

Fractional Order Tracking Control for Differential Mobile Robots With Skidding and Slipping effects

J.I. Aguilar-Pérez, M. Velasco-Villa, R. Castro-Linares

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av.
I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México (e-mail:
jignacio.aguilar, velasco, rcastro @cinvestav.mx).

Abstract: The development of a fractional order tracking control for a differential wheeled mobile robot under the effect of skidding and slipping effects is presented in this paper. The kinematic model of a differential mobile robot with disturbances are used to solve the tracking problem. The control scheme proposed is based on backstepping, feedback passivity and fractional sliding modes techniques. Numeric simulations are shown to prove the effectiveness of the proposed method and a comparison with entire order scheme is also provided.

Keywords: Skidding, slipping, backstepping, feedback passivity, sliding modes, fractional calculus.

1. INTRODUCCIÓN

A través del tiempo, diversas técnicas de control han sido desarrolladas para llevar a acabo tareas de manera eficiente, considerando los efectos de patinado y deslizamiento tales como el control por *backstepping* (Mohammad Salah et al , 2019) y por modos deslizantes (Manuel Mera et al , 2023), entre otros.

Un trabajo que propone una forma de las perturbaciones por deslizamiento y patinado como perturbaciones aditivas de entrada, multiplicativas de entrada es el de (Danwei Wang et al , 2008). En éste trabajo se desarrolla el modelo cinemático de diferentes RMR bajo la influencia de dichos fenómenos. Con este mismo enfoque se tiene el trabajo de (Cui et al , 2014), en donde los autores obtuvieron el mismo modelo cinemático del RMR diferencial de una manera alternativa.

Sin embargo, este tipo de controladores produce una retroalimentación de conmutación monótona que conduce a vibraciones de alta frecuencia en las señales de control. Un trabajo que propone un controlador para reducir el castaño sin considerar los efectos del patinado y deslizamiento lateral es el de (Al-Mayyahi et al , 2016). El Control de Modo Deslizante de Orden Fraccional (CMDOF) se ha introducido para superar este inconveniente (Padmini Singh et al , 2021).

En este artículo, se presenta una técnica de control basado en *backstepping*, pasivación por retroalimentación y CMDOF para resolver el problema de seguimiento de trayectoria en presencia de términos de incertidumbre por patinado y deslizamiento lateral. En particular, la técnica por modos deslizantes se emplea para agregar robustez y de esta manera, no considerar que las perturbaciones de deslizamiento y patinado son conocidas. Además, se hace un estudio formal de la existencia del modo deslizante y se presentan simulaciones numericas.

2. MODELO CINEMÁTICO

En la Figura 1 se muestra un RMR diferencial con dos marcos de referencia: el marco inercial $X - Y$ y el marco móvil $X_m - Y_m$, cuyo origen está fijo al punto P (ubicado en el centro del eje de las ruedas del robot).

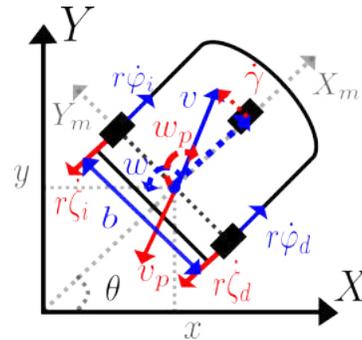


Fig. 1. Marcos de referencia en un RMR diferencial.

El vector que describe la posición y orientación del RMR en el marco inercial, $X - Y$, es el vector $\xi = [x \ y \ \theta]^T$, donde θ se mide con respecto al eje inercial X . Las restricciones no-holonomas de las ruedas con patinado y deslizamiento estan dada como en Yu Tian et al (2009),

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) + b\dot{\theta} = r(\dot{\varphi}_d - \dot{\zeta}_i) \quad (1a)$$

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) - b\dot{\theta} = r(\dot{\varphi}_i - \dot{\zeta}_d) \quad (1b)$$

$$-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) = \dot{\gamma}. \quad (1c)$$

Se define las variables de estado como,

$$q = [x \ y \ \theta \ \gamma \ \rho_d \ \rho_i \ \varphi_d \ \varphi_i]^T, \quad (2)$$

donde ζ_k con el subíndice $k = d, i$ corresponde a la rueda derecha e izquierda, respectivamente. Está es la

perturbación que corresponde al patinado mientras $\dot{\gamma}$ es la perturbación que corresponde al deslizamiento lateral. Por otra parte, $\dot{\rho}_k = r(\dot{\varphi}_k - \dot{\zeta}_k)$ con el subíndice $k = d, i$ corresponde a la rueda derecha e izquierda respectivamente. Se reescriben las ecuaciones de restricción (1) en términos de las variables de estado como,

