

Mathematical modeling of a three-phase induction motor fed by a photovoltaic system

A. Pineda-Uribe* G. V. Guerrero-Ramírez* A. Martínez-Barbosa* M. Adam-Medina* E. Guerrero-Ramírez**

*Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Interior Internado Palmira s/n, Cuernavaca, Morelos 62490, México
(e-mails: m22ce022@cenidet.tecnm.mx, gerardo.gr@cenidet.tecnm.mx,
alberto.martinez19ea@cenidet.edu.mx, manuel.am@cenidet.tecnm.mx).

**Universidad Tecnológica de la Mixteca, Carretera a Acatlima km. 2.5 s/n, Huajuapán de León,
Oaxaca 69000, México (e-mail: eguerrero@mixteco.utm.mx).

Abstract: This paper presents the mathematical modeling of the three-phase squirrel cage induction motor and its driver, the DC bus, and a photovoltaic system comprised of photovoltaic cells and the DC/DC boost converter. The mathematical modeling is accomplished in two manners, using the laws of Physics and the Euler–Lagrange approach. In addition, the mathematical modeling also considers the *abc* and *qd0* reference frames. The mathematical models are validated through simulation in the Matlab/Simulink environment, programming the obtained equations and comparing them with a block model of the simulation environment.

Keywords: Mathematical Modeling, Modeling of Physical Systems, Modeling and Simulation of Power Systems, Renewable Energy System Modeling and Integration.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, la energía solar fotovoltaica (FV) se ha integrado en los sistemas electrónicos convencionales. Esta integración tiene las siguientes ventajas: desde el punto de vista medioambiental, contribuye a mitigar el cambio climático al reemplazar las fuentes de energía no renovables por su contraparte renovable. Desde el punto de vista social, el usuario final utiliza los sistemas electrónicos sin tener conocimientos técnicos en materia de la energía solar FV. Finalmente, desde el punto de vista económico, la reducción de la demanda de energía a la red eléctrica disminuye los costos de operación (Creutzig et al., 2017; Kabir et al., 2018).

Uno de los sistemas electrónicos más utilizados en el sector doméstico e industrial es la combinación de un motor junto con su impulsor, utilizados para controlar diferentes procesos de manufactura, en aplicaciones de bombeo de agua, como manejador de compresores en refrigeradores o en sistemas de aire acondicionado, o en vehículos eléctricos, entre otros. En este caso, el motor de CA de inducción trifásico tipo jaula de ardilla (SCIM, por sus siglas en inglés) es la máquina eléctrica más utilizada para las diferentes aplicaciones, principalmente porque tiene una construcción sencilla y robusta, consigue una alta eficiencia y mantiene bajos costos de mantenimiento (Marfoly et al., 2021; Paramo-Balsa et al., 2022).

Entonces surge la idea de alimentar el SCIM y su impulsor con un sistema FV para aprovechar las ventajas de la integración de la energía FV. Para lograr lo anterior, se requiere de un modelo matemático que describa adecuadamente la integración y el comportamiento dinámico de todo el sistema para controlar las distintas variables.

Sin embargo, los controladores utilizados hasta el momento han utilizado modelos matemáticos por partes, ya que ha sido

conveniente separar al sistema general en subsistemas y controlar de manera independiente cada uno de ellos aplicando las teorías de control ya conocidas. Lo anterior se realiza al utilizar un capacitor con un valor relativamente alto en medio de los subsistemas en un bus de CD, permitiendo considerar a cada subsistema como partes independientes, en donde sus interacciones no se reflejen entre ellas. No obstante, sigue siendo importante obtener un modelo matemático que describa adecuadamente la interacción total del sistema cuando, por ejemplo, se disminuya el valor del capacitor para mejorar la confiabilidad de todo el sistema (Khan et al., 2023).

En este sentido, han sido relativamente pocos los trabajos que muestran el modelo matemático del SCIM alimentado por un sistema FV, descritos a continuación. Linares-Flores et al. (2019) muestran el modelo matemático de las celdas FV, el convertidor CD/CD elevador, el bus de CD, el impulsor y el SCIM. El modelo matemático se obtuvo mediante leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff en el marco de referencia *qd0*, aunque para controlar el sistema se consideró dividirlo en el sistema FV y en SCIM y su impulsor. Abuashour et al. (2018) presentan el modelo matemático en coordenadas *qd0* del sistema conformado por las celdas FV, el convertidor CD/CD reductor, el SCIM y su impulsor, además, incluye el modelo de un generador eólico. Sin embargo, nuevamente controla al sistema propuesto de manera independiente. De igual manera, Errouha y Derouich (2019) presentan el modelo matemático del SCIM alimentado por un sistema FV en coordenadas *qd0*, pero no lo utilizan en el control del sistema.

