

Proportional-Resonant Controller with Frequency Adaptation

Juan G. Rueda-Escobedo* Jaime A. Moreno**
Sofía Ávila-Becerril*

* *División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Mexico City, Mexico,*

juan.rueda@fi.unam.edu; sofia.avila@ingenieria.unam.edu

** *Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Mexico City, Mexico,*

JMorenoP@ii.unam.mx

Abstract: The current changes in the grid driven by the energy transition demands better performance from the devices connected to it. This involves the continuous supply of energy despite the presence of distortion and events of high voltage and frequency volatility. In this direction, the present work contributes by introducing a proportional-resonant controller for power inverters with the capability of tracking distorted references of varying frequency. Since the controller is able of adapting the frequency of the resonant terms, we refer to it as adaptive proportional-resonant controller. In this work, not only the aforementioned controller is presented, but a formal proof of its capability of tracking references of varying frequency is given. Furthermore, it is shown that the proposed controller also guarantees the stability of the inverter when connected to a non-ideal grid. These properties are also illustrated via numerical simulation.

Keyword List: Power Systems; Power Electronics; Tracking; Linear Time-Varying Systems

1. INTRODUCCIÓN

La red eléctrica se encuentra experimentando cambios significativos y continuos debido al impulso por incorporar energías renovables a ella en aras de lograr una transición hacia energías limpias en las próximas décadas. Entre ellos, se encuentra el incremento de dispositivos basados en electrónica de potencia conectados a la red y su uso para sustituir la generación convencional de energía (Milano et al., 2018; Ratnam et al., 2020; Fang et al., 2018). Este proceso lleva consigo el incremento de distorsión en las señales eléctricas y la volatilidad de la frecuencia de la red debido a la pérdida de inercia (Milano et al., 2018; Ratnam et al., 2020; Fang et al., 2018). Esto obliga a buscar la mejora de la operación de los convertidores de potencia para que puedan mantener su desempeño en las situaciones descritas y proveer de soporte de voltaje y frecuencia a la red en todo momento (Fang et al., 2018).

Entre las estrategias de control para convertidores de potencia que permiten realizar el seguimiento de señales distorsionadas se encuentra el llamado control *proporcional-resonante* (PR) (Timbus et al., 2006; Husev et al., 2020). En contraste con técnicas basadas en el marco de referencia síncrono o *dq*, el control PR se puede implementar en

el marco natural de referencia y puede hacer seguimiento de señales armónicas (Husev et al., 2020). Esto ha hecho que la industria comience a migrar de controles implementados en *dq* a controles PR (Golestan et al., 2018; Husev et al., 2020). Sin embargo, el control PR tiene una limitación importante: los términos resonantes se diseñan a una frecuencia constante mientras que en la práctica se requiere adaptar dicha frecuencia (Timbus et al., 2006; Golestan et al., 2018). En general, la adaptación se hace reemplazando la frecuencia de los términos resonantes por la obtenida de un PLL (Timbus et al., 2006). Sin embargo, esta estrategia sólo consigue el seguimiento de las referencias una vez la frecuencia se estabiliza en un valor constante y no durante el transitorio. En otras palabras, el seguimiento sólo se consigue si la frecuencia fundamental es constante a tramos.

Para solventar la limitación principal del control PR, en este trabajo se propone un control al cual se le puede adaptar la frecuencia fundamental de los términos resonantes. A diferencia de otros trabajos en donde también se adapta la frecuencia, el control *proporcional-resonante adaptable* (PRA) presentado en este trabajo no sólo mantiene el seguimiento de las referencias durante los transitorios de frecuencia, sino que incluso no requiere que ésta alcance un valor estacionario. Además, para garantizar la operabilidad del inversor cuando hay variaciones

* Este trabajo fue parcialmente apoyado por el programa PAPIIT-UNAM, proyecto IN106323.

de voltaje, se analiza y garantiza la estabilidad de éste en conexión con la red eléctrica.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

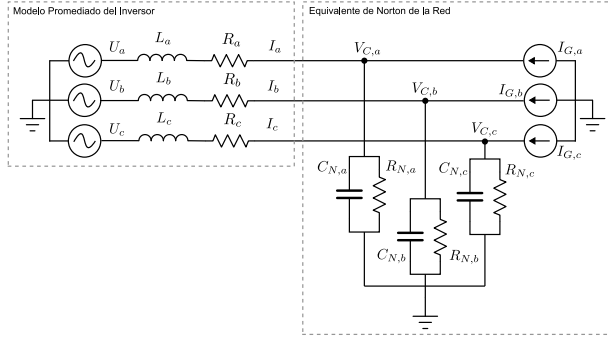


Fig. 1. Diagrama eléctrico de un inversor trifásico conectado a la red eléctrica. El inversor está representado por su equivalente promediado mientras que la red por su equivalente de Norton.

