Memorias del 2023 Congreso Nacional de Control Automático
25-27 de Octubre, 2023. Acapulco, Guerrero, México.

Fractional order PI observer for a class of fractional order systems

Lorenz Josue Oliva-Gonzalez * **Rafael Martínez-Guerra** *

* *Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Ciudad de México 07360, México (E-mail: lorenz.oliva.g@cinvestav.mx, rguerra@ctrl.cinvestav.mx)*

Abstract: Currently the study of fractional order systems has become of great research interest, in particular the state estimation stands out within the lines of studies for this type of systems. Different methodologies have been proposed in order to solve this problem, however most of the techniques involve complete information of the system. Thus, this work presents a methodology for state estimation in a class of fractional order systems based on a fractional order observer which is constructed through an algebraic technique. This observer presents some significant properties, for instance, only variables of interest are estimated, i.e., it is a non-redundant observer, it does not need complete information of the system and the initial conditions for the observer can be freely assigned. The stability of this observer is analyzed with the global Mittag-Leffler boundedness approach. Finally, the effectiveness and accuracy of the proposed methodology is verified through state estimation of a fractional-order Duffing chaotic system.

Keywords: Fractional order systems, Fractional order observer, Global Mittag-Leffler boundedness, State estimation, Non-redundant observer

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario nace casi al mismo tiempo que el calculo ordinario, este involucra el estudio de los operadores derivada e integral de orden arbitrario (Kilbas et al. (2006)). El cálculo fraccionario unifica y generaliza las nociones de diferenciación e integración de orden entero, por otro lado, el comportamiento de un sistema físico puede ser descrito a partir de un modelo matemático el cual es un conjunto de ecuaciones, generalmente ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones en derivadas parciales. Actualmente, con ayuda del cálculo fraccionario se pueden modelar sistemas dinámicos a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, este tipo de sistemas toman el nombre de sistemas de orden fraccionario. El creciente interés sobre los sistemas de orden fraccionario se debe a que su dinámica se acopla de una mejor forma a los datos experimentales obtenidos del comportamiento de un sistema físico en comparación con los modelos de orden entero, por ejemplo, sistemas biológicos (Magin (2010); Jajarmi et al. (2020)), sistemas visco-elásticos (Skaar et al. (1988)), entre otros.

Ahora bien, el problema de estimación de estados en sistemas de orden fraccionario recientemente han ganado un gran interés de investigación. Naturalmente este interés se debe a que el conocimiento de los estados de un sistema de orden fraccionario permite realizar control sobre el mismo. Por lo que, diferentes metodologías han sido propuestas para resolver este problema, por ejemplo, en los trabajos (Mofid et al. (2018); Karami-Mollaee et al. (2018)) se diseñan observadores para sistemas no lineales de orden fraccionario utilizando el enfoque de modos deslizantes, en (N'Doye et al. (2018); Pourdadashi et al. (2019)) se propone un observador proporcional integral para resolver los problemas de sincronización en sistemas caóticos y el diagnostico de fallas, respectivamente, también han sido propuestos observadores de alta ganancia en (Martínez-Fuentes and Martínez-Guerra (2019); Martínez-Guerra et al. (2022)) diseñan este tipo de observadores para sistemas de orden fraccionario no lineales perturbados, entre otros (Tabatabaei (2022)). Todos los observadores que se mencionaron anteriormente son tipo Luenberger, es decir su diseño se basa en una copia del sistema lo que implica un conocimiento completo del mismo.

Por otro lado, en los trabajos (Martínez-Martínez et al. (2011); Martínez-Guerra et al. (2015)) se propone un observador proporcional de orden reducido donde su construcción se basa en propiedades algebraicas conocidas como Observabilidad Algebraica Fraccionaria (OAF) y su generalización Observabilidad Algebraica Fraccionaria Inconmensurada (OAFI), esto observador es diseñado para resolver el problema de sincronización de sistemas no lineales de orden fraccionario conmensurados e inconmensurados.

