

Finite-Time Controller for a Class of Non-holonomic System: The Heisenberg System

Manuel Mera* Héctor Ríos**,***

* *ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México. E-mail: mmerah@ipn.mx*

** *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México. E-mail: hrriosb@correo.itlalaguna.edu.mx*

*** *CONAHCYT IxM, C.P. 03940, CDMX, México.*

Abstract: This paper proposes a novel finite-time controller for the stabilization problem of the Heisenberg system. The resulting controller is globally bounded and only requires selecting and tuning two parameters. Additionally, this control design allows us to obtain some estimations for the settling-time function. A simulation is included to illustrate these properties and support the implementability of the design.

Keywords: Heisenberg System, Non-holonomic System, Nonlinear Control

1. INTRODUCCIÓN

Es conocido que los sistemas no holónomos no cumplen la conocida condición necesaria de Brockett para la estabilización por realimentación estática suave (Brockett (1982)). Por lo que, el diseño de controladores por realimentación de estado no suaves y variantes en tiempo para esta clase de sistemas no sólo es interesante desde un punto de vista teórico, sino un requerimiento para la regulación y estabilización de esta clase de sistemas. Además, en años recientes el estudio de esta clase de sistemas se ha popularizado debido principalmente al incremento de las aplicaciones que involucran sistemas mecánicos, tales como robots móviles (Li et al. (2020)), motores de inducción alimentados por corriente (Ghommam et al. (2010)), vehículos terrestres (Ghommam et al. (2010)), y otros vehículos y robots no convencionales (ver Lambert et al. (2020), Takahashi et al. (2022) Lambert et al. (2020) y Takahashi et al. (2022)).

De manera general, algunos resultados relevantes recientes en el área de control aplicado a esta clase de sistemas, incluyen tanto el desarrollo de controladores para el seguimiento de trayectorias (Azzabi y Nouri (2021), Chen et al. (2020)), como para la regulación y estabilización (Huang y Su (2020), Gao et al. (2020)). Además, se han desarrollado controladores para esta clase de sistemas que aseguran alguna clase de convergencia más rápida que la exponencial tales como convergencia al origen en tiempo fijo (Gao et al. (2020)) y tiempo predefinido (Sánchez-Torres et al. (2020)), sin embargo, es sabido que para

asegurar estas propiedades de manera global se requieren funciones de control no acotadas, lo cual en la práctica resulta inviable.

Por otro lado, la convergencia en tiempo fijo se ha probado viable e implementable considerando las limitaciones físicas de los sistemas con los que se trabaja. Por lo que es un punto intermedio para asegurar una convergencia más rápida que la exponencial al origen con señales de control posiblemente acotadas. Para algunos ejemplos recientes de controladores que aseguran esta propiedad para sistemas no holónomos y sus aplicaciones es posible referirse a Rocha et al. (2022), Mobayen (2015).

El sistema de Heisenberg, nombrado de esta manera debido a que los campos vectoriales que lo componen generan la llamada álgebra de Heisenberg (Bloch (2003), Vershik y Gershkovich (1988)); también conocido como el integrador no holónimo, es un sistema no lineal difeomórfico a muchos modelos de sistemas físicos (algunos ejemplos se pueden encontrar en Defoort et al. (2009) y Rehan et al. (2019)). Por tal razón, el sistema de Heisenberg, y su forma canónica encadenada, se han empleado de manera frecuente como referentes para el diseño de controladores y el estudio de la estabilidad de sistemas no holónomos (ver, *e.g.*, Defoort y Djemaï (2010), Marchand y Alamir (2003) y Rocha et al. (2022)).

Un enfoque relevante de diseño que se ha empleado de manera amplia para el desarrollo de controladores discontinuos que aseguren la convergencia en tiempo finito al origen de los estados del sistema de Heisenberg, es el enfoque por modos deslizantes (MD). Principalmente,

debido a que no sólo provee de propiedades de convergencia en tiempo finito para el sistema en lazo cerrado, sino también garantiza, bajo ciertas condiciones, la robustez e insensibilidad a cierta clase de perturbaciones (Bloch y Drakunov (1996), Floquet et al. (2004), Mera et al. (2020)).