En este trabajo se considerará a un inversor trifásico con conexión a neutro conectado a una red débil en voltaje, es decir, no se modela al bus de conexión como un bus infinito. Se asume que el convertidor tiene un filtro RL en cada fase y que, debido al neutro, la corriente en cada una de ellas puede ser controlada de manera independiente. Para modelar la conexión del convertidor con la red, se considera el equivalente de Norton de la misma. En la Figura 1 se presenta un diagrama eléctrico de esta conexión. Cada fase del convertidor se modela por el voltaje promedio equivalente, esto es, por una fuente de voltaje de CA independiente.

Este tipo de configuración de inversor se pueden encontrar en unidades de generación distribuida para suministro de energía renovable a la red. En dichas aplicaciones, se requiere un transformador para elevar el voltaje del inversor (usualmente de 400 [V-RMS]) y acoplarlo al voltaje de la red de distribución (media tensión, entre [15 kV-RMS] y 30 [kV-RMS]). Se considera que la impedancia del transformador está incluida en el equivalente de Norton de la red.

El objetivo de control es lograr que la corriente en cada fase siga una referencia variante en el tiempo. Se asume que la referencia corresponde a una suma finita de sinusoidales de frecuencia conocida. Matemáticamente, se representa a la referencia para la fase x de la siguiente forma:

$$I_x^{\text{ref}}(t) = \sum_{k=1}^n A_{k,1} \cos(\phi_k(t)) + A_{k,2} \sin(\phi_k(t)), \quad (1)$$

dónde $\phi_k(t)$ es el ángulo de fase correspondiente al armónico k , el cual es igual a

$$\phi_k(t) = k \int_{t_0}^t \omega_0(\sigma) d\sigma. \quad (2)$$

En la expresión anterior, $\omega_0(t)$ es la frecuencia fundamental de la referencia, la cual se asume variante en el tiempo pero conocida. La condición inicial para $\phi_k(t)$ está codificada en los coeficientes $A_{k,1}$ y $A_{k,2}$ junto con la amplitud del armónico asociado.

Convencionalmente, y asumiendo que la frecuencia base de la señal es constante, el objetivo de control se puede lograr empleando un control PR. La descripción de este control está dada por la siguiente función de transferencia (Husev et al., 2020):

$$H_{\text{PR}}(s) = K_P + \sum_{k=1}^n \frac{K_{R,k} s}{s^2 + k^2 \omega_0^2}. \quad (3)$$

El control PR emula al control proporcional-integral (PI) pero sustituye el término integral por uno *resonante*. Así como el control integral incluye el modelo interno de una perturbación o referencia constante ($1/s$), el término resonante incluye el modelo interno de una sinusoidal de frecuencia constante ω_0 ($s/(s^2 + \omega_0^2)$). Al sumar tantos términos resonantes como armónicos tenga la referencia, se espera que el control sea capaz de lograr el seguimiento de la misma. La principal limitación del esquema anterior es el adaptar la frecuencia, ya que esto requiere en general el re-sintonizar las ganancias proporcional (K_P) y resonantes ($K_{R,k}$). Además, el modelo interno del control (3) no coincide con el de la referencia (1) mientras la frecuencia cambia y, por ello, sólo puede lograr el objetivo de control una vez que la frecuencia haya alcanzando un valor estacionario. La necesidad de adaptar la frecuencia surge de igualar la frecuencia de la red eléctrica ya que ésta presenta fluctuaciones durante el día debido a los desbalances en la generación de potencia. Para mantener una correcta sincronización con la red y que el desempeño del controlador no se vea afectado, se requiere actualizar el valor de la frecuencia fundamental ω_0 en (3) con la medición de frecuencia de la red. Sin embargo, el análisis del sistema y el diseño de las ganancias en dicho caso no puede hacerse usando la representación (3) pues no es válida.

En este trabajo se reinventa al control PR para permitir la adaptación de la frecuencia y realizar el seguimiento de la referencia también durante los transitorios. Debido a esto decimos que se propone un *control proporcional-resonante adaptable*. Al mismo tiempo, el control PRA se diseña de tal forma que garantiza la estabilidad del inversor conectado a la red. En las secciones subsecuentes se presenta el modelo del sistema junto con la dinámica del error de seguimiento y la red. Posteriormente, se presentará la contribución principal de este trabajo.

