

# Multi-scroll attractors and multi-stability generated via fractional-order switching linear systems <sup>\*</sup>

Clemente A. Ramos-Fabian <sup>\*</sup> Jesus R. Pulido-Luna <sup>\*</sup>  
 Nohe R. Cazarez-Castro <sup>\*</sup> Jorge A. López-Rentería <sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana, Calzada Tecnológico S/N, Fracc. Tomás Aquino, Tijuana, Baja California, 22414, México (e-mail:*

*{clemente.ramos,rogelioxpulido,nohe}@ieee.org).*

<sup>\*\*</sup> *CONAHCYT-Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana, Calzada Tecnológico S/N, Fracc. Tomás Aquino, Tijuana, Baja California, 22414, México (e-mail: jorge.lopez@tectijuana.edu.mx).*

**Abstract:** This work presents a method for fractional order dynamical systems design that exhibits multi-scrolls by means of a fractional-order switching piecewise linear system. This method is based on the equilibrium points positioning and the region sizes in which the system switches. Numerical results of the proposed method are also presented and the multi-stability phenomenon is exhibited.

*Keywords:* Fractional order systems, piecewise linear systems, multiscroll, multistability, stability.

## 1. INTRODUCCION

La investigación de sistemas dinámicos de orden fraccional ha llamado mucho la atención y ha visto un auge en su estudio debido a que sus resultados son más cercanos al fenómeno real, ya que puede describir el efecto de la memoria heredada y sus propiedades cualitativas, y cómo afectan a un sistema como es exhibido en Petrás (2011); Freeborn (2013). La caracterización (Tlelo-Cuautle et al. (2019)), la implementación electrónica como la reportada en Yao et al. (2020) y el diseño de nuevos sistemas como el mostrado en Tavakoli-Kakhki et al. (2010), especialmente de aquellos que poseen múltiples enrollamientos (ver Yan et al. (2022)) han sido de gran interés para la comunidad científica.

Debido a esto, el presente documento se centra en el diseño de sistemas dinámicos de orden fraccional, a través de sistemas disipativos inestables por piezas, los cuales han demostrado en el caso entero (Campos-Cantón et al. (2010); Pulido-Luna et al. (2021)) y en el caso fraccional (Chen et al. (2017)) ser una alternativa para el diseño de

sistemas con multi-enrollamientos, gracias a la facilidad que otorga el análisis lineal. El resto de este documento está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se describen los preliminares matemáticos básicos, la sección 3 muestra una descripción breve de los sistemas con los que se trabajará y presenta el problema principal. La sección 4 muestra los resultados principales de este documento, mientras que la sección 5 muestra los resultados numéricos obtenidos. Por último, las conclusiones son presentadas en la sección 6.

## 2. PRELIMINARES

### 2.1 Multi-estabilidad en sistemas dinámicos

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y sea  $\phi_t(x_0) \in \mathbb{R}^n$  la curva solución o trayectoria de (1) dada una condición inicial  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})^T$ .

*Definición 1.* (Hirsch et al. (2013)). Un conjunto cerrado e invariante  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ , se dice ser un conjunto atractor de (1) con flujo  $\phi_t$ , si existe una vecindad  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $\mathcal{A}$  con  $\phi_t(U) \subseteq U$  y  $\mathcal{A} \subseteq U$  tal que

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t=0}^{\infty} \phi_t(U),$$

<sup>\*</sup> This work was partially funded by Tecnológico Nacional de México under projects: 17410.23-P, 16824.23-P and 16821.23-P. Additional funding was granted by CONAHCYT under project No. A1-S-32341. Clemente A. Ramos-Fabian and Jesus R. Pulido-Luna acknowledge CONAHCYT for the M.Sc. and D.Sc. scholarships respectively.

donde  $\phi_t(U) = \{\phi_t(x)|x \in U\}$ .

*Definición 2.* (Hirsch et al. (2013)). La cuenca de atracción de  $\mathcal{A}$ , es el conjunto de todas las condiciones iniciales cuya trayectoria converge al atractor, es decir que  $\Omega(\mathcal{A}) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \phi_t(x_0) \rightarrow \mathcal{A} \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$ .