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (3)$$

donde

$$A(q) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) & b & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) & -b & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

El espacio nulo de A , esto es $N(A)$, está dado entonces por,

$$S(q) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \frac{\text{cos}(\theta)}{2} & \frac{\text{cos}(\theta)}{2} & 0 & 0 \\ \text{cos}(\theta) & \frac{\text{sen}(\theta)}{2} & \frac{\text{sen}(\theta)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2b}{0} & -\frac{2b}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Entonces se obtiene directamente,

$$\dot{q} = S(q)\eta, \quad (6)$$

con $\eta = [\dot{\gamma} \dot{\rho}_d \dot{\rho}_i \dot{\varphi}_d \dot{\varphi}_i]^T$. Por tanto, de la ecuación (6) es posible obtener,

$$\dot{x} = \frac{\dot{\rho}_d + \dot{\rho}_i}{2} \text{cos}(\theta) - \dot{\gamma} \text{sen}(\theta) \quad (7a)$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{\rho}_d + \dot{\rho}_i}{2} \text{sen}(\theta) + \dot{\gamma} \text{cos}(\theta) \quad (7b)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\rho}_d - \dot{\rho}_i}{2b}. \quad (7c)$$

Dado que $\dot{\rho}_k = r(\dot{\varphi}_k - \dot{\zeta}_k)$, se definen las siguientes relaciones de acuerdo con la figura 1,

$$v - v_p = \frac{\dot{\rho}_d + \dot{\rho}_i}{2}, \quad w - w_p = \frac{\dot{\rho}_d - \dot{\rho}_i}{2b} \quad (8a)$$

donde v, w son las velocidades lineales y angulares, respectivamente y v_p, w_p son las perturbaciones en las velocidades lineales y angulares respectivamente. Por lo cual, el conjunto de ecuaciones (7) se reescribe como,

$$\dot{x} = (v - v_p) \text{cos}(\theta) - \dot{\gamma} \text{sen}(\theta) \quad (9a)$$

$$\dot{y} = (v - v_p) \text{sen}(\theta) + \dot{\gamma} \text{cos}(\theta) \quad (9b)$$

$$\dot{\theta} = w - w_p. \quad (9c)$$

El marco fijo y el marco móvil se relacionan mediante la matriz de rotación estándar $R(\theta)$.

3. ALGUNOS CONCEPTOS DE CÁLCULO FRACCIONAL

El cálculo fraccional es la extensión del cálculo clásico a las operaciones de derivación e integración usando ordenes no enteros. En el dominio del tiempo, las derivadas e integrales fraccionarias se definen por medio de la operación de convolución. Por esta razón, son particularmente adecuadas para representar fenómenos con memoria, lo que ha llevado a su aplicación en ciencia e ingeniería (Vina-

gre. B., Monse C., 2008). Las definiciones de operadores fraccionales de Riemann-Louville y de Caputo son las más usadas. En este artículo se utiliza la definición de Caputo. De acuerdo a (Kibas. A., Srivastava H., Trujillo J., 2006), la derivada fraccional de Caputo de orden α de la función $f(t)$ en la mitad positiva del eje real se define como,

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (10)$$

donde $f(t)$ es una función suficientemente suave y localmente integrable. $\Gamma(z)$ es la llamada función gamma definida como $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-tz} z^{-1} dz$, $Re(z) > 0$ y $(n - 1) \leq \alpha < n$, siendo n un número entero y α un número real. Esta definición de Caputo es usada en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, ya que incorpora condiciones iniciales para $f(t)$ y sus derivadas de orden entero, esto es condiciones iniciales que son atractivas físicamente de manera tradicional; $f^{(n)}(t)$ representa en (10) la derivada entera de orden n de la función $f(t)$. Para simplificar la notación, se denotará a la derivada fraccional de Caputo de orden α de la función $f(t)$, $D_t^\alpha f(t)$, como $f^{(\alpha)}$. Por otro lado, la integral fraccional de orden α de la función $f(t)$ en la mitad positiva del eje real se define, también de acuerdo a (Kibas. A., Srivastava H., Trujillo J., 2006), como

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1 - \alpha}} d\tau, \quad (11)$$

donde α es el orden fraccional definido antes. Es importante observar que se usa, de igual manera, la notación $D^{-\alpha} f(t)$ para denotar a la integral fraccional de orden α de la función $f(t)$, más precisamente $D^{-\alpha} f(t) \equiv I^\alpha f(t)$ (Shantanu Das, 2008). Las definiciones de derivada fraccional e integral fraccional dadas arriba no pueden usarse en la práctica, así que comúnmente se utilizan métodos numéricos como el de Grunwald-Letnikov (Agrawal C. et al, 2010)

4. PROBLEMA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

4.1 Planteamiento del problema

Para poder resolver el problema de seguimiento de trayectoria se definen los errores de posición como $e_x = x_t - x$ y $e_y = y_t - y$ y el error de orientación como $e_\theta = \theta_t - \theta$.