3. MODELADO DEL SISTEMA Y DINÁMICA DE ERROR

En esta sección se presentan algunos desarrollos que son necesarios para simplificar la presentación del controlador. Éstos se dan en tres parte. Primero, se introduce el modelo del inversor junto con el de la red; posteriormente,

se da un modelo interno para la referencia de corriente; finalmente, se obtiene la dinámica del error de seguimiento junto con la dinámica de la red.

3.1 Modelo del Inversor y la Red

Considere nuevamente el diagrama ilustrado en la Figura 1. Para la fase x , se tiene el siguiente sistema lineal:

$$\dot{\chi}_x(t) = A_0 \chi_x(t) + B U_x(t) + D I_{G,x}(t), \quad (4)$$

donde $\chi_x(t) \in \mathbb{R}^2$ corresponde a $\chi_x(t) = [I_x(t) V_{C,x}(t)]^\top$ y las matrices del sistema a

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{R_x}{L_x} & -\frac{1}{L_x} \\ \frac{1}{C_{N,x}} & -\frac{1}{R_{N,x}C_{N,x}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_{N,x}} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Aquí, $I_x(t)$ denota la corriente asociada al inductor del inversor; $V_{C,x}(t)$ es el voltaje en el punto de conexión y correspondiente al voltaje del capacitor de la impedancia equivalente de Norton de la red; $U_x(t)$ es el voltaje promedio de la fase del inversor que corresponde a la entrada de control del sistema e $I_{G,x}(t)$ es la corriente de la fuente de corriente de CA del equivalente de Norton de la red. Los parámetros R y L corresponden a la resistencia e inductancia del filtro RL del inversor mientras que C_N y R_N a la capacitancia y resistencia del equivalente de Norton de la red.

Del sistema (4) se pueden medir las variables $I_x(t)$ y $V_{C,x}(t)$, mientras que $I_{G,x}(t)$ es desconocida pero se considera que puede ser descrita por una suma similar a (1) con la misma frecuencia base $\omega_0(t)$. El resto de parámetros del sistema se asumen conocidos.

3.2 Modelo Interno de la Referencia

Sea n el número de armónicos en la referencia de corriente $I_x^{\text{ref}}(t)$ en (1) y sea $\xi(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\xi}(t) = \omega_0(t) \mathbf{F} \xi(t), \quad (6)$$

con $\mathbf{F} = \text{blockdiag}\{\mathbf{J}, 2\mathbf{J}, 3\mathbf{J}, \dots, n\mathbf{J}\}$ y $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ya que $\omega_0(t)\mathbf{F}$ es una matriz formada a bloques en la diagonal, la matriz de transición de estados asociada a ella también puede ser escrita de esta forma, i.e., a bloques. El k -ésimo bloque de la diagonal corresponde a

$$\Phi_k(t, t_0) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_k(t)) & \sin(\phi_k(t)) \\ -\sin(\phi_k(t)) & \cos(\phi_k(t)) \end{bmatrix},$$

con $\phi_k(t)$ definido en (2). Este resultado es fácil de comprobar ya que $\dot{\Phi}_k(t, t_0) = k\omega_0(t)\mathbf{J}\Phi_k(t, t_0)$. De esta forma, la matriz de transición de estados resultante es:

$$\Phi(t, t_0) = \text{blockdiag}\{\Phi_1(t, t_0), \Phi_2(t, t_0), \dots, \Phi_n(t, t_0)\}.$$

De lo anterior se desprende que $\xi(t) = \Phi(t, t_0)\xi(t_0)$.

Ahora, particione la condición inicial de la siguiente forma: $\xi^\top(t_0) = [\xi_1^\top(t_0) \ \xi_2^\top(t_0) \ \dots \ \xi_n^\top(t_0)]$ con $\xi_k(t_0) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{H} = [H_1 \ H_2 \ \dots \ H_n]$ con $H_k \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ tal que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H_k \\ H_k \mathbf{J} \end{bmatrix} = 2. \quad (7)$$

Entonces, la referencia $I_x^{\text{ref}}(t)$ en (1) puede generarse por medio del sistema (6) de la siguiente manera:

$$I_x^{\text{ref}}(t) = \mathbf{H} \xi(t) = \mathbf{H} \Phi(t, t_0) \xi(t_0).$$

En este caso, las condiciones iniciales adecuadas son

$$\xi_k(t_0) = \begin{bmatrix} H_k \\ H_k \mathbf{J} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{k,1} \\ A_{k,2} \end{bmatrix}$$

con $A_{k,1}$ y $A_{k,2}$ como en (1). Así, el sistema (6) es una dinámica que puede generar referencias de la forma (1). En este sentido, (6) es un modelo interno para este tipo de señales y es capaz de reproducirlas.