Contrastando con el enfoque por MD el controlador propuesto no requiere la selección ni diseño de una variedad deslizante. En su lugar, explota la estructura del sistema de Heisenberg y la forma en la cuál los subsistemas que lo componen interactúan y generan la evolución de las trayectorias de los estados en \mathbb{R}^3 . El diseño, como se mostrará más adelante, es intuitivo y la sintonización de las ganancias es sencilla. Algunos otros aspectos relevantes de la ley de control propuesta se enumeran a continuación:

- El controlador obtenido asegura la convergencia en tiempo finito de los estados del sistema al origen.
- La señal de control resultante está acotada globalmente.
- La simplicidad estructural del control facilita su implementación, esto incluye la selección de parámetros y su sintonización. Particularmente, sólo es necesario seleccionar dos parámetros.
- Este enfoque de control se puede aplicar directamente a muchos sistemas físicos (tales como robots móviles, vehículos autónomos aéreos, terrestres y marítimos, y motores eléctricos) realizando ajustes menores.

La estructura del resto del artículo es la siguiente. Algunas definiciones teóricas relevantes se incuyen en la sección 2. La definición del problema se presenta en la sección 3. En la sección 4, se introduce la propuesta de diseño del controlador. Mientras que en la sección 5, una simulación ilustra una posible implementación de la propuesta. Finalmente, en la sección 6, se incluyen algunos comentarios y conclusiones respecto a las posibles extensiones del resultado principal.

Notación. Denote $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ y $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, donde \mathbb{R} es el conjunto de todos los números reales; $\|\cdot\|$ denota la norma euclídeana en \mathbb{R}^n . Defina la función $[a]^\gamma = |a|^\gamma \text{sign}(a)$, para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ y cualquier $a \in \mathbb{R}$. El término S^1 es la 1-esfera. $SO(2)$ representa el grupo especial ortogonal en \mathbb{R}^2 , cualquier elemento de $SO(2)$ representa una rotación estándar en \mathbb{R}^2 , definida para $\theta \in S^1$, por la matriz

$$\mathbf{R}(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

2. PRELIMINARES

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado. La función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se asume local uniformemente acotada en t . Para f localmente medible pero discontinua respecto a x , las soluciones se entienden en el sentido de Filippov

(1988). Esto es, $x(t, x_0)$ es una solución de (1) si ésta es absolutamente continua, y si satisface la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in K[f](t, x) = \overline{\text{co}} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu N = 0} f(t, B(x, \varepsilon) \setminus N),$$

donde $\overline{\text{co}}(M)$ representa la cerradura convexa del conjunto M , $B(x, \varepsilon)$ representa una bola centrada en x con radio ε , μ es la medida de Lebesgue. Nótese que las intersecciones se toman sobre todos los conjuntos N de medida cero, para todo $\varepsilon > 0$.

Sea Ω una vecindad abierta del origen en \mathbb{R}^n , $\mathbf{0} \in \Omega$.

Definición 1. Khalil (2002); Polyakov (2012). En el punto de equilibrio $x = 0$, el sistema (1) se dice

a) Uniformemente Estable (UE) si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que para cualquier $x_0 \in \Omega$, si $\|x_0\| \leq \delta(\epsilon)$ entonces $\|x(t, x_0)\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq t_0$, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$;

b) Uniformemente Estable en Tiempo Finito (UETF) si es UE y converge en tiempo finito a Ω , i.e. para cualquier $x_0 \in \Omega$ existe $0 \leq T_{x_0} < +\infty$ tal que $x(t, t_0, x_0) = 0$ para todo $t \geq t_0 + T_{x_0}$, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$. A la función $T_0(x_0) = \inf\{T_{x_0} \geq 0 : x(t, x_0) = 0 \forall t \geq t_0 + T_{x_0}\}$ se le conoce como **el tiempo de asentamiento del sistema** (1).

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces $x = 0$ se dice Globalmente Uniformemente Estable (GUE), o Globalmente Uniformemente Estable en Tiempo Finito (GUETF), respectivamente.

3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La dinámica del sistema de Heisenberg está dada por

$$\dot{z}(t) = Y^\top(t) \mathbf{J} X(t), \quad (2)$$

$$\dot{X}(t) = Y(t), \quad (3)$$

donde, $\mathcal{X} = [z, X^\top]^\top \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados del sistema, con las condiciones iniciales $\mathcal{X}_0 = [z_0, X_0^\top]^\top$. La entrada de control es $Y \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz antisimétrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es importante recordar que para estabilizar el origen del sistema (2) – (3), es necesario proporcionar una entrada de control $Y(t)$ que evite estabilizar el origen del subsistema (3) antes de estabilizar el origen de (2).