Ya que existe un desfaseamiento en posición y orientación entre la cinemática del modelo perturbado y el modelo cinemático ideal se considera la transformación de los errores de seguimiento en la forma,

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta) & \text{sin}(\theta) & 0 \\ -\text{sin}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Para describir la dinámica de errores de seguimiento se define el modelo cinemático de un RMR diferencial ideal como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \\ \dot{\theta}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_t) & 0 \\ \text{sin}(\theta_t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ \omega_t \end{bmatrix}, \quad (13)$$

donde v_t y ω_t son las velocidades lineales y angulares respectivamente. Entonces, sustituyendo las ecuaciones

(9) y (13) en (12) después de tomar la primera derivada con respecto al tiempo se obtiene la dinámica de errores de seguimiento,

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= wy_e + v_t \cos(\theta_e) - v + g_1 \\ \dot{y}_e &= -wx_e + v_t \sin(\theta_e) + g_2 \\ \dot{\theta}_e &= \omega_r - w + g_3 \end{aligned} \quad (14)$$

donde, $g_1 = -w_p y_e + v_p$, $g_2 = w_p x_e - \dot{\gamma}$, $g_3 = w_p$, son funciones de perturbación que involucran el deslizamiento lateral y patinado.

Suposición 1. Se supone que los términos de perturbación están acotados, es decir, satisfacen,

$$|g_1| \leq \eta_1, \quad |g_2| \leq \eta_2, \quad |g_3| \leq \eta_3, \quad (15)$$

dónde η_1 , η_2 y η_3 son constantes reales positivas diferentes de cero.

4.2 Solución al problema de seguimiento

La metodología utilizada en esta sección está basada en el trabajo de (Diego García-Olivares et al , 2020). Se tiene como objetivo encontrar las entradas de control \tilde{v}_1 y $\tilde{\omega}$ que logren que $\xi_e(t) = [x_e(t) y_e(t) \theta_e(t)]^T \rightarrow 0$. Considérese la dinámica de y_e de la ecuación (14) con $g_2 = 0$, es decir,

$$\dot{y}_e = -wx_e + v_t \sin(\theta_e). \quad (16)$$

En base a la técnica de control por modos deslizantes (Utkin et al , 1990), se propone la función de conmutación,

$$s_1 = y_e + k_{y1} \int_0^t y_e(\tau) d\tau, \quad (17)$$

donde k_{y1} , es una constante real positiva diferente de cero; la función de conmutación (17) permite definir la superficie conmutación $s_1 = 0$. En esta superficie se tiene que,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_{y1} y_e = 0. \quad (18)$$

La solución de (18) es tal que $y_e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Así que y_e converge a 0 asintóticamente en la superficie $s_1 = 0$. Para atraer la dinámica del sistema a $s_1 = 0$, se establece que la derivada de orden $\kappa_1 + 1$, con $0 < \kappa_1 < 1$, de s_1 sea,

$$s_1^{(\kappa_1+1)} = -k_1 \text{sign}(s_1), \quad (19)$$

donde $k_1 > 0 \in \mathbb{R}$ y $\text{sign}(s_1)$ es la función *signo* definida como,

$$\text{sign}(s_1) = \begin{cases} 1, & s < 0 \\ -1, & s > 0 \end{cases}. \quad (20)$$

Al diferenciar (19) al orden $(-\kappa_1)$, lo cual es equivalente a integrar (18) al orden κ_1 , se obtiene,

$$\dot{s}_1 = -k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}. \quad (21)$$

Entonces, a partir de (17), se tiene que,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_{y1} y_e = -k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}. \quad (22)$$

Sustituyendo (16) en (22), se obtiene,

$$-wx_e + v_t \sin(\theta_e) + k_{y1} y_e = -k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}. \quad (23)$$

Al considerar a

$$\alpha_1 = v_t \sin(\theta_e) \quad (24)$$

como una entrada de control virtual en (23) se tiene que,

$$\alpha_1 = -k_{y1} y_e + wx_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}. \quad (25)$$