Entonces, se dice que el sistema dado por (1) es un sistema multi-estable, si existe más de una cuenca de atracción, es decir, si múltiples atractores coexisten de manera mutuamente excluyente.

## 2.2 Cálculo de orden fraccional

El cálculo de orden fraccional se considera una generalización del cálculo de orden entero. Sin embargo, a diferencia del cálculo de orden entero, existe una gran variedad de definiciones de derivada de orden fraccional, donde las derivadas de Riemann–Liouville se definen por

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha x(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2)$$

donde  $\alpha \in (n-1, n)$  es el orden de derivación para  $n \in \mathbb{N}$ , mientras que  $a$  y  $t$  son los límites de integración y  $\Gamma(\cdot)$  representa a la función gamma, definida por  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$ , para cualquier complejo  $z$  con  $\text{Re}(z) > 0$ . Por otro lado, la derivada de orden fraccional de Caputo esta definida por

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (3)$$

donde  $x^{(n)}(\tau)$  representa la  $n$ -ésima derivada de orden entero de  $x(\tau)$ . Generalmente se considera el caso cuando  $a = 0$  y si en el operador integrodiferencial se omite  $C$  y  $RL$ , esto indica que el resultado es válido para ambos casos. Un sistema continuo de orden fraccional puede ser descrito por la ecuación diferencial

$$D^{\alpha_n} y(t) + a_1 D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_{n-1} D^{\alpha_1} y(t) + a_n D^{\alpha_0} y(t) = u(t), \quad (4)$$

con  $a_j \in \mathbb{R}$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ , y  $\alpha_n - \alpha_{n-1} = \beta_n$  donde  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ , mientras que  $u(t)$  y  $y(t)$  representan la entrada y la salida del sistema respectivamente. A través del cambio de variable

$$D^{\alpha_j} y(t) = x_{j+1}(t), \quad (5)$$

con  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , es posible expresar la evolución del sistema en espacio de estados a través de su forma de Jerk

$$\begin{pmatrix} D^{\beta_1} x_1 \\ D^{\beta_2} x_2 \\ \vdots \\ D^{\beta_n} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad (6)$$

cuya dinámica interna esta gobernada por el pseudo-polinomio característico del sistema en lazo abierto

$$q(\lambda, \alpha_j) = \lambda^{\alpha_n} + a_1 \lambda^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_{n-1} \lambda^{\alpha_1} + a_n \lambda^{\alpha_0}. \quad (7)$$

Sin embargo, si es posible expresar  $\alpha_j = j\alpha$ , entonces el sistema es llamado de orden commensurado  $\alpha$  y su pseudo-polinomio característico esta dado por

$$q(\lambda, \alpha) = \lambda^{n\alpha} + a_1 \lambda^{(n-1)\alpha} + \dots + a_{n-1} \lambda^\alpha + a_n. \quad (8)$$

La estabilidad interna del sistema (6) se analiza al considerar  $u(t) = 0$ . En este sentido, se establecen los siguientes resultados.

*Definición 3.* (Matignon (1996)). Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccional

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (9)$$

se dice ser:

- (1) estable, si y sólo si,  $\forall x_0$  existe  $k$ , tal que  $\forall t \geq 0$ ,  $\|x(t)\| \leq k$ ,
- (2) asintóticamente estable, si y sólo, si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ .

*Teorema 4.* (Matignon (1996)). Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccional

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (10)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es asintóticamente estable, si y sólo si,  $|\arg(\lambda^{\frac{1}{\alpha}})| > \frac{\pi}{2}$ , con  $\lambda$  las raíces de  $q(\lambda^\alpha) = \det(\lambda^\alpha I - A)$ , para  $0 < \alpha < 2$ .

*Teorema 5.* (Matignon (1996, 1998)). Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccional

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (11)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  es asintóticamente estable, si y sólo si,  $|\arg(s)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , para todas las  $s$  raíces de  $q(s) = \det(sI - A)$ , donde  $s = \lambda^\alpha$ , para  $0 < \alpha < 2$ .

