

Observer design for a Lorenz Oscillator

Christian Granados-Salazar * Gerardo Espinosa-Pérez *
Michael Rojas *

* Facultad de Ingeniería, UNAM (e-mail: christianf_gs@outlook.com;
gerardoe@unam.mx; michael.rojas@ingenieria.unam.mx).

Abstract: This article addresses the design problem of observers for the oscillator, focusing on the nonlinearities present in the model, which arise from the product between components of the state vector. These nonlinearities are particularly interesting because they allow obtaining an error dynamics that can be used to study the convergence properties of the observation scheme. In this sense, the design of a full-order observer is proposed, which is characterized by being a replica of the original system, with the addition of a correction term. Additionally, a numerical evaluation of the presented results is performed.

Keywords: Observer, Nonlinear systems, Structure preserving.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de observadores para sistemas no lineales ha sido un tema de investigación de gran interés en la teoría del control. Esto se debe a que el diseño de observadores para sistemas no lineales sigue siendo un desafío y un área de investigación abierta. A diferencia de los sistemas lineales, para los cuales existen técnicas bien establecidas para diseñar observadores, los sistemas no lineales presentan mayores dificultades debido a la naturaleza compleja de sus dinámicas. El diseño de observadores para sistemas no lineales implica abordar problemas como la estabilidad del observador, la convergencia de la estimación, el manejo de no linealidades y la selección adecuada de las ganancias del observador.

En este trabajo se aborda el diseño de observadores para una clase particular de sistemas no lineales. La estructura que se presenta en el modelo considerado se caracteriza por la existencia de matrices dependiente del estado, lo que lleva a tener productos entre estados del sistema de la forma $x_i x_j$. Esta clase de no linealidad permite proponer un esquema de observación.

En la literatura se pueden encontrar varios trabajos que se enfocan en el desarrollo de esquemas de observación para sistemas Hamiltonianos (PHC, por sus siglas en inglés). Estos trabajos emplean diferentes propiedades de los sistemas PHC para el diseño de los observadores. En las referencias Yaghmaei (2018) y Zenfari et al. (2022) se presenta un esquema de observación que preserva la estructura de un sistema PHC. Para lograrlo, se utiliza la técnica de contracción. En Rojas et al. (2021), se presenta un ejemplo en el cual se emplean las propiedades de la matriz de interconexión de un sistema PHC para abordar un tipo especial de no linealidades y además se preserva la estructura. En la referencia Granados-Salazar (2021)

se describe un observador tipo Luenberger diseñado para una clase específica de sistemas Hamiltonianos. En los artículos Venkatraman and van der Schaft (2010), Pfeifer et al. (2021), Granados-Salazar et al. (2022) se presenta el diseño de un observador que conserva la estructura del sistema original. Sin embargo, en este enfoque se utiliza la información de la función de energía del sistema para establecer las condiciones de convergencia del observador.

En particular, el sistema con el que se trabaja en el desarrollo de este artículo es el oscilador de Lorenz. Este sistema es conocido por exhibir un comportamiento caótico, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a grandes diferencias en la evolución del sistema a lo largo del tiempo. Desde el punto de vista de la teoría de control, es de interés estudiar su estructura y proponer esquemas de control.

En este sentido, en la literatura se encuentran diversas referencias con diferentes metodologías para proponer esquemas de observación. Por ejemplo, en la referencia Chandra et al. (2017) se propone un esquema de observación y además, como caso de aplicación, se utiliza la propuesta para transferencia de información. En Shams and Shahmansoorian (2020) se plantea el esquema de observación para el oscilador con consideración de existencia de fallas.

El propósito de este artículo es mostrar el diseño de un esquema de observación para el oscilador de Lorenz el cual, a pesar de que bajos ciertos parámetros este sistema exhibe un comportamiento caótico, el esquema propuesto es capaz de reconstruir los estados mediante el conocimiento de algunas variables. El principio de diseño del esquema propuesto está orientado a considerar sistemas con estructura Hamiltoniana, y dado que el modelo

del oscilador presenta una estructura similar, entonces se hace posible la implementación del observador.

El artículo se organiza de la siguiente manera: En la Sección 2 se presenta el modelo matemático del sistema bajo estudio y se muestran algunas propiedades que tiene su estructura al considerar ciertos valores en los parámetros. En la Sección 3 se muestra el diseño general del esquema de observación para posteriormente mostrar las condiciones que debe satisfacer el diseño de acuerdo a que variables se consideran medibles. En la Sección 4 se muestra la evaluación numérica del observador y, finalmente, en la Sección 5 se presentan algunas conclusiones.