De otra manera, si $X(T) = 0$, y $z(T) = c \neq 0$ en cualquier instante $T \geq 0$, entonces $z(t) = c$, para todo $t > T$, y para cualquier $Y(t)$.

Considerando esta conocida restricción del sistema de Heisenberg, el objetivo de este artículo es diseñar una entrada de control acotada $Y(t)$ que estabilice el origen del sistema (2)–(3) en tiempo finito, proporcionando una estimación del tiempo de convergencia al origen.

4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Con el fin de estabilizar el sistema (2)–(3) se propone la siguiente ley de control

$$Y(t) = -\gamma \mathbf{R}(\omega(\mathcal{X})) \frac{X(t)}{\|X(t)\|}, \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{X}) &= \text{atan}(\Phi(\mathcal{X})), \\ \Phi(\mathcal{X}) &= \frac{2\beta [z]^{\frac{1}{2}}}{\|X\|}, \end{aligned}$$

con los parámetros escalares a diseñar $\gamma, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y la matriz $\mathbf{R} \in SO(2)$. Note que es posible escribir (4) como

$$Y(t) = -\gamma \cos(\omega(\mathcal{X})) \frac{X(t)}{\|X(t)\|} - \gamma \sin(\omega(\mathcal{X})) \mathbf{J} \frac{X(t)}{\|X(t)\|}.$$

Sustituyendo (4) en (2)–(3), y considerando que $\|\mathbf{J}X\| = \|X\|$, las dinámicas correspondientes en lazo cerrado están dadas por

$$\dot{z}(t) = -\gamma \sin(\omega) \|X(t)\|, \quad (5)$$

$$\dot{X}(t) = -\gamma \mathbf{R}(\omega) \frac{X(t)}{\|X(t)\|}. \quad (6)$$

Entonces, es posible verificar lo siguiente directamente de las definiciones de ω y Φ , para todo $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^3$,

$$\cos(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Phi^2}} > 0, \quad (7)$$

$$\text{sign}(\sin(\omega)) = \text{sign}(\Phi) = \text{sign}(z), \quad (8)$$

$$\Phi \cos(\omega) = \frac{\Phi}{\sqrt{1 + \Phi^2}} = \sin(\omega). \quad (9)$$

Sea $\mathcal{M}_x = \{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 0\}$; y para una constante $\bar{\beta} > 0$, defina el conjunto

$$\mathcal{D}_{\bar{\beta}} = \{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}_x : |\Phi(\mathcal{X})| < \bar{\beta}\},$$

y $\omega_{\bar{\beta}} = \text{atan}(\bar{\beta})$ y $C_{\bar{\beta}} = \cos(\omega_{\bar{\beta}})$. El resultado principal del presente trabajo se da en el siguiente Teorema.

Teorema 1. *El origen de (2)–(3), aplicando la ley de control (4), con $\beta > \frac{|z_0|^{\frac{1}{2}}}{\|X_0\|}$ y $\gamma > 0$, es UETF en $\Omega_{\bar{\beta}} = \mathcal{D}_{\bar{\beta}} \cup \{\mathbf{0}\}$, con $\bar{\beta} = 2\beta$. Además, el tiempo de asentamiento $T_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_0)$, está acotado por arriba por*

$$T_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_0) \leq \frac{\|X_0\|}{\gamma C_{\bar{\beta}}}.$$

La prueba se omite por cuestiones de espacio.

El diseño del controlador se basa intuitivamente en como el sistema de Heisenberg produce el movimiento en \mathbb{R}^3 . Un desplazamiento con velocidad tangencial a la variedad $\|X\| = r$ produce además un desplazamiento en z proporcional a r y a la magnitud de la velocidad. Un movimiento con velocidad radial modifica $\|X\|$, pero no afecta la posición en z . De esta forma, es posible imaginar el movimiento descrito por el sistema de Heisenberg primero como un “tornillo”, i.e., para ascender o descender se debe realizar

una rotación (un movimiento alrededor de un círculo); y después, como un cambio en el radio r .

Así es como funciona el controlador (4). Para $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\|X\|$ se mantiene constante, pero z aumenta o disminuye. Para $\omega = 0$, $\|X\|$ aumenta o disminuye, pero z se mantiene constante. La cantidad $|z_0|^{\frac{1}{2}} \|X_0\|^{-1}$ se puede interpretar como una proporción del número de vueltas alrededor del círculo de radio $\|X_0\|$, requeridas para ascender o descender de z_0 al origen.