La zona de estabilidad de  $q(\lambda^\alpha)$  se denota por  $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \frac{\pi}{2}\}$  y la zona de estabilidad de  $q(s)$  se denota por  $\mathbb{C}^\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \alpha \frac{\pi}{2}\}$ . En este sentido, se dice que  $q(t^\alpha)$  es  $\mathbb{C}^-$  estable, si y sólo si,  $q(s)$  es  $\mathbb{C}^\alpha$  estable. En la Fig. 1 es posible observar el comportamiento de la zona de estabilidad  $\mathbb{C}^\alpha$  cuando se varía el valor de  $\alpha$ .

## 2.3 Geometría analítica compleja

La geometría analítica compleja busca extender resultados de la geometría analítica clásica para el plano complejo, es decir, describir lugares geométricos y sus propiedades. A saber, la distancia euclideana entre dos complejos  $z_1$  y  $z_2$ , denotada por  $d(z_1, z_2)$ , está definida como  $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| \geq 0$ . De manera más general, si  $z$  es un número complejo y  $G \subset \mathbb{C}$  es no vacío, la distancia del punto  $z$  al conjunto  $G$  se define como

$$d(z, G) = \min_{g \in G} \{d(z, g)\} \quad (12)$$

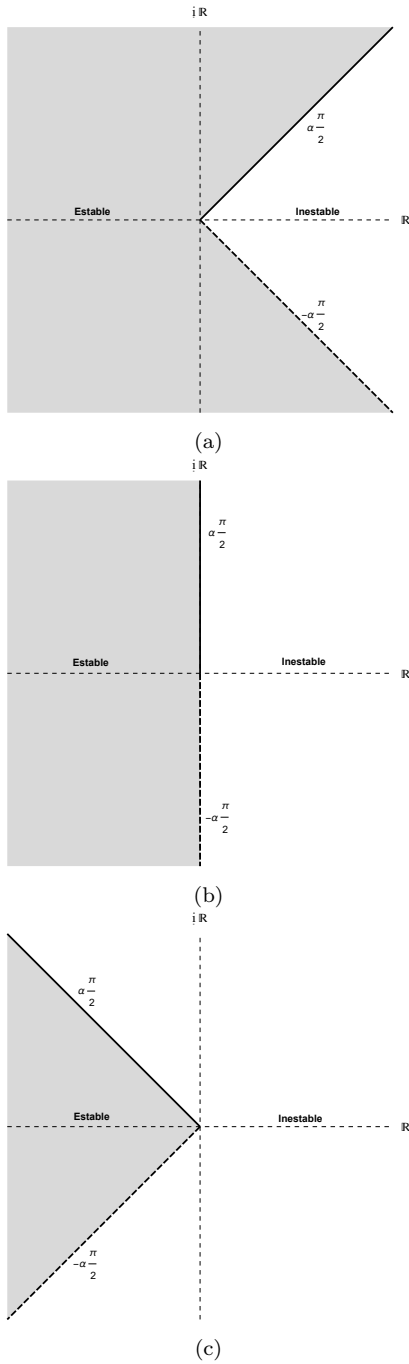


Fig. 1. Zona de estabilidad  $\mathbb{C}^\alpha$  (sombreada en gris): (a)  $0 < \alpha < 1$ , (b)  $\alpha = 1$ , (c)  $1 < \alpha < 2$ .

Uno de los lugares geométricos más importantes de la geometría analítica compleja, la ecuación general de la recta en el plano complejo, está dada por

$$h\bar{z} + \bar{h}z + k = 0 \quad (13)$$

donde  $h, z \in \mathbb{C}$ ,  $\bar{z}, \bar{h}$  son los conjugados complejos de  $z$  y  $h$ , respectivamente, y  $k \in \mathbb{R}$ . Si la recta pasa por los puntos  $z_1 = 0$  y  $z_2 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , se trata de una recta que pasa por el origen, y se describe por

$$h\bar{z} + \bar{h}z = 0 \quad (14)$$

donde  $h = 1 - i \cot(\theta)$  y  $0 < \theta < \pi$ .