Teniendo en cuenta el panorama de la estimación de estados en sistemas de orden fraccionario, en este trabajo presentamos una metodología basada en un observador de estados Proporcional Integral (PI) de orden fraccionario, la construcción de este observador se basa en la propiedad OAFI. Dado el esquema de observación que proponemos los problemas de sincronización del caos, diagnostico de fallas y las comunicaciones seguras pueden ser tratados utilizando este observador PI, además, es un observador no redundante, no requiere la información completa del sistema y podemos asignar las condiciones iniciales libremente. Por otro lado, el análisis de estabilidad se realiza a través del acotamiento Mittag-Leffler global, en comparación con la estabilidad Mittag-Leffler (Li et al. (2009, 2010)) este enfoque permite estudiar la estabilidad en sistemas de orden fraccionario perturbados.

El resto de este trabajo esta organizado como sigue: en la Sección 2 se dan algunos fundamentos matemáticos sobre la derivadas de orden fraccionario, funciones especiales tipo Mittag-Leffler y resultados sobre el acotamiento Mittag-Leffler global, la contribución principal que incluye el análisis y diseño del observador PI de orden fraccionario se describe en la Sección 3, en la Sección 4 verificamos la efectividad y precisión de la metodología que proponemos realizando la estimación de estados de un sistemas caótico Duffing de orden fraccionario. Finalmente la conclusión de este trabajo se enuncia en la Sección 5.

2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

En esta sección introducimos algunas definiciones sobre las derivadas de orden fraccionario y funciones especiales tipo Mittag-Leffler, además, de enunciar el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler global.

Derivadas de orden fraccionario

En contraste con el cálculo ordinario, el cálculo fraccionario presenta diferentes definiciones para el operador derivada, las definiciones más comunes son, la definición de Grünwald-Letnikov, la definición de Riemann-Liouville y la definición de Caputo, bajo ciertas condiciones estas definiciones pueden coincidir pero regularmente esto no es así (Podlubny (1998)).

En este trabajo utilizamos la definición de Caputo ya que esta presenta ciertas propiedades que permite una interpretación en el sentido de sistemas físicos, por ejemplo, el significado de las condiciones iniciales coincide con el de los sistemas de orden entero, además, la derivada de orden fraccionario de una función constante en el sentido de Caputo es cero.

Definición 1. *(Podlubny (1998)) La derivada de orden fraccionario en el sentido de Caputo es definida como*

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t) \,=\, \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1)$$

donde $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *es una función continua por tramos,* $\alpha\in\mathbb{R}^+$ *es el orden fraccionario el cual satisface* $0\leq n-1<\alpha\leq n$ *con* $n\in\mathbb{N}$ *y* $\Gamma(\cdot)$ *es la bien conocida función gama.*

Observación 1. *En este trabajo consideramos que* $n=1$ *lo que implica* $0<\alpha\leq 1$*, además, por simplicidad omitimos la dependencia del tiempo en las variables.*

Funciones tipo Mittag-Leffler

Este tipo de funciones son muy relevantes en el estudio de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario ya que permiten analizar y encontrar las soluciones de dichas ecuaciones.

Definición 2. *(Rogosin et al. (2014)) Una función tipo Mittag-Leffler de dos parámetros es definida por la serie de potencias siguiente*

$$E_{\alpha,\beta}(z) \,=\, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\alpha+\beta)} \quad (2)$$

donde $\alpha>0$*,* $\beta,z\in\mathbb{C}$.

Definición 3. *Considerando* (2) *si* $\beta=1$*, entonces se obtiene la función tipo Mittag-Leffler de un parámetro*

$$E_{\alpha,1}(z) \,=\, E_{\alpha}(z) \,=\, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\alpha+1)} \quad (3)$$

Una propiedad importante que tiene las funciones tipo Mittag-Leffler es la siguiente

Proposición 1. *La función Mittag-leffler de un argumento negativo* $E_{\alpha,\beta}(-z)$ *es completamente monotónica, si y sólo si,* $0<\alpha\leq 1$ *y* $\beta\geq\alpha$ *para todo* $z\geq 0$ *con* $\alpha>0$ *y* $\beta>0$.

Las funciones tipo Mittag-Leffler presentan propiedades interesantes las cuales pueden ser revisadas en (Rogosin et al. (2014); Haubold et al. (2011)).