(25) garantiza la atracción a $s_1 = 0$ al considerar la función candidata de Lyapunov,

$$V_1 = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (26)$$

la cuál es definida positiva. La derivada con respecto al tiempo toma la forma,

$$\dot{V}_1 = s_1 \dot{s}_1 = s_1 (\dot{y}_e + k_{y1} y_e) \quad (27)$$

Al sustituir la dinámica de y_e dada por la segunda ecuación en (14) junto con el control virtual α_1 dado por (25), \dot{V}_1 está dada por,

$$\dot{V}_1 = -k_1 (\text{sign}(s_1))^{-\kappa_1} s_1 + s_1 g_2 \quad (28)$$

Ya que $s_1 = |s_1| \text{sign}(s_1)$, \dot{V}_1 puede reescribirse como,

$$\dot{V}_1 = -k_1 (\text{sign}(s_1))^{-\kappa_1} |s_1| \text{sign}(s_1) + s_1 g_2. \quad (29)$$

También $0 < \kappa_1 < 1$, así que $\text{sign}(\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} = \text{sign}(s_1)$ (Mehmet Önder Efe , 2010). Entonces (29) toma la forma,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -k_1 |s_1| (\text{sign}(s_1))^{-\kappa_1} \text{sign}((\text{sign}(s_1))^{-\kappa_1}) \\ &\quad + s_1 \eta_2 = -k_1 |s_1| |\text{sign}(s_1)|^{-\kappa_1} + s_1 g_2 \end{aligned} \quad (30)$$

A partir de la suposición 1, se tiene que,

$$\dot{V}_1 \leq -|s_1| (k - 1 |\text{sign}(s_1)|^{-\kappa_1}) - \eta_2. \quad (31)$$

Así que, si la desigualdad

$$k_1 |\text{sign}(s_1)|^{-\kappa_1} > \eta_2, \quad (32)$$

se tiene que, $\dot{V}_1 < 0$ y se logra la convergencia a la superficie $s_1 = 0$.

Se propone ahora la función,

$$y = v_t \sin(\theta_e) - \alpha_1 \quad (33)$$

como salida del sistema (14). A partir de (25) y (33), la dinámica de y_e en (14) se escribe como,

$$\dot{y}_e = y - k_{y1} y_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} + g_2. \quad (34)$$

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (33), se tiene,

$$\dot{y} = \dot{v}_t \sin(\theta_e) + v_t \dot{\theta}_e \cos(\theta_e) - \dot{\alpha}_1, \quad (35)$$

donde,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= -k_{y1} \left[y - k_{y1} y_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} + g_2 \right] \\ &\quad - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1+1)} + \dot{w} x_e \\ &\quad + w [wy_e + v_t \cos(\theta_e) - v + g_1]. \end{aligned} \quad (36)$$

Sustituyendo (34) en (36), la dinámica (35) se puede reescribir de la forma,

$$\dot{y} = \alpha_2 + wv + \Delta g \quad (37)$$

donde,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \dot{v}_t \sin(\theta_e) + v_t (\omega_t - w) \cos(\theta_e) \\ &\quad + k_{y1} \left[y - k_{y1} y_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} \right] \\ &\quad + k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1+1)} \\ &\quad - \dot{w} x_e - w [wy_e + v_t \cos(\theta_e)], \end{aligned}$$

y Δg es un término de perturbación dado por,

$$\Delta g = g_3 v_t \cos(\theta_e) - k_{y1} g_2 - g_1 w.$$

Es importante observar que, debido a la Suposición 1 y de las características del modelo ideal (13), se tiene que Δg está acotada, es decir, Δg satisface,

$$|\Delta g| \leq \eta_{\Delta g}$$

donde $\eta_{\Delta g}$ es una constante real positiva diferente de cero.

Se tiene entonces el nuevo sistema dado por,

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= y - k_{y1}y_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} + g_2, \\ \dot{y} &= \alpha_2 + wv + \Delta g. \end{aligned} \quad (38)$$

Se busca ahora una retroalimentación que haga pasivo (Isidori et al , 1991) al sistema (38) para el caso en que $\Delta g = 0$, es decir, sin términos de perturbación. Se propone la retroalimentación,

$$v = \frac{1}{w} (-\alpha_2 + v_l) \quad (39)$$

donde $w \neq 0$ y v_l es una nueva entrada. Entonces el sistema (38) con $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ se reescribe en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= y - k_{y1}y_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} \\ \dot{y} &= v_l. \end{aligned} \quad (40)$$