Considérese entonces, el conjunto

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid h\bar{z} + \bar{h}z + k = 0\}, \quad (15)$$

el cual describe a todos los puntos sobre la recta. Así, para cualesquiera  $z_0 \in \mathbb{C}$ , la distancia de  $z_0$  a  $R$  está bien definida, pues  $R \neq \emptyset$ . La fórmula para calcular el mínimo de las distancias entre  $z_0$  y los elementos  $r \in R$  está dada por

$$d(z, r) := \frac{|h\bar{z} + \bar{h}z + k|}{2|h|}, \quad (16)$$

la cual puede ser vista como la distancia de  $z_0$  a su proyección ortogonal sobre  $R$ .

### 3. ESTABLECIMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la ecuación diferencial de orden fraccional

$$D^{3\alpha}y(t) + a_1D^{2\alpha}y(t) + a_2D^\alpha y(t) + a_3y(t) = u(t), \quad (17)$$

con el cambio de variable dado por (5) es posible obtener el sistema en espacio de estados como en (6). Considere entonces el sistema en conmutación afín a (17), dado por

$$D^\alpha x = Ax + bu(t), \quad (18)$$

con

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x(t) \in \mathcal{D}_1, \\ u_2 & \text{si } x(t) \in \mathcal{D}_2, \\ \vdots & \vdots \\ u_l & \text{si } x(t) \in \mathcal{D}_l, \end{cases} \quad (19)$$

donde  $b = (0, 0, 1)^T$  y  $u_j \in \mathbb{R}$ , con  $j = 1, 2, \dots, l$ . Por lo que el vector  $bu(t)$  está compuesto por los vectores  $bu_j$ , y cada dominio  $\mathcal{D}_j$  (también denominados átomos) contiene un punto de equilibrio dado por  $x_j^* = -A^{-1}bu_j$ , con  $\bigcup_{i=1}^l \mathcal{D}_i = \mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$  donde  $i \neq j$ .

Con la selección apropiada de los vectores  $u_j$ , es posible generar oscilaciones que converjan a un atractor. Es decir, el flujo del sistema  $\phi_t(x_0)$  formado por (18) y (19) es atrapado por un atractor  $\mathcal{A}$ . Tomando ésto en consideración, el objetivo principal de este documento es establecer un método de diseño para los vectores  $u_j$ , en términos de sus puntos de equilibrio para que el flujo del sistema quede atrapado dentro de un atractor con multi-enrollamientos. Además, exhibir la existencia de multi-estabilidad en el sistema diseñado.

### 4. RESULTADOS PRINCIPALES

#### 4.1 Sistemas disipativos inestables de orden fraccional

Para  $0 < \alpha < 2$ , considérese el conjunto  $\mathbb{C}^\alpha$ , un par de valores propios complejos conjugados  $z, \bar{z}$ , con  $Im(z) \neq 0$ . No es difícil ver que  $\partial\mathbb{C}^\alpha$  es la unión de los semiejes imaginarios conjugados  $\pm i\mathbb{R}$ , rotados simétricamente un ángulo  $\alpha\frac{\pi}{2}$  respecto al eje real positivo  $x$ , como se muestra en la Fig. 1. Entonces, para contar con una medida

direccional de distancia, se propone definir la función  $\delta$  como

$$\delta(z, \partial\mathbb{C}^\alpha) = \begin{cases} -d(z, i\mathbb{R}) & \text{si } z \in \mathbb{C}^\alpha, \\ d(z, i\mathbb{R}) & \text{si } z \notin \mathbb{C}^\alpha. \end{cases} \quad (20)$$

Para un número real  $x$ , la distancia de  $x$  a  $\partial\mathbb{C}^\alpha$  será simplemente

$$\delta(x, \partial\mathbb{C}^\alpha) = \begin{cases} -d(x, \mathcal{O}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^-, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ d(x, \mathcal{O}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (21)$$

donde  $\mathcal{O}$  es el origen  $z = 0$ .

Considerando todo lo anteriormente mencionado, se busca generalizar el concepto de *sistema disipativo inestable* (ver Campos-Cantón et al. (2012)) para sistemas de orden fraccional. En este sentido es que se establece la siguiente definición.