2. MODELO MATEMÁTICO

Considere el modelo matemático del oscilador de Lorenz representado a continuación,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3\end{aligned}\quad (1)$$

el cual es un sistema de tercer orden con no linealidades dadas por productos entre estados del sistema. Los parámetros del sistema están dados por las constantes positivas σ , β , ρ .

El sistema es sensible a las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en los valores iniciales describen comportamientos distintos. También el comportamiento del sistema depende de la selección del valor de los parámetros, puede existir un único punto de equilibrio o múltiples puntos de equilibrio.

El sistema cuenta solamente con un único punto de equilibrio en el origen cuando $0 < \rho < 1$ y además este punto es asintóticamente estable. Para probar esto, considere la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{\sigma} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (2)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -\frac{2}{\sigma} x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 + 2x_3 \dot{x}_3 \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2 - \beta x_3^2 + 2(\rho + 1)x_1 x_2 \\ &= -2 \left(x_1 - \frac{\rho + 1}{2} x_2 \right)^2 + \\ &\quad -2 \left(1 - \frac{(\rho + 1)^2}{4} \right) x_2^2 - 2\beta x_3^2\end{aligned}\quad (3)$$

Para garantizar estabilidad asintótica del origen se necesita satisfacer que

$$1 - \frac{(\rho + 1)^2}{4} > 0 \quad (4)$$

entonces esto se cumple para $0 < \rho < 1$.

Cuando $\rho > 1$ se tienen tres puntos de equilibrio, el origen y dos puntos silla dados por

$$\begin{aligned}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= (0, 0, 0) \\ (x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \\ (x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)\end{aligned}$$

El sistema (1) puede ser expresado como

$$\dot{x} = [J(x_1) - R]x \quad (5)$$

con $x \in \mathbb{R}^3$, $J(x_1) = -J^\top(x_1) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ dadas por

$$J(x_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Esta representación se asemeja a la formulación de un sistema Hamiltoniano con una matriz $J(x_1)$ antisimétrica y con R asociada con los parámetros.

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR

La metodología de diseño del observador presentado en esta sección está reportada en Granados-Salazar (2021). Al sistema descrito en (5) es posible diseñar un esquema de observación de orden completo, el cual se muestra a continuación. Este observador es una copia de la dinámica del sistema en términos de los estados estimados \hat{x} , adicionando un término de corrección dado por

$$y - \hat{y} = Cx - C\hat{x}$$

en donde se observa que se ha supuesto que la salida es una combinación lineal de los estados determinada por la matriz constante $C \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$.

El esquema de observación que se propone es

$$\dot{\hat{x}} = [J(\hat{x}) - R]\hat{x} + L(y - \hat{y}) \quad (6)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (7)$$

donde $L \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de ganancias del observador.

La estructura de la dinámica del error de observación se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 1. Considere el observador de estados definido por (6) y defina al error de observación como $\tilde{x} = x - \hat{x}$. La dinámica del error de observación está dada por

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - (R + LC)]\tilde{x} + B(\hat{x})\tilde{x} \quad (8)$$

donde $B(\hat{x}) = [J_1 \hat{x} \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prueba 1. La dinámica del error de observación en el sistema considerado puede ser obtenida al definir el error de observación como $\tilde{x} = x - \hat{x}$, donde x es el vector de estados real y \hat{x} es la estimación del vector de estados. La

derivada del error de observación con respecto al tiempo es

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (9)$$

Sustituyendo las expresiones del sistema dado por (5) y el observador de estados definido por (6) en la dinámica del error, se obtiene

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - (R + LC)]\tilde{x} + (J(x) - J(\hat{x}))\hat{x} \quad (10)$$

La matriz $J(x)$ puede ser expresada como $J(x) = J_1 x_1$, esto implica que

$$\begin{aligned} J(x) - J(\hat{x}) &= J_1 \tilde{x}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Por lo tanto, la dinámica del error se puede reescribir como se muestra

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - (R + LC)]\tilde{x} + J_1 \tilde{x}_1 \hat{x} \quad (12)$$

Al simplificar y agrupar términos, se llega a que la dinámica del error tiene la siguiente forma