Observación 1. La condición (7) se satisface trivialmente ya que únicamente se requiere que $\|H_k\| > 0$, i.e., $H_k \neq 0_{1 \times 2}$.

Observación 2. La condición (7) también asegura que los pares $(k\omega_0(t)\mathbf{J}, H_k)$ sean instantáneamente observables si $\omega_0(t)$ es conocida y además no cruza por cero, i.e. $|\omega_0(t)| > 0 \forall t \geq t_0$. Ya que el estado $\xi(t)$ de (6) consiste en sinusoidales con frecuencias que son múltiplos enteros de $\omega_0(t)$, son linealmente independientes entre si. Entonces, la condición (7) también asegura la observabilidad del par $(\omega_0(t)\mathbf{F}, \mathbf{H})$.

3.3 Dinámica del Error de Seguimiento

Para analizar al sistema junto con la red, tomaremos como variables de estudio al error de seguimiento en la fase x definido como $e_x(t) = I_x^{\text{ref}}(t) - I_x(t)$ y a la diferencia entre el voltaje en el punto de conexión y su valor al lograr el seguimiento, i.e., $\tilde{V}_{C,x}(t) = V_{C,x}^*(t) - V_{C,x}(t)$ donde $V_{C,x}^*(t)$ es el valor del voltaje cuando $I_x(t) \equiv I_x^{\text{ref}}(t)$. Aunque $V_{C,x}^*(t)$ no se conoce a priori, de (4) se sabe que su dinámica satisface la siguiente relación:

$$\dot{V}_{C,x}^*(t) = \frac{1}{C_{N,x}} I_x^{\text{ref}}(t) - \frac{1}{R_{N,x}C_{N,x}} V_{C,x}^*(t) + \frac{1}{C_{N,x}} I_{G,x}(t). \quad (8)$$

Sea $\tilde{\chi}_x(t) = [e_x(t) \ \tilde{V}_{C,x}(t)]^\top$. Al considerar (4) y (8), se tiene que

$$\dot{\tilde{\chi}}_x(t) = A_1 \tilde{\chi}_x(t) - B(U_x(t) - V_{C,x}(t) - R_x I_x^{\text{ref}}(t) - L_x \dot{I}_x^{\text{ref}}(t)) \quad (9)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_x}{L_x} & 0 \\ \frac{1}{C_{N,x}} & -\frac{1}{R_{N,x}C_{N,x}} \end{bmatrix}$$

y B está definida en (5).

4. CONTROL PROPORCIONAL-RESONANTE ADAPTABLE

Considere al sistema (9). El control propuesto consta de tres partes: una parte de prealimentación (pr) para cancelar los términos de $V_{C,x}(t)$ y $R I_x^{\text{ref}}(t)$, otra proporcional (p) al error de seguimiento y una última para compensar (c) a la derivada de la referencia que es desconocida. En concreto, el control propuesto para la fase x del inversor es el siguiente:

$$\begin{aligned} U_x(t) &= U_x^{\text{pr}}(t) + U_x^{\text{p}}(t) + U_x^{\text{c}}(t), \\ U_x^{\text{pr}}(t) &= V_{C,x}(t) + R_x I_x^{\text{ref}}(t), \\ U_x^{\text{p}}(t) &= -(R_x - L_x K_P) e_x(t), \\ U_x^{\text{c}}(t) &= \omega_c(t) L_x \mathbf{G} \hat{\xi}(t), \\ \dot{\hat{\xi}}(t) &= \omega_0(t) K_R \mathbf{G}^\top e_x(t) + \omega_0(t) \mathbf{F} \hat{\xi}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

con $\hat{\xi}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$. Los parámetros del controlador son la ganancia proporcional $K_P > 0$, la ganancia resonante $K_R > 0$ y la matriz $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{1 \times 2n}$.