**Definición 6.** Considere un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccional

$$D^\alpha x = Ax, \quad (22)$$

donde  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $\alpha \in (0, 2)$ , y sean  $s_j$  para  $j = 1, 2, 3$  las raíces del polinomio característico de orden entero  $q(s) = \det(sI - A)$  asociado a (22) bajo el mapeo  $s = t^\alpha$ . Si  $s_j$  son tales que

$$\sum_{j=0}^3 \delta(s_j, \mathbb{C}^\alpha) < 0. \quad (23)$$

Entonces se dice que el sistema es

- i. un Sistema Disipativo Inestable Tipo I (*FOUDS-I* por sus siglas en inglés), si y sólo si,  $s_1 \in \mathbb{R}^+$  y  $s_2, s_3 \in \mathbb{C}^\alpha$  son complejos conjugados,
- ii. un Sistema Disipativo Inestable Tipo II (*FOUDS-II* por sus siglas en inglés), si y sólo si,  $s_1 \in \mathbb{R}^-$  y  $s_2, s_3 \notin \mathbb{C}^\alpha$  son complejos conjugados.

**Observación 7.** A la desigualdad (23), se le denomina *condición de disipatividad*.

#### 4.2 Atractores con multi-enrollamiento en 1D

Considere una ecuación diferencial de orden fraccional

$$D^{3\alpha}y(t) + a_1D^{2\alpha}y(t) + a_2D^\alpha y(t) + a_3y(t) = u(t), \quad (24)$$

y su sistema FOUDS en conmutación afín

$$D^\alpha x = Ax + bu(t), \quad (25)$$

con

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x(t) \in \mathcal{D}_1, \\ u_2 & \text{si } x(t) \in \mathcal{D}_2, \\ \vdots & \vdots \\ u_l & \text{si } x(t) \in \mathcal{D}_l. \end{cases} \quad (26)$$

Para generar multi-enrollamientos alrededor de los puntos de equilibrio situados a lo largo del eje  $x_1$ , se deben considerar a éstos de la forma  $x_j^* = (x_{j1}, 0, 0)^T$  con  $x_j^* \in \mathcal{D}_j$ . En consecuencia,  $u_j$  se calcula como

$$bu_j = -Ax_j^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3x_{j1} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Un esquema biparamétrico de diseño de  $u(x)$  para cuatro puntos de equilibrio se puede definir de la siguiente manera: considere  $\epsilon, \eta > 0$ , tal que

$$x_{21} - x_{11} = x_{41} - x_{31} = \epsilon, \quad (28)$$

$$x_{31} - x_{21} = \eta, \quad (29)$$

entonces los cuatro puntos de equilibrio estarán localizados simétricamente en el eje  $x_1$  con respecto al origen. Más aún,  $\epsilon$  y  $\eta$  definen de manera única a cada conjunto de puntos de equilibrio. Estos puntos están dados por

$$x_1^* = \left(-\left(\epsilon + \frac{\eta}{2}\right), 0, 0\right)^T, \quad (30)$$

$$x_2^* = \left(-\frac{\eta}{2}, 0, 0\right)^T, \quad (31)$$

$$x_3^* = \left(\frac{\eta}{2}, 0, 0\right)^T, \quad (32)$$

$$x_4^* = \left(\epsilon + \frac{\eta}{2}, 0, 0\right)^T, \quad (33)$$

por lo que la ley de conmutación, generada por el esquema propuesto, es

$$bu(x) = \begin{cases} \left(0, 0, -a_3\left(\epsilon + \frac{\eta}{2}\right)\right)^T & \text{si } x < -\frac{\epsilon + \eta}{2}, \\ \left(0, 0, -\frac{a_3\eta}{2}\right)^T & \text{si } -\frac{\epsilon + \eta}{2} \leq x < 0, \\ \left(0, 0, \frac{a_3\eta}{2}\right)^T & \text{si } 0 \leq x < \frac{\epsilon + \eta}{2}, \\ \left(0, 0, a_3\left(\epsilon + \frac{\eta}{2}\right)\right)^T & \text{si } \frac{\epsilon + \eta}{2} \leq x. \end{cases} \quad (34)$$

De acuerdo a lo anterior y a las definiciones proporcionadas, es posible sintetizar el ejemplo mostrado a continuación.