Observación 1. *La entrada de control generada por (4) es acotada, i.e.,*

$$\|Y(t)\|^2 = \gamma^2 \frac{X^\top(t)}{\|X(t)\|} \mathbf{R}^2(\omega) \frac{X(t)}{\|X(t)\|} \leq \gamma^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Esto facilita la implementación e incrementa el número de posibles aplicaciones beneficiadas por este diseño.

Observación 2. *Aunque de acuerdo con el Teorema 1, el sistema en lazo cerrado resultante (5)–(6) es sólo UETF en $\mathcal{D}_{\bar{\beta}}$; para $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{R}^3$, siempre existe $\beta > |z_0|^{\frac{1}{2}} \|X_0\|^{-1}$. Por lo tanto, para cualquier $\mathcal{X}_0 \notin \mathcal{M}_x$, el origen del sistema en lazo cerrado siempre es estabilizable en tiempo finito. Además, la cota de $\|Y(t)\|$ no depende de β , y por lo tanto, condiciones iniciales grandes no representan un problema para una posible implementación.*

Observación 3. *El controlador (4) es simple de sintonizar. La implementación del controlador propuesto sólo requiere de la selección de dos parámetros. El parámetro β se puede fijar directamente por las condiciones iniciales, mientras que γ se puede seleccionar de acuerdo a los requerimientos de la aplicación y las restricciones físicas de los actuadores, i.e., amplitud de entrada disponible y tiempo de convergencia.*

Adicionalmente, es de notar que aún cuando la estructura del controlador es un tanto similar a la del enfoque por vector unitario empleada en el diseño de MD para sistemas con múltiples entradas, la variedad \mathcal{M}_x no es una superficie deslizante. De hecho \mathcal{M}_x no debe de ser alcanzada por las trayectorias del sistema antes del origen de (2), puesto que cualquier punto de \mathcal{M}_x es un punto de equilibrio, y el subsistema (2) deja de ser controlable. Esto contrasta totalmente con la selección de la superficie y variable deslizante en el enfoque por vector unitario para MD.

5. SIMULACIONES

Las simulaciones se llevaron a cabo en MATLAB usando el método de Euler con un paso de integración de 0.0001[s]. La entrada de control se diseñó de la manera propuesta en el Teorema 1, considerando los siguientes parámetros: $\gamma = 5$, $z_0 = 2.25$, $X_0 = [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]^\top$ y $\beta = 2 > |z_0|^{\frac{1}{2}} / \|X_0\| = 1.5$. Con esto se obtiene una estimación del tiempo de establecimiento tal que $T_{\mathcal{X}} \leq 1.6125$.

La señal de control $Y(t)$ se muestra en la Figura 1. El plano fase para x_1 y x_2 se muestra en la Figura 2. La evolución