Con base en lo anterior, en este trabajo se propone modelar matemáticamente al sistema formado por las celdas fotovoltaicas, el convertidor CD/CD elevador, el bus de CD y el SCIM junto con su impulsor. El modelado matemático se realiza utilizando dos enfoques: el primero es un modelado convencional en donde se utilizan las leyes de la Física, como

las leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff, la ley de Ohm, la ley de Faraday, entre otras. El segundo es el enfoque energético de Euler-Lagrange, en donde se considera la interacción entre los subsistemas de diferentes naturalezas energéticas. La diferencia es que el primero describe el comportamiento en términos de los voltajes, las corrientes y la velocidad, mientras que el segundo utiliza las así llamadas variables generalizadas, además las propiedades facilitan el análisis del sistema. Por lo tanto, se obtienen dos modelos matemáticos distintos, aunque ambos son equivalentes y describen el comportamiento dinámico del sistema.

La contribución científica de este documento consiste en: i) obtener dos modelos matemáticos que representan al sistema propuesto, y ii) mostrar el procedimiento matemático de los enfoques utilizados para obtener ambos modelos. Cabe mencionar que los modelos matemáticos obtenidos se validan en simulación en el ambiente Matlab/Simulink. En este caso, se programan las ecuaciones resultantes y se comparan contra un modelo a bloques de la propia herramienta de simulación.

El resto del documento se organiza de la siguiente manera: la segunda sección presenta el modelado matemático del sistema utilizando los dos enfoques descritos. La tercera sección describe el escenario de simulación en el ambiente Matlab/Simulink. La cuarta sección muestra los resultados de simulación de los modelos matemáticos. Finalmente, la quinta sección presenta las conclusiones generales.

2. MODELADO DEL SISTEMA PROPUESTO

La Fig. 1 muestra el sistema propuesto conformado por las celdas FV, el convertidor CD/CD elevador, el bus de CD, el impulsor del motor y el SCIM. Este sistema se va a modelar mediante el enfoque convencional utilizando leyes de la Física y mediante el enfoque energético de Euler-Lagrange, estableciendo las siguientes consideraciones para modelar:

- El convertidor CD/CD elevador opera en el modo de conducción continuo.
- No se consideran pérdidas por conducción en los interruptores.
- El SCIM es un sistema trifásico balanceado con conexión en estrella y opera en la región lineal de flujo magnético.
- R_{cd} representa una carga adicional como un banco de baterías u otra carga para lograr el equilibrio de potencias.

2.1 Modelado matemático convencional

Aplicando las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff a la conexión de las celdas fotovoltaicas, el convertidor CD/CD elevador y el bus de CD de la Fig. 1 se obtienen (1)–(3), en donde $d \in [0,1]$ es el ciclo de trabajo promedio del convertidor elevador; v_{c_1} es el voltaje de las celdas FV y del capacitor C_1 ; i_{pv} es la corriente de las celdas FV; i_L es la corriente del inductor L y de su resistencia parásita R_L ; v_{c_2} es el voltaje del capacitor C_2 del bus de CD; e i_{mi} es la corriente que se dirige al impulsor del motor. En este caso, C_1 , L , R_L y C_2 son parámetros de diseño; d e i_{pv} son variables de entrada

para el modelo matemático; mientras que i_{mi} será descrita a continuación.

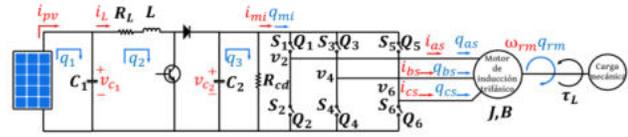


Fig. 1. Diagrama del sistema propuesto.

$$\frac{d}{dt} v_{c_1} = -\frac{i_L}{C_1} + \frac{i_{pv}}{C_1} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} i_L = \frac{v_{c_1}}{L} - \frac{R_L i_L}{L} - \frac{(1-d)v_{c_2}}{L} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} v_{c_2} = \frac{(1-d)i_L}{C_2} - \frac{v_{c_2}}{R_{cd}C_2} - \frac{i_{mi}}{C_2} \quad (3)$$

El impulsor es un inversor de voltaje trifásico conformado por tres ramas y seis interruptores: $\{Q_1, Q_3, Q_5\}$ en la parte superior y $\{Q_2, Q_4, Q_6\}$ en la parte inferior. El encendido y apagado de estos interruptores los controlan las funciones de conmutación $\{S_1, \dots, S_6\} \in \{0,1\}$. Los voltajes de cada rama del impulsor $\{v_2, v_4, v_6\}$ corresponden a los voltajes del estator del SCIM $\{v_{as}, v_{bs}, v_{cs}\}$. La corriente i_{mi} se dirige al impulsor del motor y se expresa en términos de las corrientes de los interruptores Q_1, Q_3 y Q_5 en (4). De igual manera, los voltajes línea a línea del estator $\{v_{abs}, v_{bcs}, v_{cas}\}$ se expresan en (5)–(7).