Se propone ahora la función de almacenamiento,

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}y^2 \quad (41)$$

donde V_1 está dada por (26). La derivada con respecto al tiempo de V_2 es,

$$\dot{V}_2 = s_1 \dot{s}_1 + y \dot{y}.$$

Al sustituir $\dot{s}_1 = y - (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}$ y \dot{y} de (40) en \dot{V}_2 , se tiene que,

$$\dot{V}_2 = s_1 \left[y - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} \right] + yv_l. \quad (42)$$

Definiendo la entrada v_l como,

$$v_l = -s_1 + \omega_n, \quad (43)$$

donde ω_n es una nueva entrada, se tiene que,

$$\dot{V}_2 = -k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} s_1 + y\omega_n. \quad (44)$$

Usando otra vez el hecho de que $(\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)} = |(\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}| \text{sign}(s_1)$ se concluye que $\dot{V}_2 \leq y\omega_n$ y por lo tanto, la retroalimentación (39) y (43) hace pasivo al sistema (38) desde la entrada ω_n hasta la salida y , considerando que no hay términos de perturbación ($\Delta g = 0$).

Al sustituir la ecuación (43) en el sistema (40) se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= y - k_{y1}y_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}, \\ \dot{y} &= -s_1 + \omega_n, \end{aligned} \quad (45)$$

el cual, para un modo deslizante ideal en la superficie $s_1 = 0$ es estado cero observable (Isidori et al , 1991), haciendo posible asignar una retroalimentación de la forma,

$$\omega_n = -k_{y2}y \quad (46)$$

donde $k_2 > 0 \in \mathbb{R}$, que logra estabilidad asintótica del sistema (40). Es importante observar que al lograr la estabilidad asintótica del sistema (40), $y_e \rightarrow 0$ y $y \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo que implica que, de acuerdo a (33),

$$v_t \sin(\theta_e) \approx wx_e - k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}.$$

Si, además, la dinámica del error de orientación tiende a cero rápidamente, entonces,

$$wx_e \approx k_1 (\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}.$$

Ya que $(\text{sign}(s_1))^{(-\kappa_1)}$ no está definida en $s_1 = 0$, x_e oscilará alrededor de 0 para $w \neq 0$. Este comportamiento se verifica en las simulaciones numéricas que se describen en la sección 5.

Para asegurar que se mantenga la propiedad de pasividad para el caso en que $\Delta g \neq 0$, se define una segunda función de conmutación,

$$s_2 = y - \int_0^t v_l(\tau) d\tau \quad (47)$$

que define la superficie deslizante $s_2 = 0$. En esta superficie se tiene que $\dot{s}_2 = 0$, esto es,

$$\dot{s}_2 = \dot{y} - v_l = 0 \quad (48)$$

o, en forma equivalente $\dot{y} = v_l$.

Una vez que las trayectorias del sistema son atraídas a la superficie $s_2 = 0$, el control (39) (control equivalente) asegura que permanezcan en ella. En esta superficie la señal v_l dada por (43) hace que el sistema sea pasivo desde la entrada ω_n hasta la salida y . La asignación (46) logra además estabilidad asintótica.

Para asegurar que las trayectorias del sistema sean atraídas a la superficie $s_2 = 0$, se hace la asignación,

$$s_2^{(\kappa_2+1)} = -k_2 \text{sign}(s_2) \quad (49)$$

donde $\gamma_2 > 0 \in \mathbb{R}$. Entonces, a partir (48) se tiene que,

$$\dot{y} = v_l - k_2 (\text{sign}(s_2))^{(-\kappa_2)}. \quad (50)$$

A partir de esta última expresión y la dinámica de y en (38), con $\Delta g = 0$, se obtiene la señal de control \bar{v}_l dada por,

$$\bar{v}_l = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(-\alpha_2 + v_l - k_2 (\text{sign}(s_2))^{(-\kappa_2)} \right), \quad (51)$$

donde v_l está dado por (43). La retroalimentación (51) está restringida a trayectorias para las cuales $w \neq 0$.

Al igual que para la superficie de deslizamiento $s_1 = 0$, se puede dar una condición de suficiencia para la ganancia γ_2 , en función de la cota de Δg , que asegura la convergencia de la dinámica del sistema (38) a la superficie de deslizamiento $s_2 = 0$. Esta condición esta dada por la desigualdad,

$$k_2 |(\text{sign}(s_2))^{(-\kappa_2)}| > \eta_{\Delta g}, \quad (52)$$

donde $\eta_{\Delta g}$ es la cota del término de perturbación Δg .