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x) - (R + LC)]\tilde{x} + B(\hat{x})\tilde{x} \quad (13)$$

donde $B(\hat{x})$ se encuentra definido como

$$B(\hat{x}) = [J_1 \hat{x} \quad 0 \quad 0] \quad (14)$$

Con esto se comprueba la Proposición 1. $\nabla\nabla\nabla$

3.1 Prueba de convergencia

Para analizar la convergencia del esquema de observación (6), es necesario examinar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio de la dinámica del error (13). Para esto, debe notarse que el término $B(\hat{x})\tilde{x}$ puede ser considerado como una perturbación desvaneciente en el origen dado que cuando $\tilde{x} = 0$ este término se desvanece siempre y cuando \hat{x} sea acotado, condición que se cumple debido a la estructura del observador y considerando a su vez que x sea acotado. Esta última condición se cumple siempre para el oscilador de Lorenz.

Proposición 2. Considere a la dinámica de error representada en (6) y además considere que:

S.1 El término $B(\hat{x})\tilde{x}$ es una perturbación desvaneciente en el origen, acotado por $\|B(\hat{x})\tilde{x}\| \leq \gamma \cdot \|\tilde{x}\|$.

Bajo las condiciones anteriores se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x}) = 0 \quad (15)$$

Prueba 2. Considere a la dinámica de error nominal, sin incluir al término de perturbación $B(\hat{x})\tilde{x}$. Para analizar la estabilidad de $\tilde{x} = 0$, se propone

$$V(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^\top \tilde{x} \quad (16)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(\tilde{x}) = -\tilde{x}^\top (R + LC)\tilde{x} \quad (17)$$

Si la parte simétrica de la matriz $R + LC$ es positiva definida generalizada, entonces el punto de equilibrio $\tilde{x} = 0$ de la dinámica del error es uniformemente asintóticamente estable.

Una vez obtenidas las propiedades de estabilidad para el punto de equilibrio de la dinámica del error nominal, se considera la inclusión del término $B(\hat{x})\tilde{x}$. Dado que este término establece una perturbación desvaneciente en el origen y dado que $\tilde{x} = 0$ es uniformemente asintóticamente estable, es posible aplicar teoremas estándares de sistemas perturbados para concluir que $\tilde{x} = 0$ preserva sus propiedades de estabilidad asintótica en presencia de la perturbación.

Con esto se queda comprobada la Proposición 2. $\nabla\nabla\nabla$

3.2 Salida Medible

Al diseñar el esquema de observación para el oscilador de Lorenz, es importante definir qué variable o variables del sistema se pueden medir. Para el esquema que se presenta en este artículo, cualquier estado del sistema x o combinación lineal de ellos puede ser considerado como salida medible. La elección de la variable medible puede depender del propósito del observador.

A continuación se muestran las condiciones que deben satisfacer las ganancias del esquema del observador dependiendo de la elección del estado que sea medible. Estas se presentan como desigualdades que surgen para determinar la convergencia del esquema de observación.

Medición de x_1 Para este primer caso se considerará como salida medible al estado x_1 .

Sea la salida representada por

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ &= [1 \ 0 \ 0]x \end{aligned} \quad (18)$$

Al implementar el observador que se muestra en (6) se obtiene la dinámica del error

$$\dot{\tilde{x}} = [J(x_1) - (R + LC)]\tilde{x} + B(\hat{x})\tilde{x} \quad (19)$$

con $B(\hat{x}) = [J_1 \hat{x} \ 0 \ 0]$ además

$$R + LC = \begin{bmatrix} \sigma + L_1 & -\sigma & 0 \\ -\rho + L_2 & 1 & 0 \\ L_3 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (20)$$

El objetivo es determinar las ganancias tales que la parte simétrica de $R + LC$ sea positiva definida.

La parte simétrica está definida por

$$\begin{bmatrix} \sigma + L_1 & \frac{1}{2}(L_2 - \sigma - \rho) & \frac{1}{2}L_3 \\ \frac{1}{2}(L_2 - \sigma - \rho) & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}L_3 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (21)$$

para determinar si la matriz resultante es positiva definida se calcula el complemento de Schur.

Como resultado se obtiene que las ganancias L_1 , L_2 y L_3 deben satisfacer la siguiente desigualdad.

$$L_1 + \sigma > \frac{1}{4} \left[(\sigma + \rho - L_2)^2 - \frac{L_3^2}{\beta} \right] \quad (22)$$

Medición de x_2 Ahora se considera al estado x_2 como salida medible.