$$i_{mi} = i_{Q_1} + i_{Q_3} + i_{Q_5} \quad (4)$$

$$v_{abs} = v_2 - v_4 \quad (5)$$

$$v_{bcs} = v_4 - v_6 \quad (6)$$

$$v_{cas} = v_6 - v_2 \quad (7)$$

Las Tablas 1–3 muestran los voltajes $\{v_{2,4,6}\}$, las corrientes $\{i_{Q_{1,3,5}}\}$ y las cargas eléctricas $\{q_{Q_{1,3,5}}\}$ de las ramas del impulsor según las funciones de conmutación $\{S_1, \dots, S_6\}$ (Beristáin y Pérez, 2022). Además, en (8)–(13) se muestra el comportamiento de los voltajes y las corrientes de los interruptores respecto al voltaje del bus de CD, las funciones de conmutación y las corrientes del estator del SCIM $\{i_{as}, i_{bs}, i_{cs}\}$.

$$i_{Q_1} = S_1 i_{as} \quad (8)$$

$$v_2 = S_1 v_{c_2} \quad (9)$$

$$i_{Q_3} = S_3 i_{bs} \quad (10)$$

$$v_4 = S_3 v_{c_2} \quad (11)$$

$$i_{Q_5} = S_5 i_{cs} \quad (12)$$

$$v_6 = S_5 v_{c_2} \quad (13)$$

Tabla 1. Comportamiento de la primera rama del impulsor

S_1	S_2	i_{Q_1}	v_2	q_{Q_1}
0	1	0	0	0
1	0	i_{as}	v_{c_2}	q_{as}

Tabla 2. Comportamiento de la segunda rama del impulsor

S_3	S_4	i_{Q_3}	v_4	q_{Q_3}
0	1	0	0	0
1	0	i_{bs}	v_{c_2}	q_{bs}

Tabla 3. Comportamiento de la tercera rama del impulsor

S_5	S_6	i_{Q_5}	v_6	q_{Q_5}
0	1	0	0	0
1	0	i_{cs}	v_{C_2}	q_{cs}

Sustituyendo (8), (10) y (12) en (4) se obtiene la corriente i_{mi} en términos de $\{S_1, \dots, S_6\}$ y de las corrientes del motor en (14). De manera similar, en (15)–(17) se muestran los voltajes línea a línea en términos de $\{S_1, \dots, S_6\}$ y del voltaje del bus de CD al sustituir (9), (11) y (13) en (5)–(7).

$$i_{mi} = S_1 i_{as} + S_3 i_{bs} + S_5 i_{cs} \quad (14)$$

$$v_{abs} = S_1 v_{dc} - S_3 v_{dc} \quad (15)$$

$$v_{bcs} = S_3 v_{dc} - S_5 v_{dc} \quad (16)$$

$$v_{cas} = S_5 v_{dc} - S_1 v_{dc} \quad (17)$$

Es conveniente obtener una expresión para los voltajes de línea del SCIM. Considerando que es una máquina simétrica, balanceada y tiene una conexión en estrella, se tiene que los voltajes de línea $\{v_{as}, v_{bs}, v_{cs}\}$ se expresan de forma matricial en términos de las funciones de conmutación y del voltaje del bus de CD en (18) (Martinez-Barbosa et al., 2023).

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \frac{v_{dc}}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_5 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Hasta el momento se obtuvieron los voltajes de salida del impulsor, faltando por describir las corrientes i_{as} , i_{bs} e i_{cs} que interactúan en el bus de CD de (14). Estas corrientes se obtienen a partir del comportamiento dinámico del SCIM. En este caso, el modelo matemático ha sido estudiado en la literatura, mostrado en (19) (Le Roux y Ngwenyama, 2022).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}'_{sr} \\ (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{L}'_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{abcs} \\ \mathbf{v}'_{abcr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{r}'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} - n_p \omega_{rm} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{d}{d\theta_r} \mathbf{L}'_{sr} \\ \frac{d}{d\theta_r} (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde $\mathbf{v}_{abcs} = (v_{as} \ v_{bs} \ v_{cs})^T$ e $\mathbf{i}_{abcs} = (i_{as} \ i_{bs} \ i_{cs})^T$ son los vectores de voltaje y corriente del estator; $\mathbf{v}'_{abcr} = (v'_{ar} \ v'_{br} \ v'_{cr})^T$ e $\mathbf{i}'_{abcr} = (i'_{ar} \ i'_{br} \ i'_{cr})^T$ son los vectores de voltaje y corriente del rotor referidos al estator; \mathbf{r}_s y \mathbf{r}'_r son matrices diagonales resistivas del estator y del rotor referidas al estator dadas por (20) y (21), en donde cada matriz tiene el mismo valor de \mathbf{r}_s y \mathbf{r}'_r en sus diagonales, porque se considera una máquina simétrica balanceada; \mathbf{L}_s es la matriz de inductancias del estator dada por (22), con \mathbf{L}_{ls} y \mathbf{L}_{ms} las inductancias de dispersión del estator y magnetización entre el estator y el rotor, respectivamente; \mathbf{L}'_r es la matriz de inductancias del rotor referida al estator dada por (23), con L'_{lr} la inductancia de dispersión del rotor referida al estator; y \mathbf{L}'_{sr} es la matriz de inductancias mutuas referida al estator dada por (24), la cual tiene valores variables de acuerdo a la posición angular eléctrica del rotor θ_r . Además, en (25)–(27) se muestran las relaciones entre la posición y velocidad eléctricas con el desplazamiento angular mecánico θ_{rm} y la velocidad angular mecánica ω_{rm} en el rotor, en donde n_p es el número de pares de polos del SCIM.