Para el control de orientación, se utiliza la dinámica $\dot{\theta}_e$ de la ecuación (14) de la forma,

$$\dot{\theta}_e = g_3 + \omega_t - w \quad (53)$$

se define la función de conmutación,

$$s_3 = \theta_e + k_\theta \int_0^t \theta_e dt, \quad (54)$$

donde $k_\theta > 0 \in \mathbb{R}$. En la superficie de deslizamiento definida por $s_3 = 0$, $\dot{s}_3 = 0$, es decir

$$\dot{s}_3 = \dot{\theta}_e + k_\theta \theta_e = 0. \quad (55)$$

La solución de la ecuación diferencial (55) lleva a la conclusión de que $\theta_e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ en $s_3 = 0$. Para lograr la convergencia a $s_3 = 0$ se propone la asignación,

$$s_3^{(\kappa_3+1)} = -k_3 \text{sign}(s_3) \quad (56)$$

donde $k_3 > 0 \in \mathbb{R}$ al diferenciar (56) con respecto al orden $(-\kappa_3)$ resulta en,

$$\dot{s}_3 = -k_3 (\text{sign}(s_3))^{(-\kappa_3)} \quad (57)$$

o en otras palabras. Esto es,

$$\dot{s}_3 = \dot{\theta}_e + k_\theta \theta_e = w_t - w + k_\theta \theta_e = -k_3 (\text{sign}(s_3))^{(-\kappa_3)}. \quad (58)$$

Y se obtiene la señal de control,

$$w = \omega_t + k_\theta \theta_e + k_3 (\text{sign}(s_3))^{(-\kappa_3)}, \quad (59)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que antes se puede mostrar que, bajo la suposición 1, la retroalimentación (59) asegura que las trayectorias del sistema (53) convergen a la superficie de deslizamiento $s_3 = 0$

5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN NÚMERICA

Para la realización de los experimentos es necesario tener en cuenta que, en general, existen grandes periodos de tiempo en los que las las perturbaciones de patinado y deslizamiento no están presentes .

Para realizar la evaluación del desempeño del controlador descrito en la sección 4 se utilizó una trayectoria descrita a partir de, $x_t = b \cos(kpt) \cos(pt) + 1$, $y_t = b \cos(kpt) \sin(pt) + 1$, con los parámetros $b = 1$, $k = 2$, $p = 0.3$. La velocidad lineal y angular de referencia se obtuvieron a partir de $v_t = \dot{x}_t \cos(\theta_t) + \dot{y}_t \sin(\theta_t)$ y $\omega_t = \frac{\dot{x}_t \ddot{y}_t - \dot{y}_t \ddot{x}_t}{v_t^2}$. Además se tienen las condiciones iniciales como $x_e = y_e = 0$ y $\theta_e = 0.34 \text{ rad}$.

Se considera el modelo cinemático de la ecuación (9). Para el control de orden entero se consideran $k_{y1} = 1.9$, $k_{y2} = 0.5$, $k_\theta = 2$, $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.1$ y $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ y para el control de orden fraccionario se considera $k_{y1} = 5$, $k_{y2} = 1.1$, $k_\theta = 3$, $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.2$, $k_3 = 0.01$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0.6$. Las perturbaciones (??) fueron introducidas en la simulación en dos periodos de tiempo, en el primer periodo de tiempo con $t_2 \leq 20 [\text{sec}]$ toman la forma $v_p = k_{v_p} e^{-a_{v_p} t}$, $w_p = k_{w_p} e^{-a_{w_p} t}$ y $\dot{\gamma} = k_{\dot{\gamma}} e^{-a_{\dot{\gamma}} t}$ con $k_{v_p} = k_{\dot{\gamma}} = 0.4 [\frac{m}{\text{sec}}]$, $k_{w_p} = 0.4 [\frac{\text{rad}}{\text{sec}}]$ y $a_{w_p} = a_{v_p} = a_{\dot{\gamma}} = 4.48 [\text{Hz}]$. Para el segundo periodo de tiempo con $t_1 \geq 20 [\text{sec}]$ toman la forma $v_p = k_{v_p} e^{-a_{v_p} (t-20)}$, $w_p = k_{w_p} e^{-a_{w_p} (t-20)}$ y $\dot{\gamma} = k_{\dot{\gamma}} e^{-a_{\dot{\gamma}} (t-20)}$ con $k_{v_p} = 0.4 [\frac{m}{\text{sec}}]$, $k_{w_p} = 0.8 [\frac{\text{rad}}{\text{sec}}]$, $k_{\dot{\gamma}} = 0.8 [\frac{m}{\text{sec}}]$ y $a_{w_p} = a_{v_p} = a_{\dot{\gamma}} = 4.48 [\text{Hz}]$. Éstas se muestran en la Figura 2.