**Ejemplo:** Considere la ecuación diferencial de orden fraccional

$$D^{3\alpha}y(t) + D^{2\alpha}y(t) + D^\alpha y(t) + 1.5y(t) = u(t). \quad (35)$$

Bajo el cambio de variable (5) se establece la forma canónica controlable en espacio de estados, dado por

$$\begin{pmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ D^\alpha x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad (36)$$

con

$$u(t) = \begin{cases} (0, 0, -2.25) & \text{si } x < -1, \\ (0, 0, -0.75) & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ (0, 0, 0.75) & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ (0, 0, 2.25) & \text{si } 1 \leq x, \end{cases} \quad (37)$$

donde los valores  $\epsilon = 1, \eta = 1$  generan los puntos de equilibrio  $x_1^* = (-1.5, 0, 0)^T, x_2^* = (-0.5, 0, 0)^T, x_3^* = (0.5, 0, 0)^T, x_4^* = (1.5, 0, 0)^T$ . Se puede apreciar en (36) que el polinomio característico de orden entero asociado al sistema está dado por  $q(s) = s^3 + s^2 + s + 1.5$ , cuyas raíces son  $s_1 = -1.2041, s_2 = 0.1020 + 1.1115i, s_3 = 0.1020 - 1.1115i$ , y sus argumentos son  $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 1.4793$  y  $\theta_3 = -1.4793$ , respectivamente. La condición de disipatividad para el sistema (36)-(37) es equivalente a

$$\delta(s_2, \partial\mathbb{C}^\alpha) < -\frac{1}{2}\delta(s_1, \partial\mathbb{C}^\alpha) \quad (38)$$

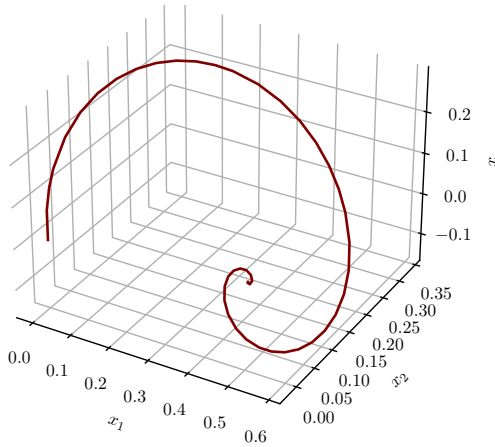


Fig. 2. Dinámica estable sin enrollamiento del sistema (36)-(37) con  $x_0 = (0, 0, 0)^T$  y orden  $\alpha = 0.75$ .

ya que  $\delta(s_2, \partial C^\alpha) = \delta(s_3, \partial C^\alpha)$  debido a la simetría que presentan  $s_2, s_3$  y la frontera de  $C^\alpha$  con respecto al eje real en el plano complejo. Entonces,  $\delta(s_1, \partial C^\alpha)$  y  $\delta(s_2, \partial C^\alpha)$  se calculan como

$$\delta(s_1, \partial C^\alpha) = s_1, \quad (39)$$

$$\delta(s_2, \partial C^\alpha) = \frac{|hs_2 + \bar{h}s_2|}{2|h|}, \quad (40)$$

donde  $h = 1 - \cot(\frac{\alpha\pi}{2})$ . La condición (38) es, por tanto, equivalente a

$$4.5793 \cot^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 0.9069 \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - 0.3207 < 0, \quad (41)$$

cuya solución se encuentra en  $0.8844 < \alpha < 1.2392$ . Por lo que el sistema (36)-(37) es estable para  $0 < \alpha < 0.8844$  e inestable para  $0.8444 < \alpha < 2$ . Más aún, según la definición 6, el sistema es FOUDS-II cuando  $0.8844 < \alpha < 1.2320$ .

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

A continuación se muestra la verificación numérica de los resultados previamente obtenidos. Ésto se logra utilizando la metodología presentada por Cai and Liu (2007) para la resolver numéricamente sistemas de orden fraccional.

La solución numérica de (36)-(37) con condición inicial  $x_0 = (0, 0, 0)^T$ , para un orden de derivación  $\alpha = 0.75$ , se muestra en la figura 2. Dado que  $0 < \alpha < 0.8844$ , el sistema es estable bajo la definición 3. En particular, la solución tiende a  $(x_1, x_2, x_3)^T = (0.4717, 0.0388, 0.0032)$ .