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{r}'_r = \begin{pmatrix} r'_r & 0 & 0 \\ 0 & r'_r & 0 \\ 0 & 0 & r'_r \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{L}'_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{L}'_{sr} = L_{ms} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt} \quad (25)$$

$$\theta_r = n_p \theta_{rm} \quad (26)$$

$$\omega_r = n_p \omega_{rm} \quad (27)$$

El comportamiento dinámico de la parte mecánica del SCIM se muestra en (28)–(30), donde T_e es el par electromagnético, J es el momento de inercia, B es el coeficiente de fricción viscosa y τ_L es el par externo aplicado a la flecha del motor.

$$T_e = n_p (\mathbf{i}_{abcs})^T \left(\frac{d}{d\theta_r} \mathbf{L}'_{sr} \right) \mathbf{i}'_{abcr} \quad (28)$$

$$\omega_{rm} = \frac{d}{dt} \theta_{rm} \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_{rm} = \frac{1}{J} T_e - \frac{B}{J} \omega_{rm} - \frac{1}{J} \tau_L \quad (30)$$

Las ecuaciones (19)–(27) describen el comportamiento dinámico de la velocidad angular mecánica, el par electromagnético y de las corrientes i_{as} , i_{bs} e i_{cs} requeridas en (14), en donde los voltajes del estator están dados por (18), el par externo τ_L se considera como una entrada al modelo matemático, y los demás son parámetros de diseño. Estas ecuaciones utilizan el marco de referencia abc , sin embargo, generalmente se prefiere el marco de referencia $qd0$ porque facilita las tareas de control. Por lo tanto, la transformación entre los marcos de referencia utiliza la transformada de Park para convertir las señales trifásicas de abc a un marco de referencia ortogonal giratorio de dos fases $qd0$ (Krause et al., 2013). En este caso, se utiliza la matriz \mathbf{K}_T de (31) para la transformación, en donde θ es el ángulo de giro entre los marcos de referencia. Además, ω es la velocidad de rotación del marco de referencia dada por (32).

$$\mathbf{K}_T = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin \theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (32)$$

Aplicando la transformación entre los marcos de referencia abc a $qd0$ en la parte eléctrica del motor de (19) se obtiene (33).

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{qd0s} \\ i'_{qd0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{qd0s} \\ v'_{qd0r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_s & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qd0s} \\ i'_{qd0r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qd0s} \\ i'_{qd0r} \end{bmatrix} \quad (33)$$

en donde:

$$L_{11} = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$L_{22} = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L'_{lr} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$L_{12} = L_{21} = \begin{bmatrix} L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$L_M = \frac{3}{2} L_{ms} \quad (37)$$

$$K_{11} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$K_{22} = (\omega - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

La transformación del marco de referencia abc a $qd0$ no afecta la parte mecánica, así que (29) y (30) permanecen sin cambios. Sin embargo, el par electromagnético de (28) sí se ve afectado, obteniendo (40) al aplicar la transformación.

$$T_e = \frac{3}{2} n_p L_M (i_{qs} i'_{dr} - i_{ds} i'_{qr}) \quad (40)$$

La principal diferencia entre los marcos de referencia abc y $qd0$, es que las matrices de inductancias del marco de referencia $qd0$ no dependen de la posición angular eléctrica θ_r (véase (22)–(24) y (34)–(36)). Así que el seguimiento de trayectorias se simplifica a tareas de regulación en los objetivos de control. Sin embargo, se requiere establecer la velocidad de rotación del marco de referencia ω .