Mientras que los términos de prealimentación $U_x^{\text{pr}}(t)$ y proporcional $U_x^{\text{p}}(t)$ son convencionales, el de compensación $U_x^{\text{c}}(t)$ requiere de contexto adicional. Siguiendo la discusión de la Sección 3.2, la referencia $I_x^{\text{ref}}(t)$ puede escribirse como salida del sistema (6), i.e., $I_x^{\text{ref}}(t) = \mathbf{H} \xi(t)$ para alguna \mathbf{H} que satisfaga (7) y condiciones iniciales adecuadas. Entonces, su derivada resulta en $\dot{I}_x^{\text{ref}}(t) = \omega_0(t) \mathbf{H} \mathbf{F} \xi(t)$. Como \mathbf{H} es prácticamente arbitraria (ver Observación 1) y \mathbf{F} es invertible, podemos asociar a \mathbf{G} con el producto $\mathbf{H} \mathbf{F}$. Así, el término $U_x^{\text{c}}(t)$ puede verse como un estimado de $\dot{I}_x^{\text{ref}}(t)$ que, cuando $\hat{\xi}(t) \equiv \xi(t)$, cancela su efecto en la dinámica de $e_x(t)$. Para que esto suceda, es crucial que $\hat{\xi}(t)$ converja a $\xi(t)$. Para lograrlo, la dinámica de $\hat{\xi}(t)$ se especifica tomando como inspiración al diseño adaptable *estrictamente positivo real* (SPR por sus siglas en inglés) (Narendra and Kudva, 1974). Para esto, nótese que todos los términos de perturbación en (9) están acoplados con la entrada de control y que el grado relativo entre el control $U_x(t)$ y la salida a controlar $e_x(t)$ es uno. La forma en que los términos $U_x^{\text{pr}}(t)$ y $U_x^{\text{p}}(t)$ se escogen hacen que el sistema $\tilde{\chi}_x(t)$ (definido en (9)) sea pasivo con respecto a la entrada $\mu(t) = U_x^{\text{c}}(t) - L_x \dot{I}_x^{\text{ref}}(t)$ y la salida $y(t) = e_x(t)$, mientras que la forma en que se escoge $U_x^{\text{c}}(t)$ hace que el sistema en lazo cerrado sea la interconexión en retroalimentación negativa de dos sistemas pasivos¹. Así, se asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, mostrar que $e_x(t) \rightarrow 0$ y $\hat{\xi}(t) = \xi(t) - \tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$ requiere de un análisis más fino. Esto se debe a que el sistema en lazo cerrado no es invariante en el tiempo y, por lo tanto, no se puede invocar el principio de invariancia de LaSalle.

Para demostrar que el control PRA asegura el seguimiento de la referencia de corriente y asegura la estabilidad de la conexión con la red, considere las dinámicas de $\tilde{\chi}_x(t)$ en (9) y de $\tilde{\xi}(t)$ al sustituir $U_x(t)$ por (10). Estas resultan en

$$\dot{\tilde{\chi}}_x(t) = \tilde{A} \tilde{\chi}_x(t) + \omega_0(t) \tilde{B} \mathbf{G} \tilde{\xi}(t), \quad (11a)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = -\omega_0(t) K_R \mathbf{G}^\top \tilde{B}^\top \tilde{\chi}_x(t) + \omega_0(t) \mathbf{F} \tilde{\xi}(t). \quad (11b)$$

con

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -K_P & 0 \\ \frac{1}{C_{N,x}} & -\frac{1}{R_{N,x} C_{N,x}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Además, considere la siguiente suposición sobre $\omega_0(t)$.

Suposición 3. Existen constantes $\eta_1 \geq \eta_2 > 0$ y $T > 0$, todas independientes de t , tales que

$$\eta_1 \geq \int_{t-T}^t \left(\int_s^t \omega_0(\sigma) d\sigma \right)^2 ds \geq \eta_2 > 0 \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad (12)$$

donde $\omega_0(t)$ es la frecuencia base de la referencia $I_x^{\text{ref}}(t)$ en (1).

La Suposición 3 es un tecnicismo que se requiere para asegurar la observabilidad de $\xi(t)$ a través de $e_x(t)$. Si $\omega_0(t)$ es suave y su derivada está acotada, (3) puede sustituirse por (Anderson, 1977)

$$\bar{\eta}_1 \geq \int_{t-T}^t \omega_0^2(\sigma) d\sigma \geq \bar{\eta}_2 > 0 \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (13)$$

Esto es, asumir que $\omega_0(t)$ es de *excitación persistente*. Dado que $\omega_0(t)$ debe coincidir con la frecuencia de la red, es de esperarse que tanto (12) como (13) se satisfagan en la práctica ya que en general se tiene que $\bar{\omega} \geq \omega_0(t) \geq \underline{\omega} > 0$.

Para el sistema (11) junto con el control (10) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4. Considere el control PRA dado en (10) aplicado al sistema (4) que resulta en la dinámica de error (11). Asuma que la Suposición 3 se satisface junto con $K_P > 0$, $K_R > 0$ y $\mathbf{G} = [G_1 \ G_2 \ \cdots \ G_n]$, $G_k \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, tal que $\text{rank} \begin{bmatrix} G_k \\ G_k \mathbf{J} \end{bmatrix} = 2$. Entonces, el origen de (11), i.e., $\tilde{\chi}_x = 0_{2n}$ y $\tilde{\xi} = 0_{2n}$, es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable, uniformemente en t_0 .