Análisis de estabilidad en sistemas de orden fraccionario

Como se menciono anteriormente utilizamos el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler global para analizar la estabilidad en sistemas de orden fraccionario perturbados, este enfoque fue propuesto en (Jian et al. (2021, 2020)).

Consideramos el siguiente sistema de orden fraccionario

$${}_0^C D_t^{\alpha} z \,=\, g(t,z,v)+\xi(t,z), \quad z(0)=z_0 \quad (4)$$

donde, $0<\alpha\leq 1$ es el orden fraccionario, $g:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ es una función continua por tramos en t, localmente Lipschitz en z y uniforme en v, $z\in\mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $v\in\mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $\xi:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es una función vectorial incierta la cual se considera acotada y $z_0\in\mathbb{R}^n$ es el vector de condiciones iniciales.

Definición 4. *Sea* $V=V(t,x)$ *una función radialmente no acotada positiva definida, si existen constantes* $\mu>0$ *y* $\theta>0$ *tal que la desigualdad*

$$V-\mu \,\leq\, (V_0-\mu)\, E_{\alpha}\left(-\theta\, t^{\alpha}\right) \quad (5)$$

se cumple para $V>\mu$ *y* $V_0>\mu$ *con* $V_0=V(0,x_0)$*, entonces las trayectorias solución del sistema* (4) *son globalmente Mittag-Leffler acotadas y el conjunto com-*

pacto definido por $\Psi := \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \leq \mu\}$ *se conoce como conjunto atractivo Mittag-Leffler global.*

Observación 2. *El acotamiento Mittag-Leffler global coincide con la estabilidad Mittag-Leffler cuando* $\mu = 0$.

Observación 3. *El acotamiento Mittag-Leffler global asegura que existe un conjunto compacto* $\Omega \subseteq \Psi$ *que contiene al origen donde las trayectorias del sistema de orden fraccionario* (4) *convergen asintóticamente y se mantienen para toda condición inicial* z_0.

Concluimos esta sección enunciando una relación importante sobre la derivada de orden fraccionario en el sentido de Caputo de una función cuadrática

Lema 1. *(Jian and Wan (2017)) Sea* $p \in \mathbb{R}^n$ *un vector de funciones diferenciables, entonces se cumple la desigualdad*

$$ {}_0^C D_t^\alpha \left(p^\intercal S p\right) \leq p^\intercal S\, {}_0^C D_t^\alpha p + \left({}_0^C D_t^\alpha p\right)^\intercal S p \tag{6}$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ *es el orden fraccionario,* S *es una matriz simétrica definida positiva.* $p^\intercal$ *es el transpuesto del vector* p.

3. RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección presentamos el resultado principal de este trabajo, donde diseñamos y analizamos el observador de estados de orden fraccionario que proponemos.

Primero, consideramos una clase de sistemas de orden fraccionario

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha x &= f(t, x, u), \quad x(0) = x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ es el conjunto de ordenes fraccionarios los cuales satisfacen $0 < \alpha_i \leq 1$ para $i \in \{1, \cdots, n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salidas, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función continua por tramos en t, localmente Lipschitz en x y uniforme en u, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ es una función continua con $0 < q \leq n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de condiciones iniciales.

Observación 4. *Si* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ *el sistema* (7) *se conoce como sistema de orden fraccionario conmensurado, de otra forma es llamado sistema de orden fraccionario inconmensurado.*

Nuestro objetivo principal es estimar los estados desconocidos de (7) sólo considerando la información conocida del sistema, es decir, entradas y salidas.

En este sentido la dinámica de cada estado desconocido puede ser representada como sigue

$$ {}_0^C D_t^\beta \eta = \Phi(\cdot) \tag{8}$$

donde η es un estado desconocido de (7), $0 < \beta \leq 1$ es el orden fraccionario y $\Phi(\cdot)$ es una función desconocida.

Nótese que es necesario realizar una hipótesis sobre la función desconocida $\Phi(\cdot)$ para asegurar la existencia y unicidad de solución de (8) (ver Podlubny (1998)).