2.2 Modelado matemático con el enfoque Euler–Lagrange

En el enfoque energético de Euler–Lagrange se utilizan variables generalizadas q_i , en donde $i = 1 \dots n$, con n el número de variables generalizadas. Después, se resuelve la ecuación general de Euler–Lagrange mostrada en (41) para cada variable generalizada, en donde \dot{q}_i es la derivada temporal de la variable generalizada, \mathcal{L}^* es el *colagrangiano* que es la función de almacenamiento de energía, G es la función de disipación de energía y E_i es la fuente de energía.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} = E_i \quad (41)$$

En el caso del sistema propuesto de la Fig. 1, las variables generalizadas son las cargas eléctricas de las mallas del sistema FV $\{q_1, q_2, q_3\}$, las cargas eléctricas del estator y del rotor referidas en el estator $\mathbf{q}_{abcs} = (q_{as} \ q_{bs} \ q_{cs})^T$ y $\mathbf{q}_{abcr} = (q_{ar} \ q_{br} \ q_{cr})^T$, y la posición angular mecánica del rotor $q_{rm} = \theta_{rm}$; resultando en $n = 10$ variables generalizadas y ecuaciones de Euler–Lagrange. Analizando únicamente la parte del sistema FV, se tienen el colagrangiano

\mathcal{L}^*_{pv} , la función de disipación de energía G_{pv} y las fuentes de energía dadas por (42)–(44), respectivamente.

$$\mathcal{L}^*_{pv} = \frac{1}{2} L \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2C_1} (q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2C_2} [(1-d)q_2 - q_3]^2 \quad (42)$$

$$G_{pv} = \frac{1}{2} R_L \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} R_{cd} (\dot{q}_3 - \dot{q}_{mi})^2 \quad (43)$$

$$[E_1 \ E_2 \ E_3] = [0 \ 0 \ 0] \quad (44)$$

Desarrollando la ecuación de Euler–Lagrange de (41) para $\{q_1, q_2, q_3\}$ se obtienen (45)–(47), en donde es importante mencionar que (45) es una restricción impuesta por el sistema.

$$\dot{q}_1 = i_{pv} \quad (45)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{-R_L \dot{q}_2}{L} + \frac{(q_1 - q_2)}{LC_1} - \frac{(1-d)[(1-d)q_2 - q_3]}{LC_2} \quad (46)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{(1-d)q_2 - q_3}{R_{cd} C_2} + \dot{q}_{mi} \quad (47)$$

Además, los demás parámetros y variables fueron definidos en la sección 2.1, excepto por q_{mi} , que es la carga eléctrica que se dirige al impulsor del SCIM. Esta carga y su derivada se obtienen a partir de las Tablas 1–3 y, realizando un proceso similar al de la sección mencionada, se obtiene (48).

$$\dot{q}_{mi} = S_1 \dot{q}_{as} + S_3 \dot{q}_{bs} + S_5 \dot{q}_{cs} \quad (48)$$

La expresión de $\{\dot{q}_{as}, \dot{q}_{bs}, \dot{q}_{cs}\}$ se obtiene del comportamiento del SCIM. En este caso, se tienen el colagrangiano \mathcal{L}^*_{mi} , la función de disipación de energía G_{mi} y las fuentes de energía dadas por (49)–(51), respectivamente, en donde se utilizan las matrices definidas en (20)–(24) (Rodríguez et al., 2019).

$$\mathcal{L}^*_{mi} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}_{abcs}]^T \begin{bmatrix} L_s & L'_{sr} \\ (L'_{sr})^T & L'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} J \dot{q}_{rm}^2 \quad (49)$$

$$G_{mi} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}_{abcs}]^T \begin{bmatrix} r_s & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} B \dot{q}_{rm}^2 \quad (50)$$

$$[E_{4-6} \ E_{7-9} \ E_{10}] = [v_{abcs} \ v'_{abcr} \ -\tau_L] \quad (51)$$

Desarrollando la ecuación de Euler–Lagrange de (41) para las variables generalizadas \mathbf{q}_{abcs} , \mathbf{q}_{abcr} y q_{rm} se obtienen (52) y (53), utilizando los parámetros y variables definidos en la sección 2.1, así como las matrices definidas en (20)–(24).

$$\begin{bmatrix} L_s & L'_{sr} \\ (L'_{sr})^T & L'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{abcs} \\ v'_{abcr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_s & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{d}{d\theta_r} L'_{sr} \\ \frac{d}{d\theta_r} (L'_{sr})^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} n_p \dot{q}_{rm} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\ddot{q}_{rm} = \frac{1}{2J} [\dot{\mathbf{q}}_{abcs}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{d}{d\theta_r} L'_{sr} \\ \frac{d}{d\theta_r} (L'_{sr})^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} - \frac{B}{J} \dot{q}_{rm} - \frac{\tau_L}{J} \quad (53)$$

Al igual que en el modelo matemático convencional, se aplica la transformación entre los marcos de referencia abc a $qd0$, obtenido el modelo matemático de (54)–(56).