El Teorema 4 muestra que el control PRA consigue los dos objetivos planteados: lograr el seguimiento asintótico de la referencia y garantizar la estabilidad de la conexión convertidor-red. Además, se consigue siguiendo reglas muy sencillas sobre los parámetros del controlador. Por otro lado, el costo computacional de calcular el control propuesto (10) no incrementa significativamente con respecto a (3) ya que ambos controles tienen una representación lineal en espacio de estados de la misma dimensión. Así, el control PRA no sólo mejora al control PR convencional sino que lo hace sin introducir deficiencias adicionales.

A continuación, y para concluir esta sección, se da la demostración del Teorema 4.

Demostración. La demostración se hace en dos etapas. Primero, se establece la estabilidad uniforme del origen

¹ Los detalles se dan en la demostración del Teorema 4.

de (11). Para ello se construye una función de Lyapunov débil basada en la pasividad de los subsistemas. Segundo, basados en (Rueda-Escobedo and Moreno, 2020), se proponen términos adicionales a la función de Lyapunov que resultan en una función de Lyapunov fuerte y con ello se muestra la estabilidad asintótica y uniforme del punto de equilibrio.

Para comenzar, se hace notar que

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{blockdiag} \left\{ \mathbf{J}^\top, \frac{1}{2}\mathbf{J}^\top, \frac{1}{3}\mathbf{J}^\top, \dots, \frac{1}{n}\mathbf{J}^\top \right\}.$$

Entonces, bajo las condiciones del Teorema 4, $\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}$ satisface la condición (7) ya que $H_k = \frac{1}{k}G_k\mathbf{J}^\top$. Por lo tanto, la representación $\dot{I}_x^{\text{ref}}(t) = \omega_0(t)\mathbf{G}\xi(t)$ es válida.

El siguiente punto es mostrar que los sistemas (11a) y (11b) son pasivos. Considere a (11a) con entrada $\mu_1(t) = \omega_0(t)\mathbf{G}\tilde{\xi}(t)$ y salida $y_1(t) = \tilde{B}^\top\tilde{\chi}_x(t)$. Entonces, este sistema es estrictamente pasivo ya que una función de almacenamiento para él es

$$V_1(\tilde{\chi}_x) = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_x^\top P \tilde{\chi}_x, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \quad (14)$$

con derivada correspondiente a

$$\dot{V}_1(t) = -\tilde{\chi}_x^\top(t)Q \tilde{\chi}_x(t) + y_1(t)\mu_1(t),$$

$$Q = \begin{bmatrix} K_P & -\frac{p}{2C_{N,x}} \\ -\frac{p}{2C_{N,x}} & \frac{p}{R_{N,x}C_{N,x}} \end{bmatrix}.$$

La matriz Q es positiva definida si $p < 4K_P C_{N,x}/R_{N,x}$. Ahora considere al sistema (11b) con entrada $\mu_2 = -\tilde{B}^\top\tilde{\chi}_x(t)$ y salida $y_2(t) = \omega_0(t)\mathbf{G}\tilde{\xi}(t)$. Este sistema es pasivo ya que una función de almacenamiento para él es

$$V_2(\tilde{\xi}) = \frac{1}{2K_R}\tilde{\xi}^\top\tilde{\xi} \quad (15)$$

con derivada correspondiente a $\dot{V}_2(t) = y_2(t)\mu_2(t)$.

Una vez mostrada la pasividad de los subsistemas (11a) y (11b), se procede a mostrar que el origen de (11) es uniformemente estable. Para ello note que $\mu_1(t) = y_2(t)$ y $\mu_2(t) = -y_1(t)$, es decir, (11a) y (11b) están en retroalimentación negativa. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov para (11):

$$V(\tilde{\chi}_x, \tilde{\xi}) = V_1(\tilde{\chi}_x) + V_2(\tilde{\xi}). \quad (16)$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (11) resulta en

$$\dot{V}(t) = -\tilde{\chi}_x^\top(t)Q \tilde{\chi}_x(t) \leq 0.$$

Por lo tanto, podemos concluir que el origen de (11) es un punto de equilibrio globalmente estable, uniformemente en t_0 (Khalil, 2002).