Considere

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ &= [0 \ 1 \ 0]x \end{aligned} \quad (23)$$

Con la cual se obtiene a la matriz

$$R + LC = \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L_1 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma + L_1 & 0 \\ -\rho & 1 + L_2 & 0 \\ 0 & L_3 & \beta \end{bmatrix} \quad (25)$$

cuya parte simétrica es

$$\begin{bmatrix} \sigma & \frac{1}{2}(L_1 - \sigma - \rho) & 0 \\ \frac{1}{2}(L_1 - \sigma - \rho) & 1 + L_2 & \frac{1}{2}L_3 \\ 0 & \frac{1}{2}L_3 & \beta \end{bmatrix} \quad (26)$$

la cual debe ser positiva definida.

Entonces, la desigualdad que deben satisfacer las ganancias está dada por

$$\sigma(4\beta L_2 + 4\beta - L_3^2) > \beta(\sigma + \rho - L_1)^2 \quad (27)$$

Medición de x_3 Por último, es también posible que se defina al estado x_3 como la salida medible para el sistema.

Sea la salida

$$y = x_3 \quad (28)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1]x \quad (29)$$

La matriz a estabilizar resulta en

$$R + LC = \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & L_1 \\ -\rho & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & \beta + L_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

al obtener la parte simétrica, se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma & -\frac{1}{2}(\sigma + \rho) & \frac{1}{2}L_1 \\ -\frac{1}{2}(\sigma + \rho) & 1 & \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{2}L_1 & \frac{1}{2}L_2 & \beta + L_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

del mismo modo que en los casos anteriores la desigualdad que se debe satisfacer es

$$L_3 + \beta > -\frac{\sigma L_2^2 + L_1^2 + (\sigma + \rho)L_1 L_2}{\sigma^2 + 2\sigma\rho - 4\sigma + \rho^2} \quad (33)$$

A partir de la formulación presentada se demuestra que es posible asignar cualquier estado del sistema como medible y es posible garantizar la convergencia del observador, siempre y cuando se cumplan las desigualdades establecidas en la sección.

4. EVALUACIÓN NUMÉRICA

Para llevar a cabo la evaluación numérica del esquema de observación, es necesario seleccionar un conjunto de parámetros. Estos parámetros incluyen las ganancias del observador, que determinan la reconstrucción de los estados del sistema. Las ganancias se ajustan para lograr una estimación precisa de los estados y se seleccionan condiciones iniciales diferentes para el sistema y para el observador.

Para analizar la respuesta del observador es de interés que el sistema presente el comportamiento caótico. Para esto, se fija el valor de ρ en 28 y los parámetros restantes en $\sigma = 10$ y $\beta = \frac{8}{3}$ terminan por describir el comportamiento del sistema.

La evaluación numérica del diseño del observador para el oscilador de Lorenz se implementó en MATLAB-SIMULINK. Para el sistema se seleccionó como condición inicial a

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los valores de los parámetros utilizados para las diferentes evaluaciones están descritos en la Tabla 1 mientras que las condiciones iniciales utilizadas para el observador se presentan en la Tabla 2

En la Figura 1 se muestra el comportamiento del estado x_1 junto con el comportamiento del estado estimado \hat{x}_1 considerando que la salida medible es x_1 . Las dos gráficas

Parámetro	Valor
L_1	15
L_2	10
L_3	5
σ	10
β	$\frac{8}{3}$
ρ	28

Table 1. Parámetros del Observador

	C. I. 1	C. I. 2
x_1	30	-13
x_2	-10	33
x_3	12	-3

Table 2. Condiciones iniciales

mostradas para \hat{x}_1 corresponden a las dos condiciones iniciales mencionadas antes.