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{qd0s} \\ v'_{qd0r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_s & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{abcs} \\ \dot{\mathbf{q}}_{abcr} \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$T_e = \frac{3}{2} n_p L_M (\dot{q}_{qs} \dot{q}_{dr} - \dot{q}_{ds} \dot{q}_{qr}) \quad (55)$$

$$\ddot{q}_{rm} = \frac{1}{J} T_e - \frac{B}{J} \dot{q}_{rm} - \frac{1}{J} \tau_L \quad (56)$$

Como resultado, el modelo matemático del enfoque energético se describe por (45)-(47) y (54)-(56), mientras que el modelo matemático convencional se describe por (1)-(3), (29), (30), (33) y (40).

Los modelos matemáticos son distintos en naturaleza, ya que el modelo convencional utiliza voltajes y corrientes, mientras que el modelo con enfoque energético utiliza las cargas eléctricas. Para comparar ambos modelos, el voltaje del inductor v_L se relaciona con su carga eléctrica q_L de acuerdo con (57), y el voltaje del capacitor v_c con su carga eléctrica q_c que se describe por (58).

$$v_L = L \frac{d}{dt} \dot{q}_L \quad (57)$$

$$v_c = \frac{1}{C} q_c \quad (58)$$

3. ESCENARIO DE COMPARACIÓN

Los modelos matemáticos obtenidos para el sistema propuesto de la Fig. 1 serán validados mediante simulaciones en el ambiente Matlab/Simulink. En este caso, ambos modelos se programan en código y se comparan con un modelo a bloques de la propia herramienta de simulación, tal como se muestra en el diagrama simplificado de la Fig. 2. Las Tablas 4-6 muestran los parámetros del SCIM tomados de (Krause et al., 2013), de un panel solar (considerando un arreglo de 12 paneles, 6 en serie y 2 en paralelo) y de los demás parámetros de diseño del sistema, respectivamente.

En el escenario de simulación se utiliza un ciclo de trabajo constante $d = 0.67$ para el convertidor CD/CD elevador, mientras que para controlar la velocidad del SCIM se utiliza el diagrama de la Fig. 3. Además, el SCIM arranca en vacío y se aplica un par de carga de $11.9 \text{ N} \cdot \text{m}$ en $t = 5 \text{ s}$, disminuyendo a $2 \text{ N} \cdot \text{m}$ en $t = 6 \text{ s}$. Además, se considera una irradiancia inicial de $1000 \text{ W}/\text{m}^2$, disminuyendo a $800 \text{ W}/\text{m}^2$ en $t = 6 \text{ s}$, para evaluar su efecto en el comportamiento del sistema.

Tabla 4. Parámetros del motor de inducción trifásico

Parámetros	Valor
Potencia nominal	P_{nom} 2237.1 W
Voltaje rms nominal línea a línea	$V_{s,rms LL}$ 220 V
Número de pares de polos	n_p 2
Velocidad nominal	$\omega_{rm,nom}$ 1710 rpm
Frecuencia nominal	$f_{s,nom}$ 60 Hz
Resistencia del estator	r_s 0.435 Ω
Resistencia del rotor referida al estator	r'_r 0.816 Ω
Reactancia del estator	X_{ls} 0.754 Ω
Reactancia del rotor referida al estator	X'_{lr} 0.754 Ω
Reactancia de magnetización	X_M 26.13 Ω
Momento de inercia	J 0.089 kg/m ²
Coefficiente de fricción viscosa	B 0
Par aplicado máximo	$\tau_{L,max}$ 11.9 N · m

Tabla 5. Parámetros de las celdas fotovoltaicas

Parámetro	Valor
Voltaje en el MPP	V_{mpp} 30.9 V
Corriente en el MPP	I_{mpp} 8.27 A
Potencia en el MPP	P_{mpp} 255.54 W
Voltaje en circuito abierto	V_{oc} 37.9 V
Corriente de corto circuito	I_{sc} 8.86 A

Tabla 6. Parámetros de diseño adicionales del sistema

Parámetros	Valor
Capacitor de entrada	C_1 200 μF
Inductor	L 3 mH
Resistencia parásita del inductor	R_L 1 m Ω
Capacitor del bus de CD	C_2 200 μF
Carga adicional	R_{cd} 400 Ω
Frecuencia de conmutación de los convertidores	f 60 kHz

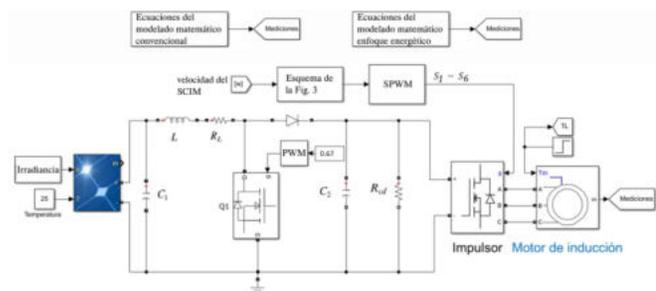


Fig. 2. Diagrama de la comparativa entre los modelos matemáticos y el diagrama a bloques en Matlab/Simulink.