Ahora, siguiendo (Rueda-Escobedo and Moreno, 2020), proponemos un término complementario a la función. Este es

$$\bar{V}(\tilde{\chi}_x, \tilde{\xi}, t) = -2\rho_{12}(t)\tilde{\chi}_x^\top \tilde{B}^\top \mathbf{G}^\top \tilde{\xi} + \rho_{22}(t)\tilde{\xi}^\top \tilde{\xi},$$

con

$$\rho_{12}(t) = \int_{t-T}^t (s-t+T) \int_s^t \omega_0(\sigma) d\sigma ds,$$

$$\rho_{22}(t) = \int_{t-T}^t (s-t+T) \left(\int_s^t \omega_0(\sigma) d\sigma \right)^2 ds.$$

Así, se puede obtener una función fuerte de Lyapunov al combinar V y \bar{V} de la siguiente forma:

$$W(\tilde{\chi}_x, \tilde{\xi}, t) = \gamma V(\tilde{\chi}_x, \tilde{\xi}) + \bar{V}(\tilde{\chi}_x, \tilde{\xi}, t),$$

donde $\gamma > 0$ es un grado de libertad que se usa para garantizar que W resulte positiva definida. Siguiendo a (Rueda-Escobedo and Moreno, 2020), se puede mostrar que $\dot{W}(t) < 0$ con la selección correcta de γ . Ya que para cualesquiera K_P , K_R y \mathbf{G} que satisfagan los criterios del teorema se puede construir W , se concluye que dichos criterios aseguran la estabilidad global y asintótica del origen de (11), uniformemente en t_0 .

5. CASO DE ESTUDIO POR SIMULACIÓN

Para ilustrar la aplicación del control propuesto se considera un inversor con un inductor de 10 [mH] por fase junto con una resistencia de 50 [mΩ]. Para el equivalente de Norton de la red se toma una capacitancia de 440 [μF] junto con una resistencia de 1.5 [kΩ]. La amplitud nominal de la fuente de corriente se toma como 66.35 [A-RMS]. Con este valor se asegura que el voltaje en el punto de conexión en estado estacionario sea de 400 [V-RMS].

Para el caso de estudio se implementa la fuente de corriente que modela a la red incluyendo los armónicos 3, 5, 7 y 9 con una amplitud equivalente al 3%, 1.5%, 1% y 1% de la amplitud nominal de la corriente. Además, la frecuencia fundamental se genera con la siguiente ecuación de swing:

$$\frac{3.665}{120\pi}\dot{\omega}_0(t) = -2.495(\omega_0(t) - 120\pi) + \Delta P(t),$$

$$\Delta P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 0.5) \\ \rho(t-0.5) & \text{si } t \geq 0.5 \end{cases},$$

$$\rho(\tau) = -75 \exp(-0.4\tau) \sin(0.5\tau).$$

Esta ecuación modela la frecuencia de una red de baja inercia que sufre variaciones por un desbalance de potencia. Los parámetros son tomados de (Rueda-Escobedo et al., 2022). La corriente resultante de esta configuración junto con la frecuencia son ilustradas en la Figura 2.

Para generar la referencia de corriente para el inversor se considera que se quieren inyectar $P = 15$ [kW] a la red. La referencia de corriente se obtiene de tomar el voltaje trifásico del capacitor $V_{C,abc}(t)$ y multiplicarlo por el factor $P/\|V_{C,abc}(t)\|^2$. Así, si la corriente sigue esta referencia, se asegura que la potencia producida es la correcta.

Para obtener la frecuencia de la red que se usará como frecuencia fundamental en el control PRA se usa el

PLL basado en el algoritmo *super twisting* propuesto en (Rueda-Escobedo et al., 2022). Se emplea este PLL ya que es capaz de realizar el seguimiento de frecuencias variantes en el tiempo y por ello dar el valor correcto de ésta durante el transitorio.

En el caso del control PRA se escoge una ganancia proporcional de $K_P = 10$ y una resonante de $K_R = 100$. La matriz \mathbf{G} se escoge tal que $G_k = [1 \ 0]$ para $k = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. En total se usa el término fundamental así como los armónicos 3, 5, 7 y 9. En la Figura 3 se muestra el resultado del seguimiento. Como puede observarse, en las tres fases el error de seguimiento decae exponencialmente y se mantiene a pesar de las variaciones en la frecuencia. Así, se ilustran las propiedades que matemáticamente se demostraron en la sección anterior.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una nueva versión de control proporcional-resonante para inversores trifásicos que permite adaptar, durante la operación, la frecuencia fundamental de los términos resonantes. La forma en que el control propuesto esta estructurado hace que sea trivial el proponer ganancias que garanticen el seguimiento de las