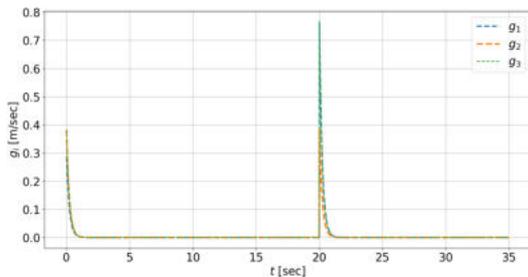


Fig. 2. Perturbaciones con respecto al tiempo.

En la Figura 3 y 4 se muestran las gráficas de la evolución de las coordenadas de error $\xi_e = [x_e \ y_e \ \theta_e]^T$ con respecto

al tiempo con la etiqueta *ent* para el caso entero, *fra* para el caso fraccionario y *des* para la trayectoria deseada, observándose la convergencia al origen cuando las perturbaciones no están presentes en el sistema. En el caso de la orientación, respecto a la posición se observa una banda de convergencia con un zigzag en el caso entero y notando claramente una disminución de este efecto para el caso fraccionario. En los periodos de tiempo $t_1 = 0s$, $t_2 = 0.8s$ y $t_3 = 20s$, $t_4 = 21.4s$, cuando se introducen las perturbaciones, se puede apreciar el efecto de las mismas en el estado, sin embargo rápidamente se retoma la convergencia a cero. Debido a que normalmente las perturbaciones no están presentes para todo t , se puede lograr un resultado aceptable como se muestra en la Figura 5 donde se puede observar el movimiento del RMR en el marco inercial $X - Y$.

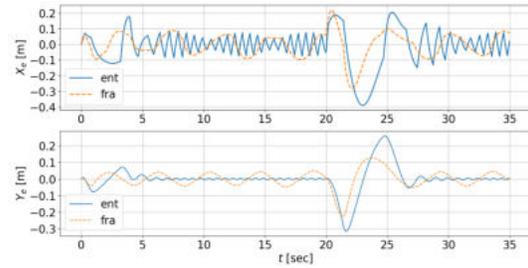


Fig. 3. Errores de seguimiento con respecto al tiempo.

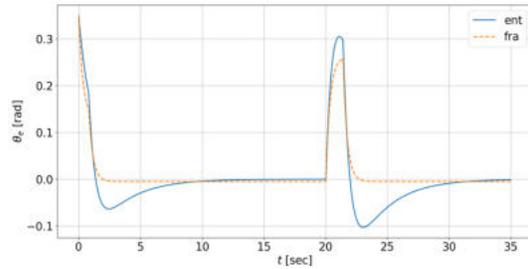


Fig. 4. Errores de seguimiento con respecto al tiempo.

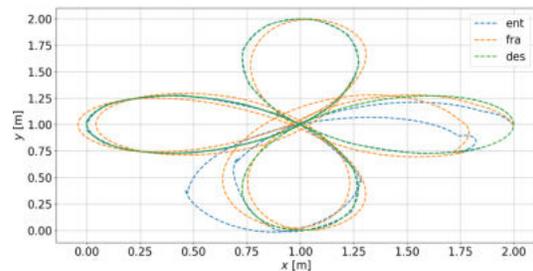


Fig. 5. Posición en X-Y del RMR.

En la Figura 6 se puede observar los periodos de tiempo en dónde las perturbaciones están presentes y como el controlador logra atenuar dichas perturbaciones logrando un buen seguimiento de orientación .

En la Figura 7 se muestran las señales de control w y v . Se puede apreciar el zigzag en v en el caso entero mientras en el caso fraccionario se muestra una clara atenuación de este efecto, para la señal w no se aprecia distinción considerable .

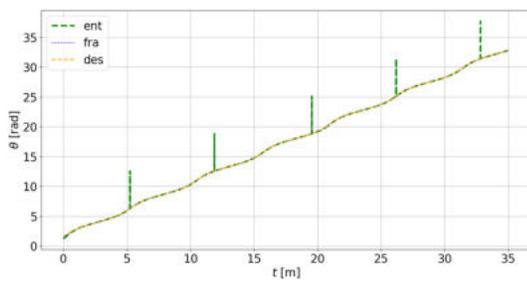


Fig. 6. Orientación con respecto al tiempo.