Hipótesis 1. $\|\Phi(\cdot)\|$ *tiene una cota superior* $\phi \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\phi = \sup_t \|\Phi(\cdot)\|$.

Observación 5. *En este trabajo consideramos sistemas de orden fraccionario estables con entradas acotada, ya que, el problema de estimación de estados carece de sentido si existe inestabilidad y entradas no acotadas, por lo tanto la Hipótesis 1 es factible.*

Por otro lado, consideremos el siguiente sistema de orden fraccionario

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\beta \hat{\eta} &= l_1 (\eta - \hat{\eta}) + l_2 \zeta \\ {}_0^C D_t^\beta \zeta &= l_3 (\eta - \hat{\eta}) - l_4 \zeta \end{aligned} \tag{9}$$

donde $0 < \beta \leq 1$ es el orden fraccionario, $\eta, \zeta \in C^1(\mathbb{R})$, $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{R}^+$ con las condiciones iniciales $\eta(0) = \eta_0$, $\zeta(0) = \zeta_0$ y $\eta_0, \zeta_0 \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, definimos la siguiente variable

$$\tilde{\eta} := \eta - \hat{\eta} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta (8), (9) y la dinámica de orden fraccionario β de la variable (10) obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\beta \tilde{\eta} &= -l_1 \tilde{\eta} - l_2 \zeta + \Phi(\cdot) \\ {}_0^C D_t^\beta \zeta &= l_3 \tilde{\eta} - l_4 \zeta \end{aligned} \tag{11}$$

el cual puede ser representado en la siguiente forma matricial

$$ {}_0^C D_t^\beta \sigma = L\sigma + \Delta \tag{12}$$

donde

$$\sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -l_1 & -l_2 \\ l_3 & -l_4 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Phi(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Nótese que (12) es un sistema de orden fraccionario perturbado, de esta forma podemos utilizar el acotamiento Mittag-Leffler global para analizar su estabilidad, entonces presentamos el siguiente resultado:

Teorema 1. *Las trayectorias solución del sistema de orden fraccionario* (12) *son globalmente Mittag-Leffler acotadas, así las trayectorias convergen asintóticamente y se mantienen en el conjunto compacto*

$$\Omega_1 = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^2 \mid \|\sigma\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \frac{\lambda_{\max}(P)\phi}{\sqrt{\varepsilon \lambda_{\min}(Q) - \varepsilon^2}} \right\} \tag{14}$$

donde $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *son matrices simétricas y definidas positivas las cuales cumplen* $PL + L^\intercal P = -Q$, *la constante* $\varepsilon > 0$ *satisface* $0 < \varepsilon < \lambda_{\min}(Q)$. $\lambda_{\max(\min)}(X)$ *representa el máximo(mínimo) valor propio de la matriz* X

Demostración:
Consideremos la siguiente función cuadrática

$$W(\sigma) = \sigma^\intercal P \sigma \tag{15}$$

donde $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz simétrica y definida positiva, es claro que $W(\sigma)$ es radialmente no acotada definida positiva.

En vista de (12) y el Lema 1 se sigue que

$$ {}_0^C D_t^\beta W(\sigma) \leq \sigma^\intercal \left(PL + L^\intercal P\right) \sigma + 2\sigma^\intercal P \Delta \tag{16}$$

Es fácil verificar que la matriz L es Hurwitz para cualquier $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{R}^+$ por lo que se cumple la siguiente relación

$$PL + L^\intercal P \,=\, -Q \tag{17}$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz simétrica definida positiva.

Entonces, en vista de (17) podemos escribir (16) como sigue

$${}_0^C D_t^\beta W(\sigma) \,\leq\, -\sigma^\intercal Q\sigma + 2\sigma^\intercal P\Delta \tag{18}$$

Utilizando las bien conocidas desigualdad de Rayleigh-Ritz y Cauchy-Schwarz se sigue

$${}_0^C D_t^\beta W(\sigma) \,\leq\, -\lambda_{\min}(Q)\|\sigma\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\|\sigma\|\|\Delta\| \tag{19}$$