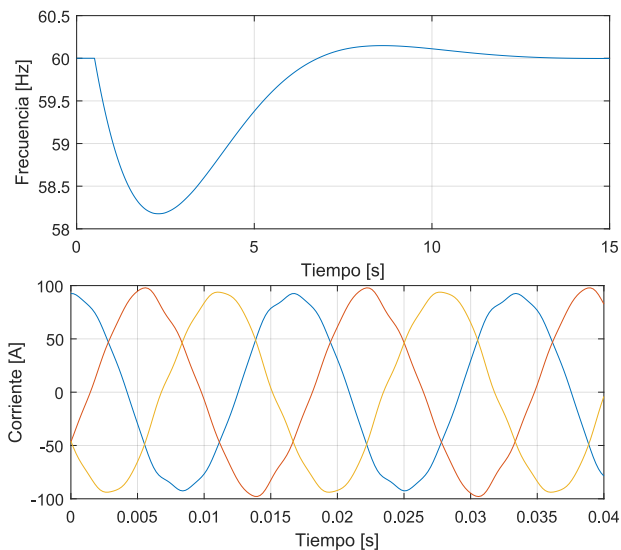


Fig. 2. Frecuencia fundamental y corriente trifásica de la red usadas en la simulación.

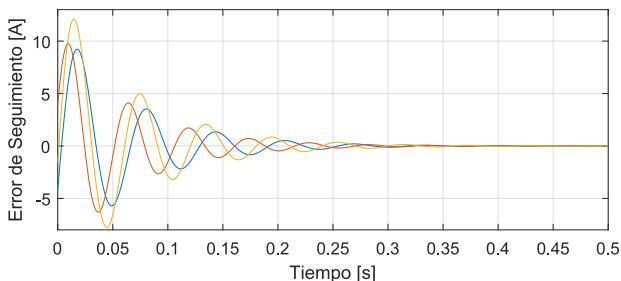


Fig. 3. Error de seguimiento en cada una de las fases.

referencias de corriente y que al mismo tiempo aseguren la estabilidad de la conexión del inversor con la red.

El control propuesto toma su estructura de dos fuentes: el control por modelo interno y el control adaptable. Del primero se toma el principio de desarrollar un sistema externo capaz de generar la referencia mientras que del control adaptable se toma la idea de explotar la pasividad para diseñar los términos resonantes y así asegurar la estabilidad del sistema completo. Así, el control resultante se denomina adaptable no sólo porque permite ajustar la frecuencia sino porque retoma varios conceptos de esta área del control automático.

REFERENCIAS

- Anderson, B.D.O. (1977). Exponential stability of linear equations arising in adaptive identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(1), 83–88.
- Fang, J., Tang, Y., Li, H., and Blaabjerg, F. (2018). The role of power electronics in future low inertia power systems. In *IEEE International Power Electronics and Application Conference and Exposition*, 1–6.
- Golestan, S., Ebrahimzadeh, E., Guerrero, J.M., and Vasquez, J.C. (2018). An adaptive resonant regulator for single-phase grid-tied vses. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 33(3), 1867–1873.
- Husev, O., Roncero-Clemente, C., Makovenko, E., Pimentel, S.P., Vinnikov, D., and Martins, J. (2020). Optimization and implementation of the proportional-resonant controller for grid-connected inverter with significant computation delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(2), 1201–1211.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Milano, F., Dörfler, F., Hug, G., Hill, D.J., and Verbič, G. (2018). Foundations and Challenges of Low-Inertia Systems (Invited Paper). In *2018 Power Systems Computation Conference (PSCC)*, 1–25.
- Narendra, K.S. and Kudva, P. (1974). Stable adaptive schemes for system identification and control-Part I. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-4(6), 542–551.
- Ratnam, K.S., Palanisamy, K., and Yang, G. (2020). Future low-inertia power systems: Requirements, issues, and solutions - a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 124, 109773.
- Rueda-Escobedo, J.G. and Moreno, J.A. (2020). Strong Lyapunov functions for two classical problems in adaptive control. *Automatica*, 109250.
- Rueda-Escobedo, J.G., Moreno, J.A., and Schiffer, J. (2022). Design and tuning of the super-twisting-based synchronous reference frame phase-locked-loop. In *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, 4300–4306.
- Timbus, A., Ciobotaru, M., Teodorescu, R., and Blaabjerg, F. (2006). Adaptive resonant controller for grid-connected converters in distributed power generation systems. In *Twenty-First Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2006. APEC '06.*, 6 pp.–.