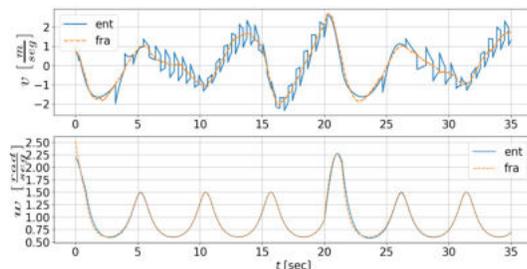


Fig. 7. Señales de control con respecto al tiempo.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta el desarrollo de un esquema de control basado en técnicas de backstepping, pasivación por retroalimentación y modos deslizantes de orden fraccionario, para el seguimiento de trayectorias de un robot diferencial bajo perturbaciones ocasionadas por deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Mediante los resultados obtenidos por simulación numérica, se muestra una comparación entre el caso de orden entero y fraccionario los cuales tienen un desempeño aceptable de la retroalimentación propuesta ya que la velocidad de la trayectoria a seguir es rápida. Por medio de la técnica de modos deslizantes fraccionarios se obtiene robustez descartando la necesidad de conocer de manera exacta el valor de las perturbaciones que afectan al sistema. Además, se observa la mejora respecto al castaño que presenta el control de orden entero. Considerando la reducción realizada en el chattering se plantea como trabajo a futuro comparar con otra técnica como es el Super-Twisting de alto orden, que también reduce el castaño y observar su desempeño. Por otra parte, se planea llevar a cabo experimentos en una plataforma experimental.

REFERENCIAS

Manuel Mera et al (2023). Perturbed Unicycle Mobile Robots: A Second-Order Sliding-Mode Trajectory Tracking Control *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023.

Mohammad Salah et al (2019). Robust Backstepping Control for Tracked Vehicles Under the Influence of Slipping and Skidding *20th International Conference on Research and Education in Mechatronics (REM)* 2019.

Danwei Wang et al (2008). Modeling and Analysis of Skidding and Slipping in Wheeled Mobile Robots: Control Design Perspective *IEEE Transactions on Robotics* Volumen: 24, Issue: 3, June 2008.

Diego García-Olivares, Martín Velasco-Villa and Rafael Castro-Linares (2020). Tracking Control for Differential Mobile Robots With Skidding and Slipping ef-

fects. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, pp. 1-6, 2020.

Boukens, M., Boukabou, A., y Chadli, M. (2017). Robust adaptive neural network-based trajectory tracking control approach for nonholonomic electrically driven mobile robots. *Robotics & Autonomous Systems*, 92, 30-40.

Cui, M., Huang, R., Liu, H., Liu, X., y Sun, D. (2014). Adaptive tracking control of wheeled mobile robots with unknown longitudinal and lateral slipping parameters. *Nonlinear Dynamics*, 78, 1811-1826.

Gallegos-Sanlúcar, J.D., Castro-Linares, R., Velasco-Villa, M. (2018) Control de formación lider seguidor robusto de un conjunto de robots móviles diferenciales. En *Congreso Mexicano de Robótica*.

Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (1999) *Sliding mode control in electromechanical systems*. CRC Press.

Byrnes, C.I., Isidori, A., Willems, J.C. (1991) Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 1228-1240

Yu Tian, Naim Sidek and Nilanjan Sarkar (2009) Modeling and Control of a Nonholonomic Wheeled Mobile Robot with Wheel Slip Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control* 978-1-4244-2752-9/09/

Al-Mayyahi, Auday, Wang, William and Birch, Philip (2016) Design of fractional-order controller for trajectory tracking control of a non-holonomic autonomous ground vehicle. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 27 (1). pp. 29-42. ISSN 2195-3880

Padmini Singh, Subhash Chand Yogi, Laxmidhar Behera, Nishchal K. Verma (2021) Kinematic and Dynamic Tracking of Mobile robot Using Fractional Order Control. *IEEE* DOI: 10.1109/CCTA48906.2021.9658759

Shantanu Das. (2008) Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*

Agrawal C. and Chen Y.Q. (2010) An approximate method for numerically solving fractional-order optimal control problems of general form *Computers and Mathematics with Applications* DOI <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.006>.

Vinagre. B., Monse C. (2008) Introducción al Control Fraccionario, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)*, ISSN 1697-7912, Vol. 3, No. 3, 5-23, DOI: 10.4995/riai.v3.i3.8081.

Kibas. A., Srivastava H., Trujillo J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier*

Mehmet Önder Efe (2010) Integral Sliding Mode Control of a Quadrotor with Fractional Order Reaching Dynamics. *Transactions of the Institute of Measurement and Control* <https://doi.org/10.1177/0142331210377227>