Considerando que $2mn \leq \varepsilon m^2 + \varepsilon^{-1}n^2$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{R}$ y en vista de la Hipótesis 1 se tiene que

$${}_0^C D_t^\beta W(\sigma) \,\leq\, -\left[\lambda_{\min}(Q) - \varepsilon\right]\|\sigma\|^2 + \varepsilon^{-1}\lambda_{\max}^2(P)\phi^2 \tag{20}$$

Tomando $0 < \varepsilon < \lambda_{\min}(Q)$ y dado que la función cuadrática (15) también satisface la desigualdad de Rayleigh-Ritz entonces podemos escribir

$${}_0^C D_t^\beta W(\sigma) \,\leq\, -\vartheta W(\sigma) + \varpi \tag{21}$$

donde

$$\vartheta \,=\, \frac{\lambda_{\min}(Q) - \varepsilon}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \varpi \,=\, \varepsilon^{-1}\lambda_{\max}^2(P)\phi^2 \tag{22}$$

Ahora, consideremos el cambio de variable

$$W(\sigma) = U + \frac{\varpi}{\vartheta} \tag{23}$$

donde U es una función con las mismas propiedades que $W(\sigma)$, sustituyendo (23) en (21) obtenemos

$${}_0^C D_t^\beta U \,\leq\, -\vartheta U \tag{24}$$

En vista de (24) existe una función $R(t)$ definida positiva tal que se cumple la igualdad

$${}_0^C D_t^\beta U + \vartheta U + R(t) = 0 \tag{25}$$

La solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario (25) esta dada por

$$U = U_0 E_\beta(-\vartheta t^\beta) - R(t) * t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\vartheta t^\beta) \tag{26}$$

donde $*$ es el operador convolución, dado que $R(t)$ y $t^{\beta-1}$ son funciones no negativas y considerando que $\vartheta > 0$ por la Proposición 1 se sigue que

$$U \,\leq\, U_0 E_\beta(-\vartheta t^\beta) \tag{27}$$

Lo que conduce a la siguiente desigualdad

$$W(\sigma) - \frac{\varpi}{\vartheta} \,\leq\, \left(W(\sigma_0) - \frac{\varpi}{\vartheta}\right) E_\beta(-\vartheta t^\beta) \tag{28}$$

donde $\sigma_0 = \sigma(0)$ es la condición inicial del sistema (12).

Teniendo en cuenta la Definición 4 se concluye que las trayectorias del sistema (12) son globalmente Mittag-Leffler acotadas.

Así mismo, el conjunto compacto Mittag-Leffler atractivo global esta dado por

$$\Psi_1 = \left\{\sigma \in \mathbb{R}^2 \mid W(\sigma) \,\leq\, \frac{\varpi}{\vartheta}\right\} \tag{29}$$

En vista de la Observación 3 existe un conjunto compacto donde las trayectorias solución de (12) convergen asintóticamente y se mantienen para cualquier σ_0, como se menciono anteriormente, la función cuadrática $W(\sigma)$ también satisface la desigualdad de Rayleigh-Ritz entonces obtenemos

$$\Omega_1 = \left\{\sigma \in \mathbb{R}^2 \mid \|\sigma\| \,\leq\, \left(\frac{\varpi}{\lambda_{\min}(P)\vartheta}\right)^{1/2}\right\} \tag{30}$$

Entonces el conjunto compacto Ω_1 se puede escribir como

$$\Omega_1 = \left\{\sigma \in \mathbb{R}^2 \mid \|\sigma\| \,\leq\, \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\lambda_{\max}(P)\phi}{\sqrt{\varepsilon\lambda_{\min}(Q) - \varepsilon^2}}\right\} \tag{31}$$

■

Observación 6. *Nótese que por la forma de la función cuadrática $W(\sigma)$, el conjunto compacto Ω_1 esta centrado en el origen por lo que las trayectorias solución de (12) $\tilde{\eta}$ y ζ se aproximan al origen en consecuencia $\hat{\eta}$ se aproxima a η. Por lo tanto $\tilde{\eta}$ toma el nombre de error de estimación así, el sistema (9) es un observador Proporcional Integral (PI) de orden fraccionario para la dinámica desconocida (8),*