Para  $x_0 = (0, 0, 0)^T$  y orden de derivación  $\alpha = 1.06$ , el sistema (36)-(37) cumple con la definición 6 de FOUDS-II, por lo que se pueden generar multi-enrollamientos bajo la ley de conmutación dada. En la figura 3 se exhiben los enrollamientos alrededor de los cuatro puntos de equilibrio del sistema, mientras que en la figura 4 se muestran las proyecciones de dichos enrollamientos sobre los planos fase.

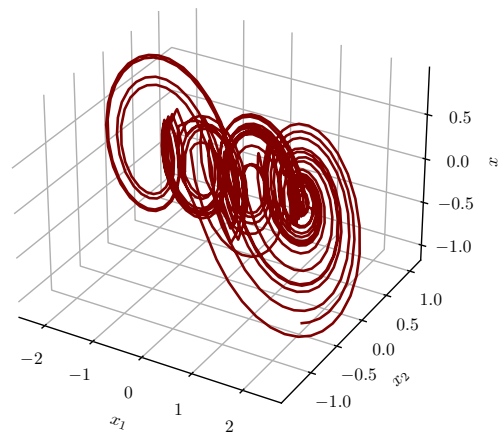


Fig. 3. Dinámica de enrollamiento cuádruple del sistema (36)-(37) con  $x_0 = (0, 0, 0)^T$  y orden  $\alpha = 1.06$ .

Es posible exhibir la multi-estabilidad en el sistema (36) al establecer los parámetros  $\epsilon = 1$  y  $\eta = 2$ , es decir, separando por parejas los puntos de equilibrio. En la figura 5 se muestran los flujos  $\phi_t((-0.5, 0, 0)^T)$  y  $\phi_t((0.5, 0, 0)^T)$ , cada uno atrapado por un atractor distinto.

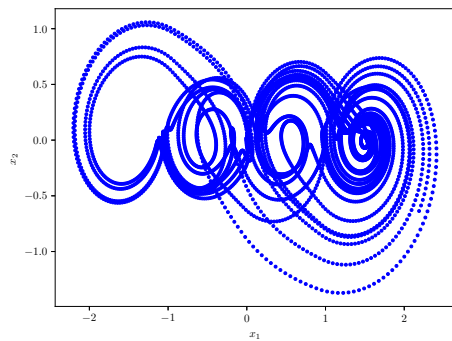
## 6. CONCLUSIONES

Se presentó el método de diseño de sistemas dinámicos de orden fraccional que exhiben multi-enrollamientos, por medio de sistemas lineales por partes en conmutación. Éste método se basa en el posicionamiento de los puntos de equilibrio y los tamaños de las regiones en las que el sistema conmuta. También se presentan resultados numéricos del método propuesto y se exhibe el fenómeno de multi-estabilidad.

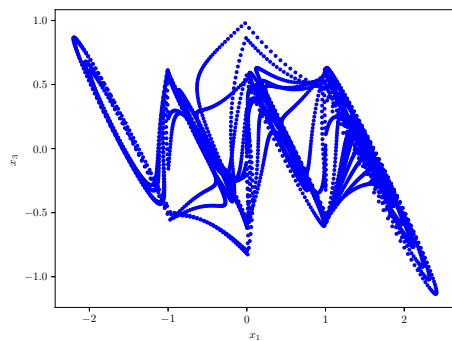
La definición 6 establece una caracterización de un tipo particular de sistemas de orden fraccional, los disipativos inestables. A través de ésta se determinó un intervalo de orden fraccional  $\alpha$  para el cual el sistema (36)-(37) cumple la condición de disipatividad, la cual es necesaria para que se dé el multi-enrollamiento.