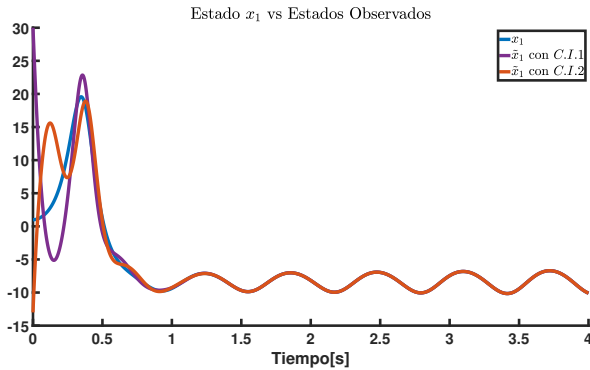


Fig. 1. Estado x_1

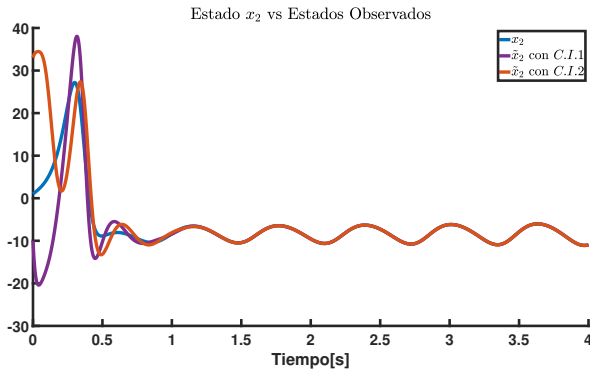


Fig. 2. Estado x_2

Considerando que x_1 es la salida medible, en la Figura 2 se muestra el estado x_2 real y el comportamiento del estado estimado \hat{x}_2 bajo las condiciones iniciales mencionadas. Este mismo escenario, para el estado x_3 , se muestra en la Figura 3.

Para ilustrar de una mejor manera el comportamiento del observador propuesto, en la Figura 4 se muestra el comportamiento de las trayectorias del sistema en el espacio de estados. En ella se observa la respuesta transitoria de las trayectorias estimadas debido a que las condiciones iniciales para el observador son diferentes a las del sistema.

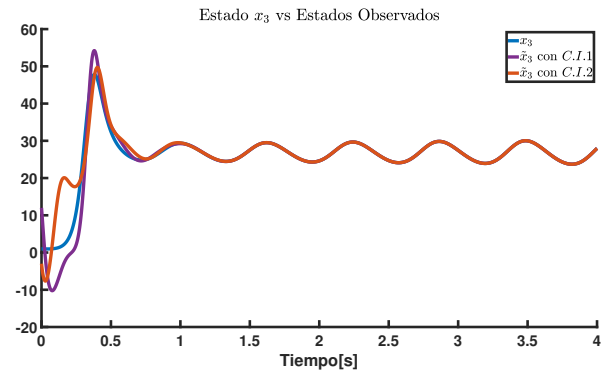


Fig. 3. Estado x_3

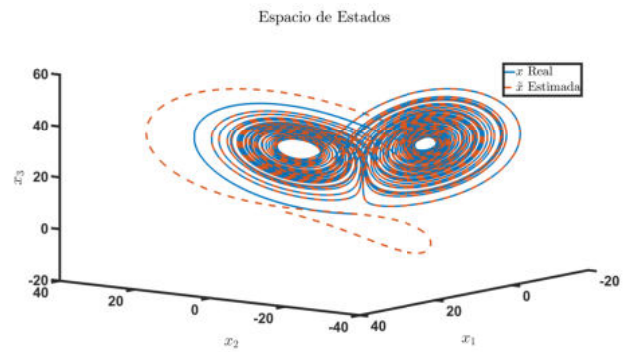


Fig. 4. Atractor de Lorenz

Una cuestión importante que aquí se muestra es que a pesar de que el sistema tiene comportamiento caótico, las trayectorias son acotadas y se garantiza convergencia.

En la Sección 3 de este trabajo, se destaca la flexibilidad del observador para poder seleccionar cualquier estado como salida medible, adaptando su comportamiento según dicha elección y las ganancias asociadas. Con el fin de ilustrar esto, se presentan las siguientes simulaciones que ejemplifican los diferentes comportamientos que se presentan.

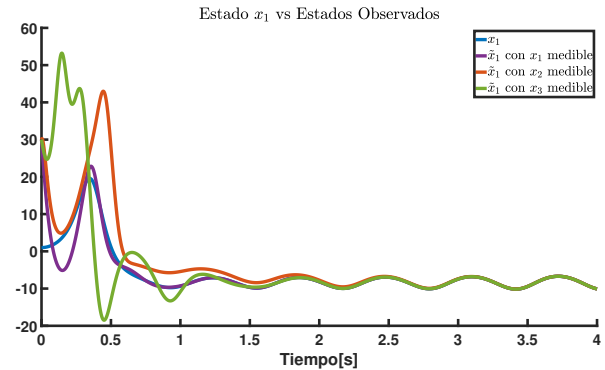


Fig. 5. Estado x_1

En la Figura 5 se presenta el comportamiento del estado x_1 y el del estado estimado \hat{x}_1 para las tres posibles selecciones de salida. Esta situación se presenta en la