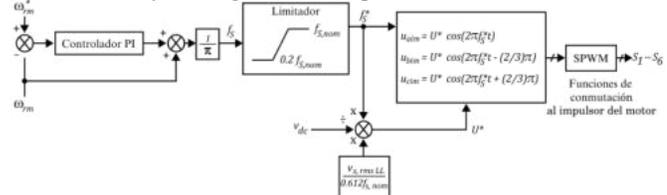


Fig. 3. Esquema de control del impulsor del motor.

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

La Fig. 4 muestra el voltaje v_{c1} y el error entre el diagrama a bloques y los modelos matemáticos. En la Fig. 5 se comparan los modelos para el voltaje del bus de CD v_{c2} , mostrando un comportamiento similar aun con las variaciones del par y la irradiancia. La Fig. 6 muestra la comparativa de la velocidad angular mecánica del SCIM, con señales de los modelos matemáticos y del modelo a bloques similares y errores cercanos a cero. El comportamiento se mantiene antes y después de aplicar un par externo de $11.9 \text{ N} \cdot \text{m}$ en $t = 5 \text{ s}$ y un par de $2 \text{ N} \cdot \text{m}$ en $t = 6 \text{ s}$. Finalmente, en las Figs. 7 y 8 se presentan las corrientes del estator del SCIM en el marco de referencia $qd0$, junto con los errores de los modelos matemáticos. En esta figura, la amplitud de las corrientes varía de acuerdo con el par de carga aplicado, aunque el

comportamiento de estas mantiene un comportamiento similar entre los modelos. Como resultado, ambos modelos matemáticos describen adecuadamente el comportamiento dinámico del sistema propuesto.

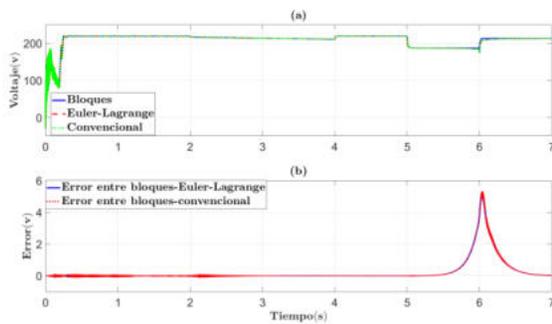


Fig. 4. (a) voltaje v_{C1} , y (b) error entre los modelos.

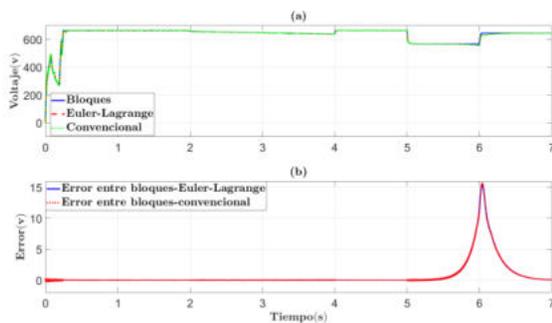


Fig. 5. (a) voltaje v_{C2} , y (b) error entre los modelos.

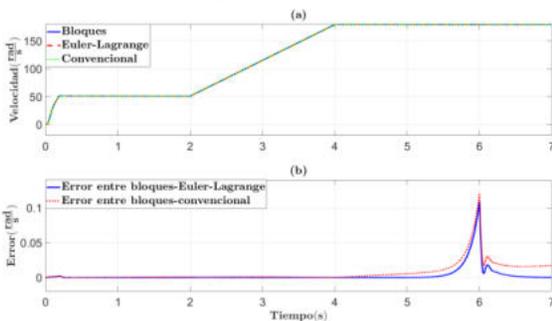


Fig. 6. (a) velocidad angular mecánica del SCIM, y (b) error entre los modelos.

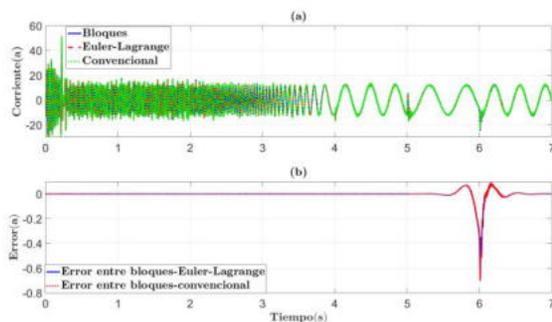


Fig. 7. (a) corriente i_{qs} del estator, y (b) error entre los modelos.