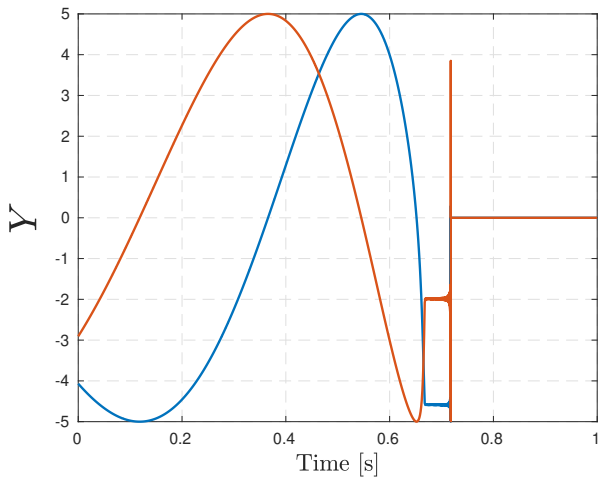


Figura 1. Entrada de Control Y

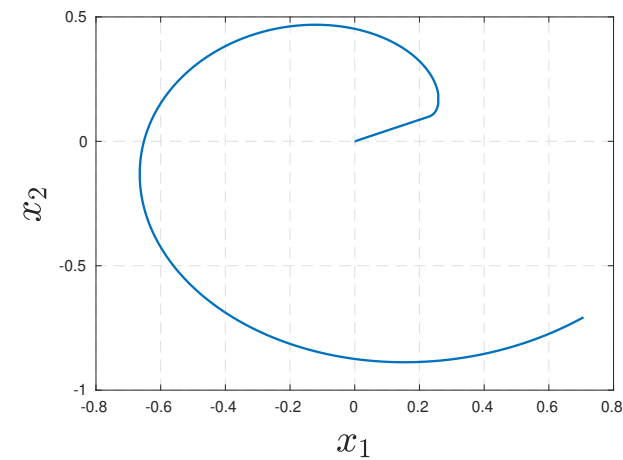


Figura 2. Plano fase x_1 vs. x_2

de las trayectorias del sistema (2)–(3) en el tiempo se presenta en la Figura 3, mientras que las trayectorias en \mathbb{R}^3 se muestran en la Figura 4. Finalmente, la Figura 5 presenta la evolución en el tiempo de la función auxiliar Φ .

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta el diseño novedoso controlador globalmente acotado que asegura la convergencia al origen en tiempo finito de los estados del sistema de Heisenberg. El diseño propuesto es simple de sintonizar e implementar. Además, su estructura es intuitiva, tanto del punto de vista mecánico como del punto de vista de teoría de control. Una simulación se incluye para ilustrar los resultados y complementar la explicación de las ideas principales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado en parte por SEP–CONACYT–ANUIES–ECOS NORD Proyecto 315597. El trabajo de

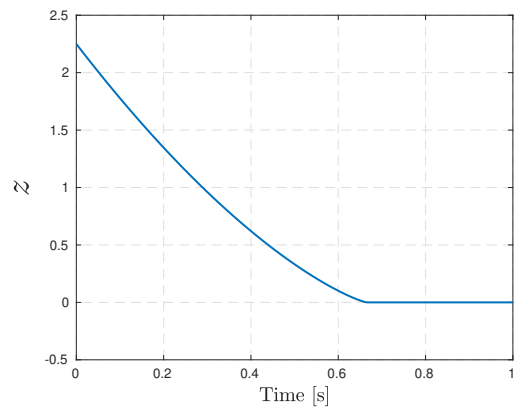
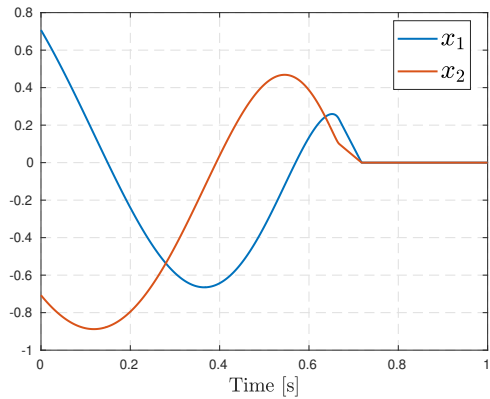


Figura 3. X y z vs. Tiempo

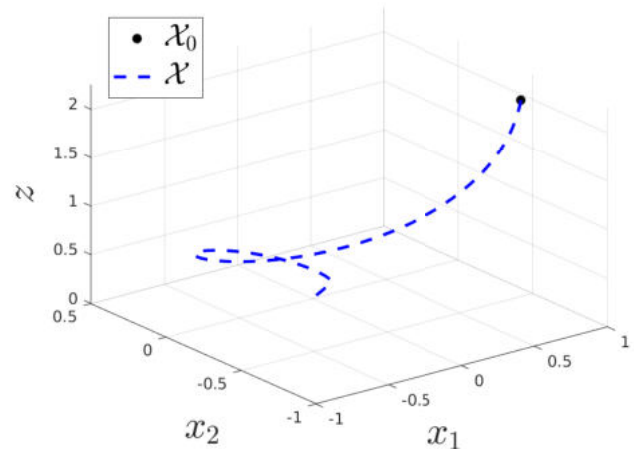


Figura 4. Trayectorias del Sistema

Manuel Mera fue apoyado en parte por el Proyecto IPN–SIP 20230170. El trabajo de Héctor Ríos fue apoyado en parte por CONAHCYT IxM CVU 270504 Proyecto 922, y en parte por Proyectos TecNM. El trabajo se desarrolla en el marco de la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados, TecNM.