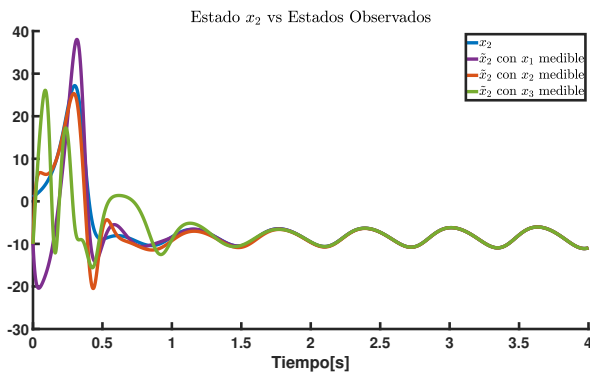


Fig. 6. Estado x_2

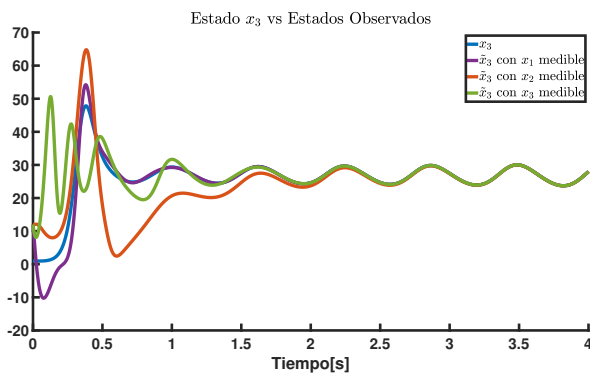


Fig. 7. Estado x_3

Figura 6 para el estado x_2 y en la Figura 7 para el estado x_3 . Para evaluar el desempeño de los observadores, se utilizó la misma condición inicial en todos los casos, lo que permite una comparación directa. Sin embargo, es importante destacar que el tiempo de convergencia varía en cada caso y además depende de las ganancias seleccionadas.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un observador de orden completo para el modelo matemático del oscilador de Lorenz. La propuesta de observador corresponde a un observador que preserva estructura, pues se trata de la copia del sistema más un término de corrección de salida. Para el observador propuesto se establecen condiciones que garantizan la convergencia de los estados estimados a los reales sin importar si el sistema exhibe un comportamiento caótico y sin importar el estado que se considere medible. Las propiedades del esquema propuesto se ilustraron por medio de simulaciones numéricas.

REFERENCES

Chandra, S., Gupta, M.K., and Tomar, N. (2017). Observer design approach to synchronize lorenz chaotic systems for secure communication.
Granados-Salazar, C., Rojas, M., and Espinosa-Pérez, G. (2022). Observer design for a class of nonlinear

hamiltonian systems based on energy function structure. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 1(4), 193–198.
Granados-Salazar, C. (2021). *Diseño de Observadores para una clase de sistemas Hamiltonianos*. Master's thesis, Facultad de Ingeniería, UNAM.
Pfeifer, M., Caspart, S., Strehle, F., and Hohmann, S. (2021). Full-order observer design for a class of nonlinear port-hamiltonian systems. *IFAC-PapersOnLine*, 54(19), 149–154. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.11.070>. 7th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control LHMNC 2021.
Rojas, M., Granados-Salazar, C., and Espinosa-Perez, G. (2021). Observer design for a class of nonlinear hamiltonian systems. *IFAC PapersOnLine.*, 54(19), 125–130.
Shams, Z. and Shahmansoorian, A. (2020). Fault estimation based on observer for chaotic lorenz system with bifurcation problem. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 42(3), 576–585. doi:10.1177/0142331219879267. URL <https://doi.org/10.1177/0142331219879267>.
Venkatraman, A. and van der Schaft, A. (2010). Full-order observer design for a class of port-hamiltonian systems. *Automatica*, 46(3), 555 – 561. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.01.019>.
Yaghmaei, Abolfazl y Yazdanpanah, M.J. (2018). Structure preserving observer design for port-Hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(3), 1214–1220.
Zenfari, S., Laabissi, M., and Achhab, M.E. (2022). Proportional observer design for port hamiltonian systems using the contraction analysis approach. *International Journal of Dynamics and Control*, 10(2), 403–408.

ACKNOWLEDGEMENTS

Este trabajo fue desarrollado con el apoyo de DGAPA-UNAM bajo el proyecto PAPIIT IN109622.