## REFERENCES

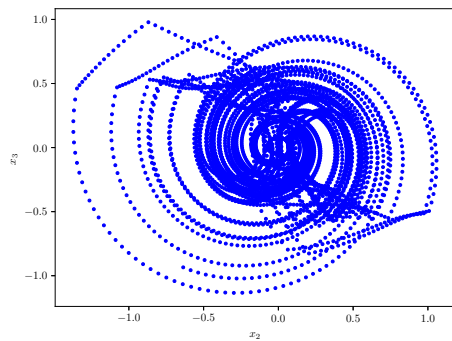
- Cai, X. and Liu, F. (2007). Numerical simulation of the fractional-order control system. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 23, 229–241.
- Campos-Cantón, E., Femat, R., and Chen, G. (2012). Attractors generated from switching unstable dissipative systems. *Chaos*, 22(3), 033121. doi:10.1063/1.4742338.
- Campos-Cantón, E., Barajas-Ramírez, J.G., Solís-Perales, G., and Femat, R. (2010). Multiscroll attractors by switching systems. *Chaos*, 20, 013116. doi: 10.1063/1.3314278.
- Chen, L., Pan, W., Wang, K., Wu, E., Tenreiro Machado, J.A., and Lopes, A.M. (2017). Generation of a family



(a)



(b)



(c)

Fig. 4. Proyecciones en planos fase del multi-enrollamiento del sistema (36)-(37) con  $x_0 = (0, 0, 0)^T$  y  $\alpha = 1.06$ : (a)  $(x_1, x_2)$  (b)  $(x_1, x_3)$  (c)  $(x_2, x_3)$ .

of fractional order hyper-chaotic multi-scroll attractors. *Chaos, Solitons & Fractals*, 105, 244–255. doi: 10.1016/j.chaos.2017.10.032.

Freeborn, T.J. (2013). A survey of fractional-order circuit models for biology and biomedicine. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 3(3), 416–424. doi:10.1109/JETCAS.2013.2265797.

Hirsch, M.W., Smale, S., and Devaney, R.L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and An*

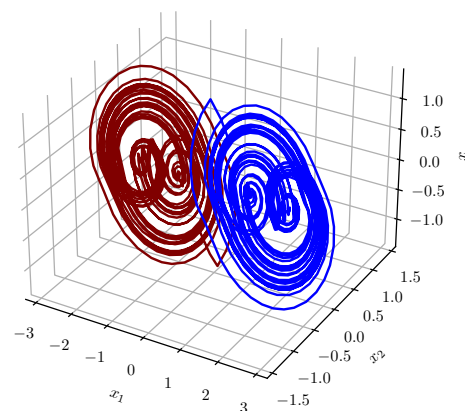


Fig. 5. Atractores coexistiendo en el espacio de estados de (36) para  $\delta = 1, \eta = 2$  y  $\alpha = 1.06$ . En rojo  $\phi_t((-0.5, 0, 0)^T)$  y en azul  $\phi_t((0.5, 0, 0)^T)$ .

*Introduction to Chaos*. Academic Press, 3rd edition.

Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications*, volume 2, 963–968.

Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM: Proc.*, 5, 145–158.

Petráš, I. (2011). *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Nonlinear Physical Science. Springer Berlin, Heidelberg, 1st edition. doi: 10.1007/978-3-642-18101-6.

Pulido-Luna, J.R., López-Rentería, J.A., Cazarez-Castro, N.R., and Campos, E. (2021). A two-directional grid multiscroll hidden attractor based on piecewise linear system and its application in pseudo-random bit generator. *Integration*, 81, 34–42. doi: 10.1016/j.vlsi.2021.04.011.

Tavakoli-Kakhki, M., Haeri, M., and Saleh Tavazoei, M. (2010). Simple fractional order model structures and their applications in control system design. *Elsevier European Journal of Control*, 16(6), 680–694. doi: 10.3166/ejc.16.680-694.

Tlelo-Cuautle, E., Pano-Azucena, A.D., Guillén-Fernández, O., and Silva-Juárez, A. (2019). Characterization and optimization of fractional-order chaotic systems. In *Analog/Digital Implementation of Fractional Order Chaotic Circuits and Applications*. Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-030-31250-3\_3.

Yan, S., Wang, Q., Sun, X., and Song, Z. (2022). Multiscroll fractional-order chaotic system and finite-time synchronization. *Physica Scripta*, 97(2), 025203. doi: 10.1088/1402-4896/ac4944.

Yao, J., Wang, K., Huang, P., Chen, L., and Tenreiro Machado, J.A. (2020). Analysis and implementation of fractional-order chaotic system with standard components. *Journal of Advanced Research*, 25, 97–109. doi:10.1016/j.jare.2020.05.008.