = \int_0^t \omega_d(\tau) d\tau$; entonces, $\bar{\omega}_d = 0.3094$ [rad/s] y $\bar{v}_d = 0.6918$ [m/s]. Con propósitos de robustez, las perturbaciones externas se toman como $d_1(t) = 0.1s(3t) + 0.5$ y $d_2(t) = 0.1c(t) + 0.5$, y entonces, $d_{\max} = 0.6$. Es posible obtener las matrices A_0 y A_i , $i = 1, 4$, usando un método politópico convexo, que garantice el cumplimiento de (8). Para el predictor por intervalos, las condiciones iniciales se toman como $\bar{z}_0 = (-0.1292, 1.2609, 0.4049)^\top$ y $\bar{z}_0 = (0.2708, 1.6609, 0.8049)^\top$. Los parámetros para el ISMC se fijan siguiendo los resultados del Lema 1, como $F_{\max} = 0.6177$, $A_{\max} = 8.1458$, y $\gamma = 0.5$. Las ganancias del controlador por retroalimentación de estados se obtienen a través de las LMIs del Lema 2, i.e.,

$$\begin{aligned} K_0 &= \begin{pmatrix} -0.05, 0.00, -0.036, -0.05, 0.00, -0.036 \\ 0.00, -0.024, 0.00, 0.00, -0.024, 0.00 \end{pmatrix}, \\ K_1 &= \begin{pmatrix} -0.211, 0.00, -0.09, -126.479, -0.055, -0.09 \\ 0.00, -0.205, 0.00, -0.059, -116.542, 0.00 \end{pmatrix}, \\ K_2 &= \begin{pmatrix} 126.426, -0.078, 0.089, 0.211, 0, 0.089 \\ -0.082, 116.441, 0.00, 0.00, 0.204, 0.00 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El horizonte de predicción se selecciona como $N = 5$, con matrices de peso $W_0 = P_0 + P_1^+ + P_2^+$, $W_1 = \frac{\beta W_0}{2}$, y $W_2 = \frac{\beta W_0}{8}$, y se puede calcular el conjunto de conmutación $\mathbb{E}_f$, de acuerdo a (21), con $\beta = 5.0911$ y $\varepsilon = 0.0011$. Los resultados se muestran en las Figs. 1 y 2. Los resultados descritos en las Figs. 1 y 2 muestran que la estrategia de control propuesta es capaz de asegurar el seguimiento de la trayectoria sin violar las restricciones del estado y la entrada, respectivamente.

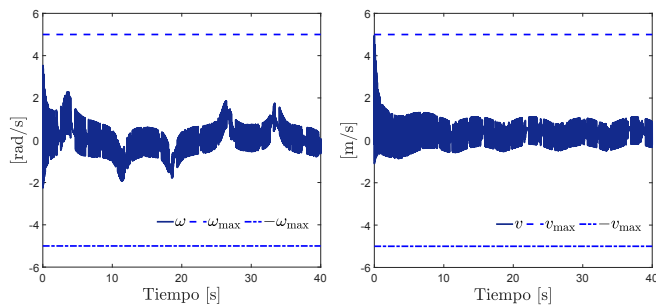


Fig. 2. Señales de Control

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone el diseño de una estrategia de control robusta para el seguimiento de trayectorias en UMRs perturbados, considerando restricciones en el estado y en la entrada. El controlador propuesto se basa en un esquema por ISMC, junto con un controlador por retroalimentación de estados, basado en un predictor por intervalos, y un esquema MPC. El controlador lidia con algunas perturbaciones en el modelo cinemático, y con las restricciones del estado y la entrada, y es capaz de garantizar la convergencia exponencial a cero del error de seguimiento. Además, las síntesis del controlador es constructiva ya que se basa en LMIs.

REFERENCIAS

- Brockett, R.W. (1982). Control theory and singular riemannian geometry. In *New directions in applied mathematics*, 11–27. Springer.
- Castañón, F. and Fridman, L. (2006). Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5), 853–858.
- dos Reis de Souza, A., Efimov, D., and Raïssi, T. (2022). Robust output feedback MPC for LPV systems using interval observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(6), 3188–3195.
- Efimov, D., Fridman, L., Raïssi, T., Zolghadri, A., and Seydou, R. (2012). Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 48(9), 2365–2371.
- Efimov, D., Perruquetti, W., Raïssi, T., and Zolghadri, A. (2013a). Interval observers for time-varying discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12), 3218–3224.
- Efimov, D., Raïssi, T., and Zolghadri, A. (2013b). Control of nonlinear and LPV systems: Interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3), 773–778.
- Guerra, M., Efimov, D., Zheng, G., and Perruquetti, W. (2016). Avoiding local minima in the potential field method using input-to-state stability. *Control Engineering Practice*, 55, 174–184.
- Khaledyan, M., Liu, T., Fernandez-Kim, V., and de Queiroz, M. (2015). Flocking and target interception control for formations of nonholonomic kinematic agents. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 28(4), 1603–1610.
- Leurent, E., Efimov, D., and Maillard, O.A. (2020). Robust-adaptive interval predictive control for linear uncertain systems. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control*, 1429–1434. Jeju Island, Republic of Korea.
- Mayne, D.Q., Ravokic, S.V., Findeisen, R., and Allgower, F. (2009). Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: time-varying case. *Automatica*, 45, 2082–2087.
- Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Sokaert, P.O.M. (2000). Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 36, 789–814.
- Mera, M., Ríos, H., and Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102, 104548.
- Rocha, E., Castañón, F., and Moreno, J.A. (2022). Robust finite-time stabilisation of an arbitrary-order non-holonomic system in chained form. *Automatica*, 135, 109956.
- Rochel, P., Ríos, H., Mera, M., and Dzul, A. (2022). Trajectory tracking for uncertain unicycle mobile robots: A super-twisting approach. *Control Engineering Practice*, 122, 105078.
- Sun, Z., Dai, L., Liu, K., Xia, Y., and Johansson, K. (2018). Robust MPC for tracking constrained unicycle robots with additive disturbances. *Automatica*, 90, 172–184.
- Sun, Z., Xia, Y., Dai, L., and Campoy, P. (2020). Tracking of unicycle robots using event-based MPC with adaptive prediction horizon. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 25(2), 739–749.
- Tayebi, A. and Rachid, A. (2000). Adaptive controller for non-holonomic mobile robots with matched uncertainties. *Advanced Robotics*, 14(2), 105–118.
- Thomas, M., Bandyopadhyay, B., and Vachhani, L. (2019). Finite-time posture stabilization of the unicycle mobile robot using only position information: A discrete-time sliding mode approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(6), 1990–2006.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (1999). *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London.
- Wang, D. and Low, C.B. (2008). Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: Control design perspective. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(3), 676–687.
- Xiao, H., Li, Z., Yang, C., Zhang, L., Yuan, P., Ding, L., and Wang, T. (2017). Robust stabilization of a wheeled mobile robot using model predictive control based on neurodynamics optimization. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(1), 505–516.
- Zhang, M. and Liu, H. (2014). Game-theoretical persistent tracking of a moving target using a unicycle-type mobile vehicle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(11), 6222–6233.