Observación 7. *Nótese que podemos encontrar un criterio de elección para las ganancias del observador (9) a partir de (17) y (31), si tomamos $P = I$ donde I es la matriz identidad entonces Q toma la forma*

$$Q \,=\, \begin{pmatrix} 2l_1 & l_2 - l_3 \\ l_2 - l_3 & 2l_4 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Ahora eligiendo $l_2 = l_3$, $l_4 > l_1$ y tomando $\varepsilon = l_1$ se tiene que Ω_1 esta dado por

$$\Omega_1 = \left\{\sigma \in \mathbb{R}^2 \mid \|\sigma\| \,\leq\, \frac{\phi}{l_1}\right\} \tag{33}$$

Por lo tanto un simple criterio de elección para las ganancias del observador es fijar l_1 y satisfacer $l_4 > l_1$, $l_2 = l_3$.

Por otro lado, surge de forma natural la pregunta, ¿Cómo implementar el observador (9) sólo con la información que tenemos disponible?, para esto enunciamos la propiedad OAFI

Definición 5. *Una variable de estado η satisface la propiedad de Observabilidad Algebraica Fraccionaria Inconmensurada (OAFI) si se puede representar como una función de las entradas y salidas del sistema en conjunto con sus derivadas de orden fraccionario consecutivas, es decir*

$$\eta \,=\, \psi\left(y, {}_0^C D_t^{\alpha_1} y, \cdots, {}_0^C D_t^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} y,\; u, {}_0^C D_t^{\alpha_1} u, \cdots, {}_0^C D_t^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} u\right) \tag{34}$$

donde $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ y $\psi(\cdot)$ es una función continua.

Observación 8. *En (Li and Deng (2007)) se prueba que ${}_0^C D_t^{\alpha_1}\, {}_0^C D_t^{\alpha_2} x(t) = {}_0^C D_t^{\alpha_2}\, {}_0^C D_t^{\alpha_1} x(t) = {}_0^C D_t^{\alpha_1+\alpha_2} x(t)$ si se cumple $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$, por lo tanto la propiedad OAFI esta bien definida.*

Entonces, el observador de orden fraccionario (9) se puede implementar utilizando la propiedad OAFI. Es claro que esta propiedad sugiere el uso de señales que consideramos desconocidas tales como derivadas de orden fraccionario de las entradas y salidas del sistema, sin embargo el uso de estas señales se puede evitar a través de un cambio de variable.

4. ESTIMACIÓN DE ESTADOS

En esta sección mostramos al efectividad y precisión del observador PI que proponemos a través de la estimación de estados de un sistemas caótico Duffing de orden fraccionario. Primero se presenta el diseño del observador PI de orden fraccionario y a continuación los resultados obtenidos a partir de simulaciones numéricas.

Diseño del observador

Consideremos el sistema caótico de Duffing de orden fraccionario (Petráš (2011))

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha x_1 &= x_2 \\ {}_0^C D_t^\alpha x_2 &= x_1 - \gamma x_2 - x_1^3 + \delta \end{aligned} \tag{35}$$

donde $\alpha = 0.95$ es el orden fraccionario, $\gamma = 0.15$ y $\delta = 0.3\cos(t)$, con las condiciones iniciales $x_{1_0} = x_{2_0} = 1$.

Observación 9. *Las trayectorias de un sistema caótico siempre se mantiene acotadas (Fradkov (2007)), por lo tanto se cumple la Hipótesis 1.*

Consideramos que podemos conocer a x_1 es decir $y = x_1$, mientras que x_2 es desconocido pero satisface la propiedad OAFI, es decir

$$x_2 = {}_0^C D_t^\alpha y \tag{36}$$

Definiendo $\eta = x_2$ y considerando el observador (9) con $\beta = \alpha$ obtenemos

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha \hat{\eta} &= -l_1\hat{\eta} + l_2\zeta + l_1\, {}_0^C D_t^\alpha y \\ {}_0^C D_t^\alpha \zeta &= -l_3\hat{\eta} - l_4\zeta + l_3\, {}_0^C D_t^\alpha y \end{aligned} \tag{37}$$

donde $\hat{\eta}$ es un estimado de x_2, ζ es la parte integral de orden fraccionario de $\hat{\eta}$.