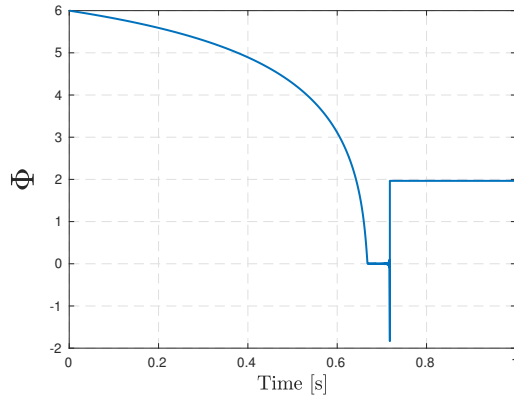


Figura 5. Función Φ vs. Tiempo

REFERENCIAS

- Azzabi, A. y Nouri, K. (2021). Design of a robust tracking controller for a nonholonomic mobile robot based on sliding mode with adaptive gain. *International journal of advanced robotic systems*, 18(1), 1729881420987082.
- Bloch, A. y Drakunov, S. (1996). Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding modes. *Systems & Control Letters*, 29(2), 91–99.
- Bloch, A.M. (2003). Nonholonomic mechanics. In *Nonholonomic mechanics and control*, 207–276. Springer.
- Brockett, R.W. (1982). Control theory and singular riemannian geometry. In *New directions in applied mathematics*, 11–27. Springer.
- Chen, Z., Liu, Y., He, W., Qiao, H., y Ji, H. (2020). Adaptive-neural-network-based trajectory tracking control for a nonholonomic wheeled mobile robot with velocity constraints. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 68(6), 5057–5067.
- Defoort, M. y Djemaï, M. (2010). Finite-time controller design for nonholonomic mobile robot using the heisenberg form. In *2010 IEEE International Conference on Control Applications*, 1269–1274. IEEE.
- Defoort, M., Floquet, T., Perruquetti, W., y Drakunov, S.V. (2009). Integral sliding mode control of an extended heisenberg system. *IET control theory & applications*, 3(10), 1409–1424.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers.
- Floquet, T., Drakunov, S.V., y Perruquetti, W. (2004). Sliding mode control of extended heisenberg systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(13), 609–614.
- Gao, F., Huang, J., Shi, X., y Zhu, X. (2020). Nonlinear mapping-based fixed-time stabilization of uncertain nonholonomic systems with time-varying state constraints. *Journal of the Franklin Institute*, 357(11), 6653–6670.
- Ghommam, J., Mnif, F., y Derbel, N. (2010). Global stabilisation and tracking control of underactuated surface vessels. *IET control theory & applications*, 4(1), 71–88.
- Huang, Y. y Su, J. (2020). Output feedback stabilization of uncertain nonholonomic systems with external disturbances via active disturbance rejection control. *ISA transactions*, 104, 245–254.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, U.S.A.
- Lambert, N.O., Schindler, C.B., Drew, D.S., y Pister, K.S. (2020). Nonholonomic yaw control of an underactuated flying robot with model-based reinforcement learning. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 6(2), 455–461.
- Li, L., d’Andrea-Novell, B., y Quadrat, A. (2020). Longitudinal and lateral control for four wheel steering vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 15713–15718.
- Marchand, N. y Alamir, M. (2003). Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *Automatica*, 39(2), 343–348.
- Mera, M., Ríos, H., y Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102, 104548.
- Mobayen, S. (2015). Finite-time tracking control of chained-form nonholonomic systems with external disturbances based on recursive terminal sliding mode method. *Nonlinear Dynamics*, 80(1-2), 669–683.
- Polyakov, A. (2012). Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(8), 2106–2110.
- Rehan, M., Reyhanoglu, M., y van Steen, J. (2019). Trajectory tracking of a knife-edge on a flat surface. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, 1648–1652. IEEE.
- Rocha, E., Castaños, F., y Moreno, J.A. (2022). Robust finite-time stabilisation of an arbitrary-order nonholonomic system in chained form. *Automatica*, 135, 109956.
- Sánchez-Torres, J.D., Defoort, M., y Muñoz-Vázquez, A.J. (2020). Predefined-time stabilisation of a class of nonholonomic systems. *International Journal of Control*, 93(12), 2941–2948.
- Takahashi, Y., Sakamoto, H., y Sakai, S. (2022). Kinematics control of electromagnetic formation flight using angular-momentum conservation constraint. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 45(2), 280–295.
- Vershik, A. y Gershkovich, V.Y. (1988). Nonholonomic problems and the theory of distributions. *Acta Applicandae Mathematica*, 12(2), 181–209.