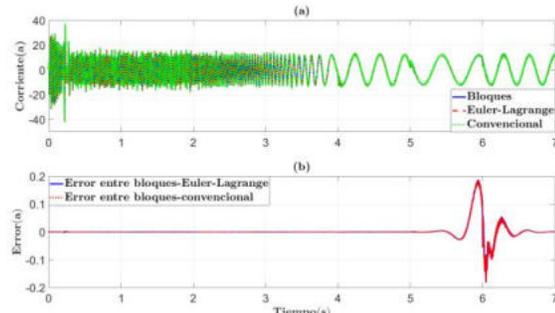


Fig. 8. (a) corriente i_{ds} del estator, y (b) error entre los modelos.

5. CONCLUSIONES

Este documento presenta dos métodos de modelado matemático para un sistema que involucra un motor de inducción trifásico con su impulsor, alimentado por un sistema FV compuesto por celdas FV, un convertidor CD/CD elevador y un bus de CD. Se obtuvieron dos modelos matemáticos validados en simulación, que muestran comportamiento idéntico bajo restricciones de modelado. En futuros trabajos, se planea aplicar el modelo matemático a un sistema de bombeo. Además, se contempla emplear técnicas de seguimiento del punto de máxima potencia, ya que este trabajo se enfocó en el modelado matemático y validación en simulación.

REFERENCIAS

- Abuashour, M. I., et al. (2018). Modelling, simulations and operational performance of a stand-alone hybrid wind/PV energy system supplying induction motor for pumping applications. *Int. J. Eng. Syst. Model. Simul.*, vol. (10), pp. 12-25.
- Beristáin, J. A., and Pérez, J. (2022). Convertidor bidireccional CD-CA trifásico con aislamiento en alta frecuencia: modelado utilizando funciones de conmutación. *R. Iber. Aut. Inf. Ind.*, vol. (19), pp. 199-209.
- Creutzig, F., Agoston, P., Goldschmidt, J. C., Luderer, G., Nemet, G., and Pietzcker, R. C. (2017). The underestimated potential of solar energy to mitigate climate change. *Nature Energy*, vol. (2), pp. 17140.
- Errouha, M., and Derouich, A. (2019). Study and comparison results of the field oriented control for photovoltaic water pumping system applied on two cities in Morocco. *Bull. Elect. Eng. Inform.*, vol. (8), pp. 1206-1212.
- Kabir, E., Kumar, P., Kumar, S., Adelodun, A. A., and Kim, K.-H. (2018). Solar energy: Potential and future prospects. *Ren. Sustain. Energy Rev.*, vol. (82), pp. 894-900.
- Khan, A. A., Zaffar, N. A., and Ikram, M. J. (2023). DC-Link Ripple Reduction for Parallel Inverter Systems by a Novel Formulation Using Multiple Space Vector-Based Interleaving Schemes. *Electronics*, vol. (12), pp. 1496.
- Krause, P. C., Wasynczuk, O., Sudhoff, S. D., and Pekarek, S. D. (2013). Analysis of electric machinery and drive systems. *John Wiley & Sons*: Hoboken, NJ, USA.
- Le Roux, P. F., and M. K. Ngwenyama. (2022). Static and Dynamic Simulation of an Induction Motor Using Matlab/Simulink. *Energies*, vol. (15), pp. 3564.
- Linares-Flores, J., et al. (2019). Angular speed control of an induction motor via a solar powered boost converter-voltage source inverter combination. *Energy*, vol. (166), pp. 326-334.
- Marfoli, A., Nardo, M. D., Degano, M., Gerada, C., and Chen, W. (2021). Rotor Design Optimization of Squirrel Cage Induction Motor - Part I: Problem Statement. *IEEE Tran. on En. Conv.*, vol. (36), pp. 1271-1279.
- Martinez-Barbosa, A., et al. (2023). Modeling and Control of an Air Conditioner Powered by PV Energy and the Grid Using a DC Microgrid. *Processes*, vol. (11), pp. 1547.
- Paramo-Balsa, P., Roldan-Fernandez, J. M., Gonzalez-Longatt, F., and Burgos-Payan, M. (2022). Measurement of the Speed of Induction Motors Based on Vibration with a Smartphone. *Appl. Sci.*, vol. (12), pp. 3371.
- Rodriguez, I. V. H., Ramirez, G. V. G., Beltrán, C. D. G., Medina, M. A, Carmen, F. J. T, and Ortiz, E. R. (2019). Modelado del motor de inducción en la formulación Euler-Lagrange considerando las pérdidas del núcleo. *Memorias del C. Nac. de Control Aut.*, vol. (2), pp. 653-658.