Nótese que el observador (37) no puede ser implementado ya que ${}_0^C D_t^\alpha y$ es desconocida, sin embargo consideremos los siguientes cambios de variable

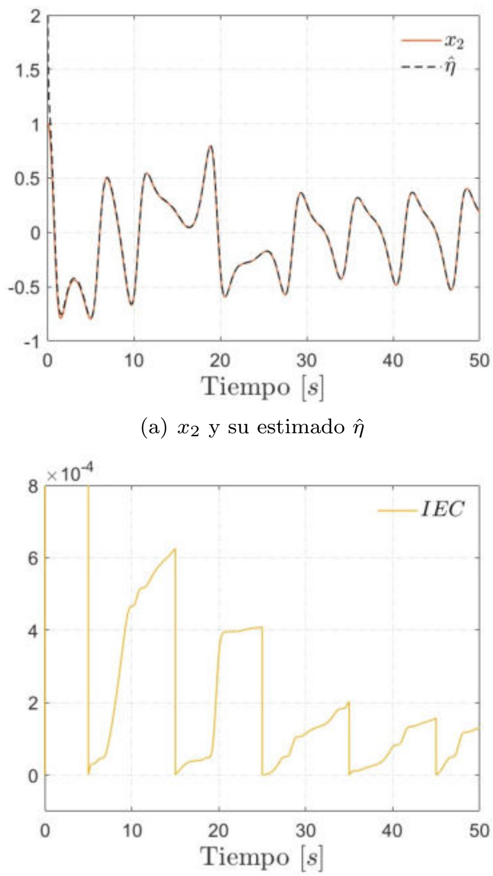
$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \rho + l_1 y \\ \zeta &= \varrho + l_3 y \end{aligned} \tag{38}$$

donde $\rho, \varrho \in C^1(\mathbb{R})$. De esta forma sustituyendo (38) en (37), se obtiene el observador PI de orden fraccionario siguiente

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha \rho &= -l_1\rho + l_2\varrho + \left(-l_1^2 + l_2 l_3\right) y \\ {}_0^C D_t^\alpha \varrho &= -l_3\rho - l_4\varrho + \left(-l_1 l_3 - l_3 l_4\right) y \\ \hat{\eta} &= \rho + l_1 y \end{aligned} \tag{39}$$

con las condiciones iniciales $\rho(0) = \rho_0$, $\varrho(0) = \varrho_0$ y $\rho_0, \varrho_0 \in \mathbb{R}$.

Observación 10. *Nótese que el cambio de variable* (38) *permitió obtener el observador* (39) *el cual si puede ser implementado.*



(a) x_2 y su estimado $\hat{\eta}$

(b) Integral del error cuadrático reiniciado cada 10 segundos

Fig. 1. Estimación del estado x_2

Simulación numérica

La simulación numérica se realiza en MatLab-Simulink utilizando el toolbox FOTF con el método de integración de Euler y un paso de 0.001. Consideramos como medida de calidad la integral de error cuadrático.

Para el observador (39) tomamos $l_1 = 75$, $l_2 = l_3 = 25$ y $l_4 = 125$ (ver Observación 7) con condiciones iniciales nulas, es decir, $\rho_0 = \varrho_0 = 0$. Las figuras 1 (a) y (b) verifican la efectividad y precisión del método de estimación de estados que proponemos en este trabajo, note que para realizar la estimación no fue necesario conocer la información completa del sistema además de poder asignar libremente las condiciones iniciales del observador.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo presentamos una metodología para resolver el problema de estimación de estados en sistemas de orden fraccionario, esta metodología se basa en un observador PI de orden fraccionario, las principales ventajas que podemos destacar con respecto a las metodologías que han sido propuestas son: no se necesita la información completa del sistema, es un observador no redundante por lo que sólo se estiman las variables de interés, el criterio de elección de las ganancias que proponemos es simple y se pueden asignar libremente las condiciones iniciales. Además, al igual que en caso de orden entero, la acción integral de orden fraccionario permite mejorar el tiempo de convergencia asintótica. Por otro lado, para analizar la estabilidad del observador utilizamos el acotamiento Mittag-Leffler global método que permite estudiar la estabilidad en sistemas de orden fraccionario perturbados. Finalmente, los resultados obtenidos en simulación verifican la efectividad y precisión del método propuesto.

REFERENCES

Fradkov, A. (2007). *Cybernetical Physics - From Control of Chaos to Quantum Control*. doi:10.1007/978-3-540-46277-4.

Haubold, H.J., Mathai, A.M., and Saxena, R.K. (2011). Mittag-leffler functions and their applications. *Journal of applied mathematics*, 2011.

Jajarmi, A., Yusuf, A., Baleanu, D., and Inc, M. (2020). A new fractional hrsv model and its optimal control: A non-singular operator approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 547, 123860.

Jian, J. and Wan, P. (2017). Lagrange -exponential stability and -exponential convergence for fractional-order complex-valued neural networks. *Neural Networks*, 91, 1–10.

Jian, J., Wu, K., and Wang, B. (2020). Global mittag-leffler boundedness and synchronization for fractional-order chaotic systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 540, 123166.

Jian, J., Wu, K., and Wang, B. (2021). Global mittag-leffler boundedness of fractional-order fuzzy quaternion-valued neural networks with linear threshold neurons. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(10), 3154–3164.

Karami-Mollaee, A., Tirandaz, H., and Barambones, O. (2018). On dynamic sliding mode control of nonlinear fractional-order systems using sliding observer. *Nonlinear Dynamics*, 92.

Kilbas, A., Srivastava, H., and Trujillo, J. (2006). *Theory and applications Of Fractional Differential Equations*, volume 204.

Li, C. and Deng, W. (2007). Remarks on fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 187(2), 777–784.

Li, Y., Chen, Y., and Podlubny, I. (2009). Mittag–leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8), 1965–1969.

Li, Y., Chen, Y., and Podlubny, I. (2010). Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized mittag–leffler stability. *Computers Mathematics with Applications*, 59(5), 1810–1821. Fractional Differentiation and Its Applications.

Magin, R.L. (2010). Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers Mathematics with Applications*, 59(5), 1586–1593. Fractional Differentiation and Its Applications.

Martínez-Fuentes, O. and Martínez-Guerra, R. (2019). A high-gain observer with mittag–leffler rate of convergence for a class of nonlinear fractional-order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 79, 104909.

Martínez-Guerra, R., Flores-Flores, J.P., and Govea-Vargas, A. (2022). A globally mittag-leffler bounded high-gain observer for systems with unknown dynamics and noisy measurements. *ISA Transactions*, 128, 336–345.

Martínez-Guerra, R., Pérez-Pinacho, C.A., Gómez-Cortés, G.C., and Cruz-Victoria, J.C. (2015). Synchronization of incommensurate fractional order system. *Applied Mathematics and Computation*, 262, 260–266.

Martínez-Martínez, R., Mata-Machuca, J.L., Martínez-Guerra, R., León, J.A., and Fernández-Anaya, G. (2011). Synchronization of nonlinear fractional order systems. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7), 3338–3347.

Mofid, O., Mobayen, S., and Khooban, M. (2018). Sliding mode disturbance observer control based on adaptive synchronization in a class of fractional-order chaotic systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 33.

N'Doye, I., Salama, K., and Laleg-Kirati, T.M. (2018). Robust fractional-order proportional-integral observer for synchronization of chaotic fractional-order systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, PP, 1–10.

Petráš, I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media.

Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.

Pourdadashi, F., Shafiee, M., and Darouach, M. (2019). Design of unknown input fractional order pi observer forfractional order singular systems withapplication to actuator fault diagnosis. *IET Control Theory Applications*, 13.

Rogosin, S., Gorenflo, R., A.Kilbas, A., and Mainardi, F. (2014). *Mittag-Leffler Function, Related Topics and Applications*. doi:10.1007/978-3-662-43930-2.

Skaar, S., Michel, A., and Miller, R. (1988). Stability of viscoelastic control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(4), 348–357.

Tabatabaei, S.S. (2022). Generalized lyapunov stability and designing pseudo-state/order estimator for incommensurate variable order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 107, 106127.